2nd Edition

Bilingual

COMPLETE MATHS

ब्रह्मास्त्र

FORMULA BOOK

- CLASS NOTES
- CONCEPTS
- SHORT TRICKS
- SOLVED EXAMPLES
- CALCULATION TRICKS

ADITYA RANJAN SIR
EXCISE INSPECTOR



USEFUL FOR

CET, SSC, RAILWAYS, DEFENCE, BANKING, & ALL GOVT. EXAMS

4 LAKHS+ BOOKS SOLD
1 MILLION+ DOWNLOADS
ORIGINAL

Selected हैं Selection दिलायेंगे

2nd Edition

Bilingual

COMPLETE MATHS

ब्रह्मास्त्र

FORMULA BOOK

@Raka_260

- CLASS NOTES
- CONCEPTS
- SHORT TRICKS
- SOLVED EXAMPLES
- CALCULATION TRICKS

Author

ADITYA RANJAN

Excise Inspector

Co-Author

Rudra Pratap Verma

INDEX

S.No.	CHAPTER	PAGE No.
1.	**Digital Sum** (डिजिटल योग)	1 – 12
2.	**Geometry** (ज्यामिति)	13 – 84
3.	**Mensuration 2D** (द्विविमीय क्षेत्रमिति)	85 – 104
4.	**Mensuration 3D** (त्रिविमीय क्षेत्रमिति)	105 – 123
5.	**LCM & HCF** (ल.स.प. और म.स.प.)	124 – 127
6.	**Number System** (संख्या पद्धति)	128 – 145
7.	**Simplification and Surds & Indices** (सरलीकरण तथा घातांक एवं करणी)	146 – 151
8.	**Algebra** (बीज़गणित)	152 – 162
9.	**Trigonometry** (त्रिकोणमिति)	163 – 171
10.	**Height & Distance** (ऊँचाई और दूरी)	172 – 177
11.	**Co-ordinate Geometry** (निर्देशांक ज्यामिति)	178 – 183

@Baka_200

S.No.	CHAPTER	PAGE No.
12.	**Percentage** (प्रतिशतता)	184 – 193
13.	**Profit & Loss** (लाभ और हानि)	194 – 198
14.	**Discount** (बट्टा/छूट)	199 – 200
15.	**Simple Interest** (साधारण ब्याज)	201 – 204
16.	**Compound Interest** (चक्रवृद्धि ब्याज)	205 – 212
17.	**Ratio & Proportion** (अनुपात और समानुपात)	213 – 218
18.	**Partnership** (साझेदारी)	219 – 220
19.	**Mixture** (मिश्रण)	221 – 223
20.	**Alligation** (एलिगेशन)	224 – 229
21.	**Average** (औसत)	230 – 233
22.	**Time & Work** (समय और कार्य)	234 – 237

S.No.	CHAPTER	PAGE No.
23.	**Pipe & Cistern** (नल और टंकी)	238 – 240
24.	**Time & Distance** (समय और दूरी)	241 – 246
25.	**Train** (रेलगाड़ी)	247 – 248
26.	**Race & Circular Motion** (दौड़ और वृत्तीय गति)	249 – 252
27.	**Boat & Stream** (नाव और धारा)	253 – 255
28.	**Permutation & Combination** (क्रमचय और संचय)	256 – 259
29.	**Probability** (प्रायिकता)	260 – 269
30.	**Statistics** (सांख्यिकी)	270 – 274
31.	**Logarithm** (लघुगणक)	275 – 276
32.	**Calculation** (गणना)	277 – 292

@Raka_260

DIGITAL SUM

अंकीय योग

01

Introduction/परिचय

It is a method not used for quick calculation but for quick checking of answers. This technique has different useful applications for students giving competitive & other exams as they are already provided with four options to every answer.

यह एक ऐसी विधि है जिसका उपयोग त्वरित गणना के लिए नहीं बल्कि उत्तरों की त्वरित जांच के लिए किया जाता है। प्रतियोगी और अन्य परीक्षाएं देने वाले छात्रों के लिए इस तकनीक के अलग-अलग उपयोगी अनुप्रयोग हैं क्योंकि उन्हें पहले से ही प्रत्येक उत्तर के लिए चार विकल्प प्रदान किए जाते हैं।

What is digital sum/डिजिटल योग क्या है:

A single digit obtained by adding all digits of a number, is called digit sum.

किसी संख्या के सभी अंकों को जोड़ने पर प्राप्त एक अंक को अंकीय योग कहा जाता है।

For example, Digit sum of 135 = 1 + 3 + 5 = 9

Digit sum of 68 = 6 + 8 = 14 = 1 + 4 = 5

'OR'

Remainder obtained by dividing a number by 9, is called digit sum.

किसी संख्या को 9 से विभाजित करने पर जो शेषफल प्राप्त होता है, उसे अंकीय योग कहते हैं।

For example, Digit sum of 34 = 3 + 4 = 7

'OR'

Remainder When 34 is divided by 9 = 7

Another example, digit sum of 58 = 5 + 8 = 13

= 1 + 3 = 4

Remainder when 58 is divided by 9 = 4

The digit sum method can be used to check answers involving different arithmetic operations like multiplication, division, addition, subtraction, squares, square roots, cube roots etc.

अंकीय योग पद्धति का उपयोग गुणा, भाग, जोड़, घटाव वर्ग, वर्गमूल, घनमूल आदि जैसे विभिन्न अंकगणितीय परिचालनों से जुड़े उत्तरों की जांच करने के लिए किया जा सकता है।

Digit sum of LHS = Digit Sum of RHS.

LHS का अंकीय योग = RHS का अंकीय योग।

Digit sum can be implemented on percentage or decimals as well.

अंकीय योग को प्रतिशत अथवा दशमलव पर भी लागू किया जा सकता है।

For decimals, digit sum work exactly the same way, but we don't pay attention to the decimal points the digit sum of 6.256 is (6 + 2 + 5 + 6) = 19, eleminiate 9, digit- sum is 1

दशमलव के लिए, अंकीय योग बिल्कुल उसी तरह काम करता है, लेकिन हम दशमलव बिंदुओं पर ध्यान नहीं देते हैं, 6.256 का अंकीय योग (6 + 2 + 5 + 6) = 19 अंक-योग 1 है

Note: (i) Digit sum can be any of following the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 or 0.

अंकीय योग निम्नलिखित संख्या 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 या 0 में से कोई भी हो सकता है।

By adding 9 in any of above digits, digit sum does not change this means while adding consider 9 as zero.

उपरोक्त किसी भी अंक में 9 जोड़ने पर अंकीय योग नहीं बदलता अर्थात जोड़ते समय 9 को शून्य मानें।

Therefore, while calculating the digit sum of a number, you can eliminate all the nines and all the digits that add up to nine. By doing this you will be able to calculate the digit sum of any number much faster the elimination will have no effect on the final result.

Remember that 9 is synonymous with 0 and can be used interchangeably as 9 is also divisible by 9 leaves remainder 0.

(9 = 0, in digit sum)

इसलिए, किसी संख्या के अंकों के योग की गणना करते समय, आप सभी 9 और जोड़ने पर 9 प्राप्त करने वाले सभी अंकों को विलोपित सकते हैं। ऐसा करने से आप किसी भी संख्या के अंकीय योग की गणना बहुत तेजी से कर पाएंगे, विलोपन का अंतिम परिणाम पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा। याद रखें कि 9, 0 का पर्याय है और इसे एक दूसरे के स्थान पर इस्तेमाल किया जा सकता है क्योंकि 9 भी 9 से विभाज्य है, शेषफल 0 है।

(9 = 0, अंकीय योग में)

Ex. Find the digit-sum of 2467539.

2467539 का अंकीय योग ज्ञात कीजिए।

HINTS:

We will eliminate the numbers that add up to 9 (2 & 7, 4 & 5, 6 & 3 and also eliminate the 9) .We obtain 0 or 9.

Ex. Find the digit-sum of 6372819923

6372819923 का अंकीय योग ज्ञात कीजिए

HINTS:

We will eliminate the numbers that add up to 9 (6 & 3, 7 & 2, 8 & 1 and also eliminate the two 9's). We are left with the digits 2 & 3 which also add up to 5.

(ii) Digit sum of any multiple of 9 is 9.

9 के किसी गुणज का अंकोंय योग 9 होता है।

For example/उदाहरण के लिए

$9 \times 14 = 126 = 1 + 2 + 6 = 9$

$9 \times 43 = 387 = 3 + 8 + 7 = 18 = 1 + 8 = 9$

9 का यह एक बेहद महत्वपूर्ण गुणधर्म है। विद्यार्थी यदि इसका Application अच्छे से समझ लें तो कई प्रश्नों में बिना पूरा calculation किए options eliminate करके सही उत्तर तक पहुचा जा सकता है।

यदि किसी भी Multiplication प्रक्रिया में 9 दिखे या 9 का कोई multiple दिखे और यह 9 denominator से cancel out ना हो रहा हो, तो गुणनफल का digit sum हमेशा 9 होगा।

कुछ PYQ के माध्यम से इसके अनुप्रयोग को और अच्छे से समझते है।

Ex. Due to pandemic, the population of city reduces at the rate of 2% per annum. What will be its total population after 2 years if the present population of the city is 45,000?

महामारी के कारण एक शहर की जनसंख्या 2% प्रतिवर्ष की दर से घटती है। यदि शहर की वर्तमान जनसंख्या 45,000 है, 2 वर्ष बाद इसकी कुल जनसंख्या क्या होगी?

(a) 40538 (b) 44521

(c) 41568 (d) 43218

HINTS:

Population After Two year

$= 45000 \times \frac{49}{50} \times \frac{49}{50} = 43218$

चूंकि 45000, 9 का multiple है और यह D^r से cancel out भी नहीं होगा इसलिए गुणनफल का digit sum 9 होगा।

दिए गए विकल्पों में से (d) का ही digit sum 9 है।

Ex. 2000 employees are assigned to complete a project. At the end of the first year, 15% of the number of employees are decreased and at the end of the second year again 10% of the number of employees are decreased. However, to complete the project in time, the number of employees are increased by 10% at the end of the third year. What was the number of employees working during the fourth year?

2000 कर्मचारियों को एक परियोजना को पूरा करने का कार्य सौंपा गया है। पहले वर्ष के अंत में, कर्मचारियों की संख्या 15% कम हो जाती है और दूसरे वर्ष के अंत में कर्मचारियों की संख्या पुनः 10% कम हो जाती है। हालांकि, परियोजना को समय पर पूरा करने के लिए तीसरे वर्ष के अंत में कर्मचारियों की संख्या 10% बढ़ा दी जाती है। चौथे वर्ष में काम करने वाले कर्मचारियों की संख्या कितनी है?

(a) 1786 (b) 1685

(c) 1683 (d) 1783

HINTS:

Number of employees working during the fourth year,

$= 2000 \times \frac{85}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{110}{100} = 1683$

चूंकि 90, 9 का multiple है इसलिए गुणनफल का digit sum 9 होगा। दिए गए विकल्पों में से (c) का ही digit sum 9 है।

Ex. Swati sold a bag to Ankita at a gain of 15%. Aashi bought this bag from Ankita for ₹ 24,840. Ankita earned a profit of 20%. At what price would swati have bought the bag?

स्वाति ने अंकिता को एक बैग 15% के लाभ पर बेचा। आशी ने यह बैग अंकिता से 24,840 रु. में खरीदा था। अंकिता ने 20% का लाभ अर्जित किया। स्वाति ने बैग किस कीमत पर खरीदा होगा?

(a) ₹ 18,500 (b) ₹ 18,000

(c) ₹ 16,000 (d) ₹ 20,000

HINTS:

CP	SP
20	23
5	6
100	138

Swati bought at,

$\frac{24840}{138} \times 100 = \text{Rs.}18000$

चूंकि 24840 का digit sum 9 है अर्थात् यह 9 का multiple है और D^r से cancel out भी नहीं होगा इसलिए गुणनफल का digit sum 9 होगा।

दिए गए विकल्पों में से (b) का ही digit sum 9 है।

Ex. The area of a field in the shape of a hexagon is $1944\sqrt{3}m^2$. What will be the cost (in Rs.) of fencing it at the rate of Rs.11.50 per metre?

एक षट्भुजाकार खेत का क्षेत्रफल $1944\sqrt{3}m^2$ है। उसके चारों ओर रुपये 11.50 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने में कितनी लागत (रुपये में) आएगी?

(a) 2,256 (b) 3,200

(c) 2,785 (d) 2,484

HINTS:

∵ Area of a hexagon

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 = 1944\sqrt{3}$

$a^2 = \frac{1944 \times 4}{6} \Rightarrow a = 36\ m$

Perimeter of the hexagon

$= 6 \times 36 = 216$ m

Total cost $= 216 \times 11.5 = \text{Rs.}2484$

चूंकि 216, 9 का multiple है इसलिए गुणनफल का digit sum 9 होगा। दिए गए विकल्पों में से (d) का ही digit sum 9 है।

Ex. A hemispherical bowl whose radius is 21 cm is full of ice cream. Find the volume of the ice cream.

(take $\pi = \frac{22}{7}$)

एक अर्धगोलाकार कटोरा, जिसकी त्रिज्या 21 सेमी है, आइसक्रीम से भरा है। आइसक्रीम का आयतन ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

(a) 20000 cm^3 (b) 21000 cm^3

(c) 22000 cm^3 (d) 19404 cm^3

HINTS:
Volume of hemisphere

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21 = 19404 \text{ cm}^3$

चूंकि $21 \times 21 \times 21$, में $3 \times 3 \times 3$ हैं जिसमें से एक 3 D' से cancel out हो जाएगा। बचे हुए दो 3 मिलकर 9 हो जाएगें अर्थात् final product का digit sum 9 होगा।

दिए गए विकल्पों में से (d) का ही digit sum 9 है।

Ex. The total surface area of a solid hemisphere is 1039.5 cm^2. The volume (in cm^3) of the hemisphere is:

$\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$

एक ठोस अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 1039.5 सेमी है। अर्धगोले का आयतन (सेमी' में) कितना होगा? $\left(\text{मान लीजिए } \pi = \frac{22}{7}\right)$

(a) 2225.5 (b) 2530.6
(c) 2425.5 (d) 2525.6

HINTS:

$3\pi r^2 = 1039.5$

$= 3 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 1039.5 \quad \Rightarrow r = \frac{21}{2} = 10.5 \text{ cm}$

Volume of Hemisphere

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5 \times 10.5 = 2425.5 \text{ cm}^3$

चूंकि $10.5 \times 10.5 \times 10.5$, में $3 \times 3 \times 3$ हैं जिसमें से एक 3 D' से cancel out हो जाएगा। बचे हुए दो 3 मिलकर 9 हो जाएगें अर्थात् final product का digit sum 9 होगा।

दिए गए विकल्पों में से (c) का ही digit sum 9 है।

Ex. Water is flowing through a cylindrical canal with an internal diameter of 7 m at he speed of 18 km/h. Find the volume of water flowing through the canal in 30 mintues. (take $\pi = \frac{22}{7}$)

7 मी आंतरिक व्यास वाली एक बेलनाकार नहर में पानी के बहाव की गति 18 किमी/घंटा है। इसके माध्यम से 30 मिनट में बहने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ का उपयोग कीजिए।)

(a) 3,76,500 m^3 (b) 3,56,500 m^3
(c) 3,66,500 m^3 (d) 3,46,500 m^3

HINTS:
Distance covered in 30 minutes (9 km) will be considered as height.
h = 9000 m
Volume of water flowing through the canal in 30 minutes = $\pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 9000 = 346500 m^3$

चूंकि 9000, 9 का multiple है और यह D' से cancel out भी नहीं होगा इसलिए गुणनफल का digit sum 9 होगा।

दिए गए विकल्पों में से (d) का ही digit sum 9 है।

Ex. If the amount obtained by A by investing Rs 9,100 for three years at a rate of 10% p.a. on simple interest is equal to the amount obtained by B by investing a certain sum of money for five years at a rate of 8% p.a. on simple interest, then 90% of the sum invested by B (in Rs) is:

यदि A द्वारा साधारण ब्याज पर वार्षिक 10% की ब्याज दर से तीन वर्षों के लिए रूपये 9100 का निवेश करके प्राप्त की गई धनराशि, B द्वारा साधारण ब्याज पर, वार्षिक 8% की ब्याज दर से पांच वर्षों के लिए एक निश्चित राशि का निवेश करके प्राप्त की गई राशि के बराबर है, तो B द्वारा निवेश की गई राशि का 90% (रूपये में) ज्ञात करें।

(a) 7,800 (b) 7,605
(c) 8,540 (d) 8,450

HINTS:

B द्वारा निवेशित धनराशि जितनी भी होगी उसका 90% अर्थात् 9 का product जिसका digit sum 9 होगा।

दिए गए विकल्पों में से (b) का ही digit sum 9 है।

Ex. A sum of Rs18,000 becomes Rs 21,780 after 2 years on compound interest compounded annually. What will be the compound interest (in Rs) on the same sum for the same period if the rate of interest increases by 5%?

सालाना चक्रवृद्धि ब्याज पर 2 साल में 18,000 रुपये की राशि 21,780 रुपये हो जाती है। यदि ब्याज की दर में 5% की वृद्धि होती है, तो समान अवधि के लिए समान राशि पर चक्रवृद्धि ब्याज (रु में) कितना होगा?

(a) 1,845 (b) 4,670
(c) 5,805 (d) 5,500

HINTS:

Principal		Amount
18000	:	21780
$\sqrt[2]{900}$	:	$\sqrt{1089}$
30	:	33

Rate = $\frac{3}{30} \times 100 = 10\%$

If rate is increased by 5% = 15%
C.I. for two years = = 32.25%

$= \frac{18000}{100} \times 32.25$

चूंकि 18000, 9 का multiple है इसलिए गुणनफल का digit sum 9 होगा। दिए गए विकल्पों में से (a) & (c) का digit sum 9 है। परंतु जैसा कि हम जानते है 18000 के 10% का मान 1800 होता है यहाँ हमे 32.25% का मान ज्ञात करना है इसलिए option (c) सही उत्तर है।

Ex. Find the sum $3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^8$.

$3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^8$ का योग ज्ञात करें।

(a) 6561 (b) 6560
(c) 9840 (d) 3280

HINTS:

दिए गए expression में 3 को छोड़ कर सभी terms में 9 आ रहा है। अर्थात् सही उत्तर 9 के multiple से 3 अधिक होगा।

दिए गए विकल्पों में (c) एक मात्र ऐसा विकल्प है जिसका digit sum 9 के multiple से 3 अधिक है।

@Baka_Lagega_Pass
Aditya Ranjan

Application of Digital sum
(डिजिटल योग का अनुप्रयोग)

1. Addition/योग

The digit sum of the final sum should be equal to the digit sum of all the numbers used in the addition process.

अंतिम योगफल का अंकीय योग जोड़ प्रक्रिया में प्रयुक्त सभी संख्याओं के अंकीय योग के बराबर होना चाहिए।

(i) For example/उदाहरण के लिए, 13 + 12 = 25

Digit sum of 13 = 1 + 3 = 4

Digit sum of 12 = 1 + 2 = 3

Digit sum of 4 and 3 = 7

Digit sum of 25 is 2 + 5 = 7

Thus digit sum of LHS = Digit sum of RHS.

इस प्रकार LHS का अंकीय योग = RHS का अंकीय योग।

(Why this happens? Because, if you divide 13 & 12 by 9 and add up the remainders (4 + 3 = 7) which is equal to the remainder obtained by dividing 25 by 9.)

(ऐसा क्यों होता है? क्योंकि, यदि आप 13 और 12 को 9 से विभाजित करते हैं और शेषफल जोड़ते हैं (4 + 3 = 7) जो 25 को 9 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल के बराबर होता है।)

Ex. 1.5 + 32.5 + 23.9 = 57.9

HINTS:

Digit sum of LHS 6 + 10 + 5 = 21 = 3

Digit sum of RHS 5 + 7 + 9 = 12 = 3

Ex. Verify whether 18273645 + 9988888 + 6300852 + 11111111 is 45674496.

सत्यापित करें कि क्या 18273645 + 9988888 + 6300852 + 11111111 का योगफल 45674496 है।

HINTS:

The digit-sum of the numbers is 0, 4, 6 and 8 respectively.

Total of these 4 digit sum is 18 and the digit sum of 18 is 9.

The digit sum of 45674496 is also 9.

Hence, Digit sum of the question is equals to the digit sum of the Answer.

अत:, प्रश्न के अंकों का योग उत्तर के अकों के योग के बराबर है।

i.e., We can assume that the addition is correct.

अर्थात, हम मान सकते हैं कि योगफल सही है।

2. Subtraction/घटाव

The digit sum of the smaller number as subtracted from the digit sum of bigger number should equal tothe digit sum of the difference.

बड़ी संख्या के अंकों के योग से छोटी संख्या के अंकों का योग घटाने पर प्राप्त अंकों का योग अंतर के अंकों के योग के बराबर होना चाहिए।

For example/उदाहरण के लिए, 88 – 13 = 75

Digit sum of LHS = 7 – 4 = 3

Digit sum of RHS = 7 + 5 = 12 = 3

Ex. 73 – 16 = 57

HINTS:

Digit sum of LHS = 1 – 7 = – 6 + 9 = 3

If the digit sum value comes negative then just add it to 9 & result will be the actual digit sum value. (Remember it)

यदि अंकों का योग मान ऋणात्मक आता है तो इसे 9 में जोड़ें और परिणाम वास्तविक अंकों का योग मान होगा। (याद रखें)

Digit - sum of RHS = 5 + 7 = 12 = 3.

Ex. 2474 – 1140 = 1330

HINTS:

Digit sum of LHS = 4 – 6 = – 2 + 9 = 7

If the digit sum value comes negative then just add it to 9 & result will be the actual digit sum value. (Remember it)

यदि अंकों का योग मान ऋणात्मक आता है तो इसे 9 में जोड़ें और परिणाम वास्तविक अंकों का योग मान होगा। (याद रखें)

Digit - sum of RHS = 1 + 3 + 3 = 7

Ex. Verify whether 32586 minus 12598 are 19988.

सत्यापित करें कि क्या 32586, 12598 का अंतर 19988 है।

HINTS:

The digit sum of the number 32586 is 6

The digit sum of the number 12598 is 7

Subtract 7 from 6 we get – 1 i.e., 1 + 9 = 8

Also digit sum of 19988 is also 8.

Hence, Digit sum of the question is equals to the digit sum of the Answer.

अत:, प्रश्न के अंकों का योग उत्तर के अंकों के योग के बराबर है।

i.e., We can assume that the subtraction is correct.

अर्थात, हम मान सकते हैं कि घटाव सही है।

3. Multiplication/गुणा

First we will calculate the digit sum of the first number, we will calculate the digit sum of the second number we will multiply the two digit sums thus obtained. If the final answer equals to the digit sum of the product then, our answer can be concluded as to be correct.

पहले हम पहली संख्या के अंकों के योग की गणना करेंगे, हम दूसरी संख्या के अंकों के योग की गणना करेंगे, हम इस प्रकार प्राप्त दो अंकों के योग को गुणा करेंगे। यदि प्राप्त अंकों का योग गुणनफल के अंकों के योग के बराबर है, तो हमारे उत्तर को सही माना जा सकता है।

For example/उदाहरण के लिए, 15 × 13 = 195

Digit sum of multiplication of digit sum of 15 & 13 = (1 + 5) × (1 + 3) = 6 × 4 = 24 = 6

Digit sum of RHS = 1 + 9 + 5 = 6 (eliminate 9)

Digit sum of LHS = Digit sum of RHS

Ex. Verify whether 467532 multiplied by 107777 equals 50389196364.

सत्यापित करें कि क्या 467532 को 107777 से गुणा करने पर 50389196364 आता है।

HINTS:

The digit sum of 467532 is 9.

The digit sum of 107777 is 2.

Digit sum of LHS = 9 × 2 = 18 = 9

Digit sum of 50389196364 is also 9.

Hence, Digit sum of the question is equals to the digit sum of the Answer.

अतः, प्रश्न के अंकों का योग उत्तर के अंकों के योग के बराबर है।

i.e., We can assume that the product is correct.

अर्थात, हम मान सकते हैं कि गुणनफल सही है।

Ex. The value of 95 × 105 is:

95 × 105 का मान _____ है।

(a) 9981 (b) 9935

(c) 9965 (d) 9975

HINTS:

Digit sum of multiplication (95 × 105) = 5 × 6 = 3

Digit sum of only option (d) is 3, which is correct answer.

4. Division/भाग

In division the numerator does'nt but impact. So, it's upto denominator used in the expression.

भाग में अंश का प्रभाव ही नहीं पड़ता। प्रभाव सिर्फ हर का होता है।

We can face the sum of digit sum of denominators in digit sum division process as written below.

अंक योग विभाजन प्रक्रिया में हर के अंकों के योग निम्न में से कोई भी हो सकता है।

$$\frac{N^r}{1}, \frac{N^r}{2}, \frac{N^r}{3}, \frac{N^r}{4}, \frac{N^r}{5}, \frac{N^r}{6}, \frac{N^r}{7}, \frac{N^r}{8}, \frac{N^r}{9 \text{ or } 0}$$

The rule of digit sum fails when the denominator has 3, 6 or 9. In such situations, firstly try to cancel out 3, 6 or 9 with numerator and then apply digit sum. If 3, 6 or 9 cannot be eliminated from the denominator then digit sum rule will not apply.

अंक योग का नियम तब विफल हो जाता है जब हर में 3, 6 या 9 हो। ऐसी स्थितियों में, सबसे पहले 3, 6 या 9 को अंश से काटने का प्रयास करें और फिर अंकीय योग लागू करें। यदि हर से 3, 6 या 9 को eliminate नहीं कर सकते तो डिजिटल योग का नियम apply नहीं होगा।

Ex. $\frac{1092}{156} = 7$

HINTS:

DS of $D^r = 3$

Therefore try to cancel out 3 from both N^r & D^r.

$\frac{364}{52}$, Now DS of $D^r = 7$

$\therefore \frac{364 \times 4}{52 \times 4} = 7$

Hence, DS of LHS = DS of RHS

In the denominator, if any other digit sum other than 3, 6 or 9 is obtained, then we try to make it 1. For this follow the following procedure.

हर में यदि 3, 6 या 9 के अलावा कोई और डिजिटल योग प्राप्त हो तो उसे 1 बनाने की कोशिश करते है। इसके लिए निम्नलिखित प्रक्रिया का पालन करते है।

(i) $\frac{N^r}{1}$ is equal to N^r

यदि हर का डिजिटल योग 1 हो तो अंश का अंकीय योग भागफल (उत्तर) के अंकीय योग के बराबर होता है।

Ex. $\frac{38982}{73} = 534$

HINTS:

Digit sum of LHS.

$\Rightarrow$ DS of $N^r = 3$ DS of $D^r = 1$

i.e., DS of LHS = $\frac{3}{1} = 3$

Digit sum of RHS = 5 + 3 + 4 = 3

(5 & 4 add up to 9, eliminate it)

(ii) $\frac{N^r}{2} = \frac{N^r \times 5}{2 \times 5} = \frac{N^r \times 5}{10} = \frac{N^r \times 5}{1} = 5 \times N^r.$

यदि हर का अंकीय योग 2 हो तो इसे 1 बनाने के लिए अंश तथा हर में 5 से गुणा कर देते है।

Ex. $\frac{2343}{11} = 213.$

HINTS:

DS of $D^r = 2$ $\therefore \frac{2343 \times 5}{11 \times 5}$

DS of $N^r = 6$, DS of $D^r = 1$

$\Rightarrow$ DS of LHS = $\frac{6}{1} = 6$,

DS of RHS = 6

(iii) $\frac{N^r}{4} = \frac{N^r \times 7}{4 \times 7} = \frac{N^r \times 7}{28} = N^r \times 7$

यदि हर का अंकीय योग 4 हो तो इसे 1 बनाने के लिए 7 से अंश तथा हर में गुणा कर देते है।

Ex. $\frac{12927}{31} = 417$

HINTS:

DS of $D^r = 4$ $\therefore \frac{12927 \times 7}{31 \times 7}$

DS of $N^r = 3$ & DS of $D^r = 4 \times 7 = 28 = 1$

$\Rightarrow$ DS of LHS = $\frac{3}{1} = 3$

DS of RHS = 4 + 1 + 7 = 12 = 3.

@Baka_260

(iv) $\frac{N^r}{5} = \frac{N^r \times 2}{5 \times 2} = \frac{N^r \times 2}{10} = N^r \times 2$

यदि हर का अंकीय योग 5 हो तो इसे 1 बनाने के लिए 2 से अंश तथा हर में गुणा कर देते है।

Ex. $\frac{15826}{41} = 386$

HINTS:

DS of $D^r = 5$ $\therefore$ $\frac{15826 \times 2}{41 \times 2}$

DS of $N^r = 8$, DS of $D^r = 1$

$\Rightarrow$ DS of LHS = $\frac{5}{1} = 8$

DS of RHS = 3 + 8 + 6 = 8

(v) $\frac{N^r}{7} = \frac{N^r \times 4}{7 \times 4} = \frac{N^r \times 4}{28} = N^r \times 4$

यदि हर का अंकीय योग 7 हो तो इसे 1 बनाने के लिए 4 से अंश तथा हर में गुणा कर देते है।

Ex. $\frac{31,928}{52} = 614$

HINTS:

DS of LHS

DS of $D^r = 5 + 2 = 7$ $\therefore$ $\frac{31,928 \times 4}{52 \times 4}$

DS of $N^r = 5 + 2 = 7$ & DS of $D^r = 1$

$\Rightarrow$ DS of LHS = $\frac{2}{1} = 2$

DS of RHS = 2

(iv) $\frac{N^r}{8} = \frac{N^r \times 8}{8 \times 8} = \frac{N^r \times 8}{64} = \frac{N^r \times 8}{10} = N^r \times 8.$

यदि हर का अंकीय योग 8 हो तो इसे 1 बनाने के लिए 8 से अंश तथा हर में गुणा कर देते है।

Ex. $\frac{25347}{71} = 357$

HINTS:

DS of $D^r = 8$ $\therefore$ $\frac{25347 \times 8}{71 \times 8}$

DS of $N^r = 6$, DS of $D^r = 1$

$\Rightarrow$ DS of LHS = $\frac{6}{1} = 6$

DS of RHS = 3 + 5 + 7 = 6

Note: यदि Numerator तथा Denominator के Digit sum किसी common factor से cancel out हो रहे हो तो उन्हें Cancel ना करें। बल्कि D^r को 1 बनाने की कोशिश करें।

Use of digital sum in some of the previous year TCS questions

(पूर्ववर्ती परीक्षाओं में TCS द्वारा पूछे गए प्रश्नों में डिजिटल योग का अनुप्रयोग)

Ex. (31% of 260) × ? = 12896

(a) 150 (b) 140

(c) 160 (d) 180

HINTS:

Operate on digit sum

$4 \times 8 \times ? = 5 \times ? = 8 \Rightarrow ? = \frac{8}{5}$

$? = \frac{8 \times 2}{5 \times 2} = 7$

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 7 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में सिर्फ विकल्प (c) का अंकीय योग 7 है।

Ex. 12.8% of 8800 – 16.4% of 5550 = 20% of ?

(a) 965 (b) 996

(c) 1004 (d) 1081

HINTS:

Operate on digit sum

$2 \times 7 - 2 \times 6 = 2 \times ?$

$5 - 3 = 2 \times ? \Rightarrow ? = \frac{2}{2}$

$? = \frac{2 \times 5}{2 \times 5} = 1.$

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 1 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में सिर्फ विकल्प (d) का अंकीय योग 1 है।

Ex. 53% of 120 + 25% of 862 = ?% of 500

(a) 92.50 (b) 55.82

(c) 63.68 (d) 38.89

HINTS:

Operate on digit sum

$8 \times 3 + 7 \times 7 = ? \times 5$

$\Rightarrow ? = \frac{10}{5}$ $\Rightarrow ? = \frac{10 \times 2}{5 \times 2} = 2$

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 2 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में सिर्फ विकल्प (b) का अंकीय योग 2 है।

Ex. $(1004)^2 - (998)^2 = ?$

(a) 11012 (b) 12012

(c) 22012 (d) 2212

HINTS:

Operate on digit sum

$5^2 - 8^2 = 25 - 64 = 7 - 1 = 6$

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 6 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में सिर्फ विकल्प (b) का अंकीय योग 6 है।

@Bakl_Ka_Rao Maths by Aditya Ranjan sir

Ex. Find x, if 30% of 400 + x% of 70 = 25% of 536
(a) 20 (b) 30
(c) 10 (d) 40
HINTS:
Operate on digit sum
$3 \times 4 + 7x = 7 \times 5$

$3 + 7x = 8 \Rightarrow x = \frac{5}{7}$

$x = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = 2$

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 2 होना चाहिए।
दिए गए विकल्पों में सिर्फ विकल्प (a) का अंकीय योग 2 है।

Ex. What value should come in place of question mark.
प्रश्न चिह्न के स्थान पर क्या मान आना चाहिए।

$9 + 13\frac{2}{3}\%$ of 3300 + 25% of 184 = 40% of?
(a) 1165 (b) 1265
(c) 1365 (d) 965
HINTS:
दूसरे term के D^r 3 को eliminate करने के लिए 3300 से इसे cancel out कर देते है।
9 + 41% of 1100 + 25% of 184 = 40% of ?
Operate on digit sum
$0 + 5 \times 2 + 7 \times 4 = 4 \times ?$

$? = \frac{2 \times 7}{4 \times 7} = 5$

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 5 होना चाहिए।
दिए गए विकल्पों में सिर्फ (b) का अंकीय योग 5 है।

Ex. What value should come in place of question mark.
प्रश्न चिह्न के स्थान पर क्या मान आना चाहिए।

$\frac{12\% \text{ of } 357000}{17\% \text{ of } 42} + \frac{15\% \text{ of } 58500}{13\% \text{ of } 45} = ?$
(a) 7600 (b) 7500
(c) 7800 (d) 9100
HINTS:
First term में D^r का DS 3 है इसलिए N^r में 12 तथा D^r में 42 में से 3 को Cancel Out करते है।
DS of N^r of first term = 6 & DS of D^r = 4

DS of first term = $\frac{6 \times 7}{4 \times 7} = 6$

Second term में D^r का DS 9 है इसलिए N^r में 58500 तथा D^r में 45 में से 9 को Cancel Out करते है।
DS of N^r of Second term = 3 & DS of D^r = 2

DS of Second term = $\frac{3 \times 5}{2 \times 5} = 6$

DS of complete sum = 6 + 6 = 3
In the given options only (b) has digit sum 3.

Ex. A certain sum amounts to Rs. 4205.55 at 15% p.a. in $2\frac{2}{5}$ years, interest compounded yearly. The sum is:

एक निश्चित राशि 15% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से $2\frac{2}{5}$ वर्षों में 4205.55 रूपये हो जाती है, वह राशि ज्ञात कीजिए।
(a) Rs.3000 (b) Rs.3500
(c) Rs.2700 (d) Rs.3200
HINTS:
Rate of interest for 1st and 2nd year, = 15%

Rate of interest for 3rd year = $\frac{2}{5} \times 15 = 6\%$

Now,

$P\left(\frac{115}{100} \times \frac{115}{100} \times \frac{106}{100}\right) = 4205.55$

DS of LHS
$P(7 \times 7 \times 7) = P \times 1$
DS of RHS = 3
∴ DS of P = 3
Only option (a) satisfied.

Ex. If a = 102, then find the value of $a(a^2 - 3a + 3)$.
यदि a = 102 हो, तो $a(a^2 - 3a + 3)$ का मान बताइए।
(a) 1030302 (b) 1010101
(c) 1000002 (d) 9999992
HINTS:
Digit sum of a = 102 = 3.
operate on digit sum
$3(9 - 9 + 3) = 9$
Only option (a) has digit sum as 9.

Ex. If P = 99, then the value of $P(P^2 + 3P + 3)$ is:
यदि P = 99, तो $P(P^2 + 3P + 3)$ का मान है:
(a) 998889 (b) 999999
(c) 988899 (d) 989898
HINTS:
Digit sum of P = 99 = 9 or 0
$P(P^2 + 3P + 3)$ is a multiple of 9.
The digit sum of this expression will be 9.
Only option (b) satisfied.

Ex. If $A = \left(\frac{1}{0.4}\right) + \left(\frac{1}{0.04}\right) + \left(\frac{1}{0.004}\right) + \ldots$ upto 8 terms, then what is the value of A?

यदि $A = \left(\frac{1}{0.4}\right) + \left(\frac{1}{0.04}\right) + \left(\frac{1}{0.004}\right) + \ldots$ upto 8 पदों तक, A का मान क्या है?
(a) 27272727.5 (b) 25252525.5
(c) 77777777.5 (d) 55555555.5

@Baka_260 Aditya Ranjan sir

HINTS:

If we make the digit sum of denominator of each term 1.

We have to multiply them by 7. Thus we will get 8 times 7 in complete expression.

Digit sum = 8 × 7 = 56 = 11 = 2.

Only option (c) satisfied

Ex. From his monthly income X spends 24% on house hold expenses, 16% on entertainment, 28% on education. Out of remaining he donates 72% money and left with an amount of 2403.52. Find his monthly income?

अपनी मासिक आय से X घरेलू खर्चों पर 24%, मनोरंजन पर 16%, शिक्षा पर 28% खर्च करता है। शेष में से वह 72% धन दान करता है और 2403.52 की राशि के साथ छोड़ देता है। उसकी मासिक आय ज्ञात कीजिये?

(a) 24725 (b) 26825

(c) 25625 (d) 29325

HINTS:

$$X \times \frac{32}{100} \times \frac{28}{100} = 2403.52$$

DS of LHS = X × 5 × 1 = X × 5

DS of RHS = 7

$$\text{DS of } X = \frac{7 \times 2}{5 \times 2} = 5$$

Only option (b) satisfied

Ex. During the first year, the population of a town increased by 12%.The next year, due to some contagious disease, it decreased by 8%. At the end of the second year, the population was 64,400. Find the population of the town at beginning of the first year.

पहले वर्ष के दौरान, एक कस्बे की जनसंख्या में 12% की वृद्धि हुई। अगले वर्ष, किसी संक्रामक रोग के कारण, इसमें 8% की कमी आई। दूसरे वर्ष के अंत में, जनसंख्या 64,400 थी। पहले वर्ष की शुरुआत में कस्बे की जनसंख्या कितनी थी?

(a) 50,000 (b) 54,750

(c) 62,500 (d) 50,500

HINTS:

$$x \times \frac{112}{100} \times \frac{92}{100} = 64{,}400$$

DS of LHS = x × 4 × 2 = x × 8

DS of RHS = 5

$$\text{DS of } x = \frac{5 \times 8}{8 \times 8} = 4$$

Only option (c) satisfied.

Ex. A manufactured item of cost ₹12,500, sold at 10% profit. The supplier the sold at a 5.5% profit to the shopkeeper. The shopkeeper marks it at ₹2,393.75 higher than his cost price and allowed a 10% discount to the customer. Find the profit earned by the shopkeeper.

12,500 रुपये की लागत की एक निर्मित वस्तु, 10% लाभ पर बेची गई। वही आपूर्तिकर्ता दुकानदार को 5.5% लाभ पर देता है। दुकानदार ने इसे अपने लागत मूल्य से 2,393.75 रुपये अधिक अंकित किया और ग्राहक को 10% की छूट दी। दुकानदार द्वारा अर्जित लाभ ज्ञात कीजिए।

(a) 653.75 (b) 693.75

(c) 703.75 (d) 600.75

HINTS:

CP for the shopkeeper

$$= \left[12{,}500 \times \frac{11}{10} \times \frac{105.5}{100}\right]$$

DS of CP = 5

SP for the shopkeeper

$$\left[12{,}500 \times \frac{11}{10} \times \frac{105.5}{100} + 2393.75\right] \times \frac{9}{10}$$

DS of SP = 9

(Digit sum of any number multiplied by 9 is 9)

Profit = SP – CP = 9 – 5 = 4

Only option (c) satisfied.

Ex. The average score in an English exam of a class of 45 students in a coaching centre is 52. A group of 6 boys having an average score of 40 leave the class and another group of eight boys having an average score of 43 join the class. What is the new average score of the class?

एक कोचिंग सेंटर में 45 विद्यार्थियों की एक कक्षा के अंग्रेजी परीक्षा के अंकों का औसत 52 है। 40 अंकों के औसत वाले 6 लड़कों का एक समूह कक्षा छोड़ देता है और 43 अंकों के औसत वाले आठ लड़कों का एक अन्य समूह कक्षा उसमें शामिल हो जाता है। कक्षा के अंकों का नया औसत क्या होगा?

(a) 48 (b) 53

(c) 49.5 (d) 52

HINTS:

New Average

$$= \frac{45 \times 52 + (8 \times 43 - 6 \times 40)}{45 - 6 + 8}$$

Operate on digit sum

$$\frac{9 + 2 - 6}{9 - 6 + 8} = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = 7$$

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 7 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में सिर्फ (d) का अंकीय योग 7 है।

Ex. The value of/का मान ज्ञात करें।

$(1018)^2 - 1019 \times 1017 + 1015 \times 1012 - 1016 \times 1011$

(a) 1 (b) 4

(c) 3 (d) 5

HINTS:

Operate on digit sum

1 – 9/0 + 1 – 6 = –4 + 9 = 5

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 5 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में सिर्फ (d) सही है।

Ex. X and Y earn an average income of Rs. 72000 per month, out of which they saved an average amount of Rs. 38800 per month, such that X saved Rs. 5600 less than Y. If the expenditure of X is 55% of his income, then find the percentage expenditure of Y.

X और Y प्रति माह 72000 रुपये की औसत आय अर्जित करते है, जिसमे से वह प्रति माह औसतन 38800 रूपये की बचत करते है, इस प्रकार X ने Y की तुलना में 5600 रूपये कम कि बचत करता है। यदि X का व्यय उसकी आय का 55% है, तो Y का प्रतिशत व्यय ज्ञात कीजिए।

(a) 20% (b) 25%
(c) 30% (d) 35%

HINTS:

X : Y
(k – 5600) : k

$k + k - 5600 = 77600 \Rightarrow k = 41600$
Savings of X = 41600 – 5600 = Rs.36000
45% = 36000
income % X = Rs. 80,000
income % Y = 144000 – 80,000 = 64000
Expenditure of Y = 64000 – 41600 = 22400

$= \frac{22400}{64000} \times 100 = 35\%$

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 8 होना चाहिए।
दिए गए विकल्पों में सिर्फ (d) का अंकीय योग 8 है।

Ex. The compound interest on a certain sum of money in one year is Rs.6860 and on second year is Rs.7840. Find compound interest in fourth year.

किसी निश्चित धनराशि पर 1 वर्ष बाद चक्रवृद्धि ब्याज 6860 रुपये है। दूसरे वर्ष 7840 रुपये है, चौथे वर्ष चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

(a) Rs.10240 (b) Rs.11340
(c) Rs.10780 (d) Rs.9850

HINTS:

$R = \frac{(7840 - 6860)}{6860} \times 100 = 14\frac{2}{7}\%$

4th year CI $= 7840 \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{7}$

Digit sum of above multiplication is 7. In the given options, (a) & (c) have digit sum 7. But the product is also a multiple of 8, hence option (c) eliminated.

Ex. If the average marks of $\frac{1}{5}$ of a class is 77% and that of $\frac{1}{4}$ of the class is 85% and the average marks of the rest of the class is 52%. Find the average marks of the whole class?

किसी कक्षा के $\frac{1}{5}$ भाग का औसत अंक 77% और कक्षा के $\frac{1}{4}$ भाग का औसत अंक 85% तथा शेष कक्षा का औसत अंक 52% है। संपूर्ण कक्षा का औसत अंक ज्ञात कीजिए।

(a) 57.75% (b) 65.25%
(c) 68.55% (d) 43.50%

HINTS:

Let total students be 100

$\text{Average} = \frac{(20 \times 77) + (85 \times 25) + (52 \times 55)}{100}$

Operate on digit sum

$2 \times 5 + 4 \times 7 + 7 \times 1 = 1 + 1 + 7 = 9$

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 9 होना चाहिए।
दिए गए विकल्पों में सिर्फ (b) का अंकीय योग 9 है।

Ex. The difference between C.I. and S.I. on a certain sum of money at 16% per annum compounded annually in 3 years is Rs 3792. Then find the principal.

एक निश्चित राशि पर 16% प्रति वर्ष चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्षों का C.I. और S.I. के बीच का अंतर 3792 रुपये है। तो मूलधन ज्ञात करें।

(a) Rs.31250 (b) Rs.62500
(c) Rs.39062.50 (d) Rs.46875

HINTS: We know,

$\text{C.I - S.I.} = P\left(\frac{R}{100}\right)^2 \times \frac{300 + R}{100}$

$\Rightarrow 3792 = P\left(\frac{16}{100}\right)^2 \times \frac{316}{100}$

Operate on digit sum

$3 = P \times 4 \times 1 \Rightarrow P = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = 3$

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 3 होना चाहिए।
दिए गए विकल्पों में सिर्फ (d) का अंकीय योग 3 है।

Ex. Find the mean height of the persons from the following data.

निम्नलिखित आँकड़ों से व्यक्तियों की माध्य ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Height (cm)	Number of person
120	3
130	4
140	5
150	6
160	2

(a) 150 cm (b) 145 cm
(c) 160 cm (d) 140 cm

HINTS:

$\text{Mean} = \frac{(3 \times 120) + (4 \times 130) + (5 \times 140) + (6 \times 150) + (2 \times 160)}{20}$

Operate on digit sum

$\frac{0 + 7 + 7 + 0 + 5}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = 5$

अर्थात् answer (उत्तर) का अंकीय योग 5 होना चाहिए।
दिए गए विकल्पों में सिर्फ (d) का अंकीय योग 5 है।

@Baka260

5. Perfect Square/Square Root/पूर्ण वर्ग/वर्गमूल

The digit sum of the square root as multiplied by itself should equal to the digit-sum of the square.

वर्गमूल के अंकों के योग को स्वयं से गुणा करने पर वर्ग के अंक-योग के बराबर होना चाहिए।

Ex. Verify whether 23 is the square root of 529.

सत्यापित करें कि क्या 23, 529 का वर्गमूल है।

HINTS:

The digit sum of 23 is 5 and when 5 is multiplied by itself the answer is 25. The digit sum of 25 is 7 and the digit-sum of 529 is also 7.

Note: (i) A number cannot be a perfect square if its digit sum is other than 1, 4, 7 or 9.

कोई संख्या पूर्ण वर्ग नहीं हो सकती यदि उसका अंकीय योग 1, 4, 7 या 9 के अलावा अन्य कुछ भी हो।

(ii) A number cannot be a perfect square if its unit digit is other than 1, 4, 5, 6 or 9.

कोई संख्या पूर्ण वर्ग नहीं हो सकती यदि उसका इकाई अंक 1, 4, 5, 6 या 9 के अलावा अन्य कुछ भी हो।

Ex. Which one of the following is a perfect square?

निम्नलिखित में से कौन सा एक पूर्ण वर्ग है?

(a) 6250.49 (b) 1250.49
(c) 5768.28 (d) 1354.24

HINTS:

Option (c) का इकाई अंक 8 है इसलिए यह पूर्ण वर्ग नहीं हो सकता है। Option (a), (b) & (c) के अंकीय योग क्रमशः 8, 3 तथा 1 है। इसलिए Option (d) पूर्ण वर्ग है।

Ex. Which one of the following is a perfect square?

निम्नलिखित में से कौन सा एक पूर्ण वर्ग है?

(a) 2361.96 (b) 2758.28
(c) 7256.84 (d) 6250.49

Option (b) का इकाई अंक 8 है इसलिए यह पूर्ण वर्ग नहीं हो सकता है। Option (a), (c) & (d) के अंकीय योग क्रमशः 9, 5 तथा 8 है। इसलिए Option (a) पूर्ण वर्ग है।

Ex. The sum of three consecutive odd natural number is 375. Find the square of the smallest of these number is?

तीन लगातार विषम प्राकृतिक संख्याओं का योग 375 है। इनमें से सबसे छोटी संख्या का वर्ग ज्ञात कीजिए?

(a) 15129 (b) 1309
(c) 15128 (d) 15245

HINTS:

Let the number be $x-2, x, x+2$

$\Rightarrow$ Sum $= 3x = 375 \Rightarrow x = 125$

Hence, Smallest number $= x-2 = 125-2 = 123$

We have to find the value of 123^2

Digit sum of $(123)^2 = (1+2+3)^2 = 9$

दिए गए विकल्पों में (a) का ही digit sum 9 है।

6. Perfect Cube/Cube Root/पूर्ण घन/घनमूल

The digit sum of the cube root when multiplied by itself should equal to the digit-sum of the cube.

घनमूल के अंकों का योग स्वयं से गुणा करने पर घन के अंक-योग के बराबर होना चाहिए।

Ex. Verify whether 2197 is the cube of 13.

सत्यापित करें कि क्या 2197, 13 का घन है।

HINTS:

The digit sum of 13 is 4. 4 multiplied by itself and again by itself is 64. The digit-sum of 64 is 1 and the digit-sum of 2197 is also 1.

Ex. The cube root of 3375 equal to:

3375 का घनमूल बराबर है:

(a) 35 (b) 25
(c) 55 (d) 15

HINTS:

Digit sum of 3375 = 9

दिए गए विकल्पो में से हम यह check करना होगा की कौन से विकल्प के अंकीय योग के घन का अंकीय योग 9 है। विकल्प (d) का अंकीय योग 6 है जिसके घन 216 का अंकीय योग भी 9 है अतः विकल्प (d) सही उत्तर है।

Ex. $(14)^3 = ?$

(a) 2544 (b) 2644
(c) 2744 (d) 2844

HINTS:

Digit sum of $(14)^3 = (1+4)^3 = 8$

दिए गए विकल्पो में सिर्फ विकल्प (c) का अंकीय योग 8 है अतः यही सही उत्तर है।

Ex. Find the value of the following expression.

निम्नलिखित व्यंजक का मान ज्ञात करें।

$12^3 + (-8)^3 + (-4)^3$

(a) 952 (b) 1152
(c) 1052 (d) 852

HINTS:

Digit sum of $[12^3 + (-8)^3 + (-4)^3] = 9 - 8 - 1 = 0/9$

दिए गए विकल्पो में सिर्फ विकल्प (d) का अंकीय योग 9 है अतः यही सही उत्तर है।

Digital sum concept मे निपुणता हासिल करने के लिए आपकों इसे अधिक से अधिक प्रश्नों में Apply करने की कोशिश करनी होगी। जिसके बाद आप जटिल Calculations से बचते हुए Wrong options को eliminate करके सही उत्तर तक बिना समय गवायें पहुँच सकते है।

Important Observations/महत्वपूर्ण अवलोकन

While solving multiple choice questions. In the final step of calculations sometimes one eliminate the wrong options by following some of the procedures given below.

बहुविकल्पीय प्रश्नों को हल करते समय गणना के अंतिम चरण में कभी-कभी नीचे दी गई कुछ प्रक्रियाओं का पालन करके गलत विकल्पों को हटा जा जाता है।

Digital sum के बाद हम आपको एक और Tool, 'Applicability of divisibility rule of prime number' देने जा रहें है जिसका उपयोग करते हुए आप Wrong options को elmininate करके सही उत्तर तक पहुच सकते है।

जब कभी भी किसी Multiplication Process में कोई Prime number अथवा Prime Number का Multiple दिखे तो गुणनफल भी उसी Prime number का Multiple होगा। दिए गए options में उस Prime Number की divisibility check करें।

Ex. An arc of length 23.1 cm subtends an 18° angle at the centre. What is the area of the circle?
23.1 cm लंबा एक चाप वृत्त के केंद्र पर 18° का कोण अंतरित करता है। उस वृत्त का क्षेत्रफल कितना है?

[Use $\pi = \frac{22}{7}$]

(a) 16978.50 cm²
(b) 16988.50 cm²
(c) 16878.50 cm²
(d) 16798.50 cm²

HINTS:

Area of circle = πr^2

$\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करने का अर्थ है कि अंतिम उत्तर prime number 11 से divisible होगा।

दिए गए विकल्पों में (a) ही 11 से divisible है।

Ex. On the marked price of Rs.1,250 of an article, three successive discounts of 5%, 15% and 20% are offered. What will be the selling price (in Rs.) after all discounts?
किसी वस्तु के अंकित मूल्य 1,250 रुपये पर, 5%, 15% और 20% की क्रमिक छूट दी जाती है। सभी छूटों के बाद विक्रय मूल्य (रुपये में) ज्ञात करें।

(a) 1,000
(b) 807.50
(c) 975.75
(d) 950.25

HINTS:

$SP = 1250 \times \frac{19}{20} \times \frac{17}{20} \times \frac{4}{5} = Rs.807.5$

चूंकि 17 तथा 19 prime number है इसलिए गुणनफल भी 17 अथवा 19 से divisible होगा। दिए गए विकल्पों में से (b) ही 17 अथवा 19 से divisible है।

Ex. In an assembly election, a candidate got 60% of the total valid votes. 2% of the total votes were declared invalid. If the total number of voters is 1,50,000, then find the number of valid votes polled in favor of that candidate.
एक विधानसभा चुनाव में, एक उम्मीदवार को कुल वैध मतों का 60% प्राप्त हुआ। कुल मतों का 2% को अवैध घोषित किया गया। यदि मतदाताओं की कुल संख्या 1,50,000 है तो उस उम्मीदवार के पक्ष में डाले गए वैध मतों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(a) 90,000
(b) 78,000
(c) 86,400
(d) 88,200

HINTS:

Required no. of votes

$= 1,50,000 \times \frac{98}{100} \times \frac{3}{5}$

चूंकि 98, 7 का multiple है और यह D^r से cancel out भी नहीं होगा इसलिए गुणनफल भी 7 का multiple अथवा 7 से divisible होगा। दिए गए विकल्पों में से (d) ही 7 से divisible है।

Ex. A hall of 35m × 25m × 5m is to be painted. It has 3 windows on its three walls of 1.7m × 1.2m. The cost of the painting of the wall is Rs. 12 per square meter the cost of the painting of the ceiling is Rs. 18 per square meter and the cost of the painting of the window is Rs. 15 per square meter. Find the total cost of the painting of the hall.
35 मी × 25 मी × 5 मी आयाम के एक हॉल की रंगाई की जानी है। इसमें तीन दीवारों पर 1.7 मी × 1.2 मी आयाम की 3 खिड़कियां हैं। दीवार की रंगाई की लागत 12 रु. प्रति वर्ग मीटर है, छत की रंगाई की लागत 18 रु. प्रति वर्ग मीटर है और खिड़की की रंगाई की लागत 15 रु. प्रति वर्ग मीटर है। हॉल की रंगाई की कुल लागत ज्ञात कीजिए।

(a) Rs. 24998.06
(b) Rs. 23968.60
(c) Rs. 22978.60
(d) Rs. 22968.36

HINTS:

Total cost of the painting of the hall =
Area of walls × 12 + area of ceiling × 18 + area of window × 15

12, 18 तथा 15 तीनों ही prime number 3 के multiple है अर्थात् अंतिम उत्तर भी 3 से divisible होगा। दिए गए विकल्पों में (d) ही 3 से divisible है।

Ex. What amount a man would have received on a principal of ₹ 7, 500 after two years at simple Interest at the rate of 7 percent per annum?
एक व्यक्ति को 7500 रूपये के मूलधन पर 2 वर्ष बाद 7 प्रतिशत वार्षिक साधारण ब्याज दर से कितनी धनराशि प्राप्त होगी?

(a) Rs. 8,400
(b) Rs. 8,550
(c) Rs. 7,600
(d) Rs. 7,400

HINTS:

इस प्रश्न में हमें 114% का मान ज्ञात करना है। 114 अर्थात् 19 × 6, सही उत्तर 19 का एक multiple होगा। option (b) तथा (c) दोनों ही 19 के multiple है परन्तु सही उत्तर 6 अथवा 3 का भी multiple होना चाहिए। option (b) ही 3 का multiple है।

अब हम आपको option elimination में उपयोगी एक और Tool, 'Applicability of unit digit' के बारे में बता रहें है। जिसका उपयोग करते हुए आप Wrong options को elmininate करके सही उत्तर तक पहुच सकते है।

यदि दिए गए विकल्पों के unit digit अलग-अलग हो तो final calculation करते समय हमें unit digit पर ही operate करना चाहिए।

Ex. The cube of the difference between two given natural numbers is 1728, while the product of these two given numbers is 108. Find the sum of the cubes of these two given numbers.
दी गई दो प्राकृतिक संख्याओं के अंतर का घन 1728 है, जबकि दी गई इन दोनों संख्याओं का गुणनफल 108 है। दी गई इन दोनों संख्याओं के घनों का योग ज्ञात करें।

(a) 6048
(b) 5616
(c) 6024
(d) 5832

HINTS:

$a - b = 12$ and $a.b = 108 \Rightarrow a = 18, b = 6$

We have to find the value of $(18^3 + 6^3)$

Here, no need of doing complete multiplication, just operate on unit digit (2 + 6 = 8), only option (a) satisfied.

Ex. Marked price of an article is Rs. 28000. It can be sold at one of the following ways:

एक वस्तु का अंकित मूल्य रुपये 28000 है। इसे निम्नलिखित में से किसी एक तरीके से बेचा जा सकता है:

Way A : A single discount of 24 percent.

तरीका A : 24 प्रतिशत की एकल छूट पर

Way B : Two successive discounts of 16 percent and 10 percent.

तरीका B : 16 प्रतिशत तथा 10 प्रतिशत की दो क्रमिक छूट पर

Which way will have lowest selling price and what will be the value of it?

किस तरीके में विक्रय मूल्य न्यूनतम होगा तथा उसका मान क्या है?

(a) Way B, Rs.21168 (b) Way B, Rs.21280

(c) Way A, Rs.21168 (d) Way A, Rs.21280

HINTS:

WAY A:

Discount = 24%

WAY B:

$$\text{Discount} = \left(16+10-\frac{16\times10}{100}\right)\% = 24.4\%$$

Lowest selling price means highest discount.

∴ WAY B → Lowest S.P.

$$\text{S.P.} = 28000 \times \frac{75.6}{100}$$

Don't multiply, just check the unit digits of option (a) and (b). Only option (a) has unit digit 8.

Ex. If the volume of a sphere is 24,416.64 cm³, find its surface area (take π = 3.14) correct to two places of decimal.

यदि एक गोले का आयतन 24,416.64 cm³ है, तो इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो दशमलव के दो स्थानों तक सही हो। (π = 3.14 लीजिए)

(a) 3069.55 cm² (b) 4069.44 cm²

(c) 5069.66 cm² (d) 6069.67 cm²

HINTS:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 24416.64 \Rightarrow r^3 = 5832 \Rightarrow r = 18$$

Now, $4\pi r^2 = 4 \times 3.14 \times 18 \times 18$

Don't multiply, just operate on unit digits which gives 4 as unit digit of answer. Only option (b) has unit digit 4.

Ex. 4 women and 7 men earn a total of Rs. 11,480 in 7 days, while 10 women and 17 men earn a total of Rs. 36,360 in 9 days. How much will 11 women and 9 men together earn (in Rs.) in 13 days?

4 महिलाएं और 7 पुरुष 7 दिन में कुल 11480 कमाते हैं, जबकि 10 महिलाएं और 17 पुरुष 9 दिन में कुल 36360 रुपये कमाते हैं। 11 महिलाएं और 9 पुरुष मिलकर 13 दिन में कितना (रु. में) कमाएंगे ?

(a) 42770 (b) 42640

(c) 42510 (d) 42900

HINTS:

$$\frac{(4w+7m)\times7}{11480} = \frac{(10w+17m)\times9}{36360}$$

after solving we get, $\frac{m}{w} = \frac{3}{5}$

$$\frac{(4w+7m)\times7}{11480} = \frac{(11w+9m)\times13}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{41\times7}{11480} = \frac{82\times13}{x} \Rightarrow x = 40\times82\times13 = 42640$$

In the last step don't multiply, just operate on unit digits which gives 4 as non-zero number from right. Only option (b) satisfied.

★★★★★

@Baka_260

GEOMETRY

ज्यामिति

02

We have divided the geometry into five sections, which are as follows:

हमने ज्यामिति को पाँच भागों में विभाजित किया है, जो इस प्रकार हैं:

- Lines and Angle/रेखा और कोण
- Triangle/त्रिभुज
- Quadrilateral/चतुर्भुज
- Polygon/बहुभुज
- Circle/वृत्त

Lines & Angle (रेखाएँ तथा कोण)

1. **Point:** A point is a circle of zero radius which determines a location. It is usually denoted by a capital letter.

बिन्दु: बिंदु शून्य त्रिज्या का एक वृत्त है जो एक स्थान निर्धारित करता है। इसे आमतौर पर बड़े अक्षर से दर्शाया जाता है।

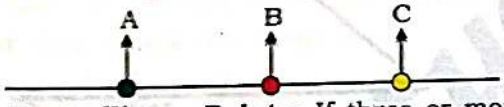
Types of Point (बिन्दु के प्रकार)

(a) **Collinear Points:** If three or more points situated on a straight line, these points are called collinear points.

संरेख बिन्दु : यदि तीन या तीन से अधिक बिन्दु किसी एक सीधी रेखा में स्थित हो तो ये बिन्दु संरेख बिन्दु कहलाते हैं।

Example : Points A, B, and C are collinear.

उदाहरण : बिन्दु A, B, और C संरेख हैं।



(b) **Non-collinear Points:** If three or more points are not situated on a straight line, these points are called non-collinear points.

असंरेख बिन्दु : यदि तीन या तीन से अधिक बिन्दु किसी एक सीधी रेखा में स्थित नहीं हो तो ये बिन्दु असंरेख बिन्दु कहलाते हैं।

2. **Line:** A line is made up of an infinite number of points and it has only length i.e., it does not has any thickness (or width). A line is endless so, it can be extended in both directions.

रेखा: अनंत संख्या में बिन्दुओं से मिलकर बनी होती है और इसमें सिर्फ लंबाई होती है। अर्थात् इसकी कोई मोटाई (चौड़ाई) नहीं होती। रेखा का कोई अंत बिन्दु नहीं होता, इसलिए इसे दोनों दिशाओं में बढ़ाया जा सकता है।

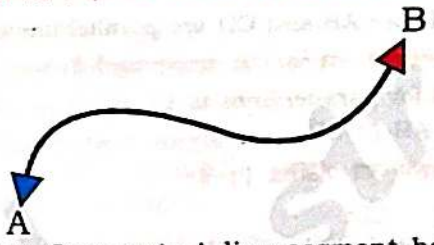
(a) **Straight line:** A line which does not change its direction at any point is called a straight line.

सीधी रेखा : ऐसी रेखा जो किसी भी बिन्दु पर अपनी दिशा नहीं बदलती सीधी रेखा कहलाती है।



(b) **Curve line:** A line which changes its direction is called a curved line.

वक्र रेखा : ऐसी रेखा जो अपनी दिशा बदलती हो, वक्र रेखा कहलाती है।



(c) **Line Segment:** A line segment has two end points; generally line segment is called line.

रेखाखंड : रेखाखंड के दो अंत बिन्दु होते हैं; साधारणतया रेखाखंड को रेखा बोला जाता है।



Types of Lines (रेखाओं के प्रकार)

The lines are basically of five types-

रेखाएँ मूलत: पाँच प्रकार की होती हैं-

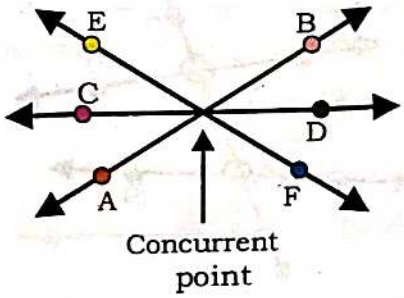
(i) **Intersecting Lines:** If two or more lines intersect each other, then they are called intersecting lines. In the figure AB and CD are intersecting lines.

प्रतिच्छेदी रेखाएँ : यदि दो या दो से अधिक रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तो वे प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं। दिये गये चित्र में AB और CD प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं।



(ii) **Concurrent Lines :** If three or more lines pass through a point, then they are called concurrent lines and the point through which these all lines pass is called point of concurrent.

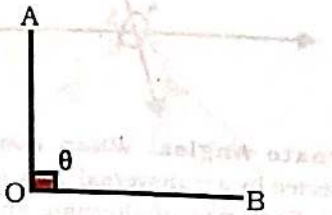
संगामी रेखाएँ : यदि तीन या तीन से अधिक रेखाएँ एक ही बिन्दु से होकर गुजरती है तो वे संगामी रेखाएँ कहलाती हैं और जिस बिन्दु से होकर ये सभी रेखाएँ गुजरती है उसे समवर्ती बिन्दु कहते हैं।



@Baka 2.0

(ii) Right Angle : If measure of an angle is equal to 90°, then it is a right angle.

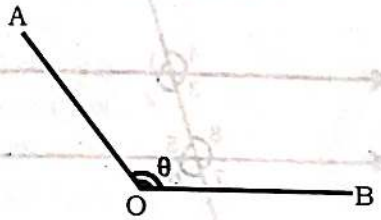
समकोण : यदि किसी कोण की माप 90° के बराबर हो तो यह समकोण होता है।



θ = 90° (∠AOB is a right angle)

(iii) **Obtuse Angle:** If measure of an angle is more than 90° but less than 180°, then it is a obtuse angle.

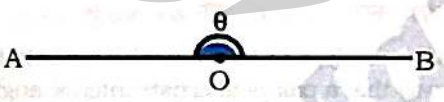
अधिक कोण : यदि किसी कोण की माप 90° से अधिक परंतु 180° से कम हो, तो वह अधिक कोण कहलाता है।



90° < θ < 180° (∠AOB is an obtuse angle)

(iv) **Straight Angle:** If measure of an angle is equal to 180°, then it is a straight angle.

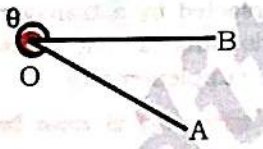
ऋजु कोण : यदि किसी कोण की माप 180° के बराबर हो तो यह ऋजु कोण कहलाता है।



θ = 180° ("AOB is a straight angle)

(v) **Reflex Angle:** If measure of an angle is more than 180° but less than 360°, then it is a reflex angle.

वृहत्त कोण : यदि किसी कोण की माप 180° से अधिक परंतु 360° से कम हो तो यह वृहत्त कोण कहलाता है।



180° < θ < 360° (∠AOB is a reflex angle)

a. Pair of Angles (कोणों का युग्म)

(i) **Adjacent Angles:** Two angles are called adjacent angles if:

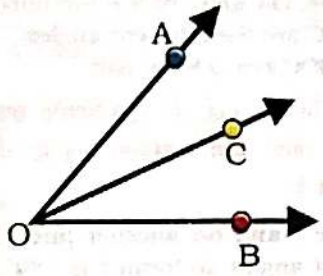
आसन्न कोण : दो कोण आसन्न कहे जाते हैं यदि

- They have the same vertex,

  उनके शीर्ष समान हों
- They have a common arm,

  उनकी एक भुजा उभयनिष्ठ हो
- Uncommon arms are on either side of the common arm.

  गैर-उभयनिष्ठ भुजाएँ, उभयनिष्ठ भुजा के दोनों ओर हों।

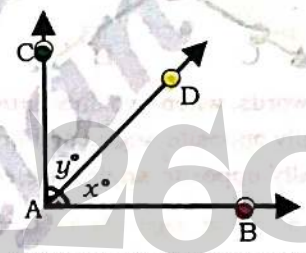


- In the figure, ∠AOC and ∠BOC have a common vertex O. Also, they have a common arm OC and the distinct arms OA and OB, lie on the opposite side of the line OC.

  दिये गये चित्र में, ∠AOC और ∠BOC का एक उभनिष्ठ शीर्ष O है। उनकी एक उभयनिष्ठ भुजा OC और गैर-उभयनिष्ठ भुजा OA और OB भी रेखा OC के विपरीत दिशाओं में स्थित है।

(ii) **Complementary Angles :** If sum of two angles is equal to 90°, then the two angles are called complementary angles.

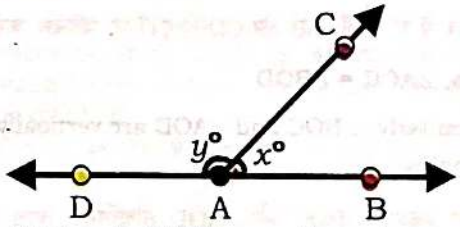
सम्पूरक कोण : यदि दो कोणों का योग 90° हो, तो ये दोनों कोण सम्पूरक कोण कहलाते हैं।



∠BAD and ∠DAC are complementary angles, if $x° + y° = 90°$

(iii) **Supplementary Angles:** If sum of two angles is equal to 180°, then the two angles are called supplementary angle.

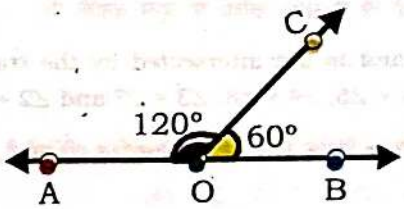
पूरक कोण : यदि दो कोणों का योग 180° हो, तो ये दोनों कोण पूरक कोण कहलाते हैं।



∠BAC and ∠DAC is supplementary angles, if $x° + y° = 180°$

(iv) **Linear Pair of Angles:** Two adjacent angles are said to form a linear pair of angles, if their uncommon arms are two opposite line.

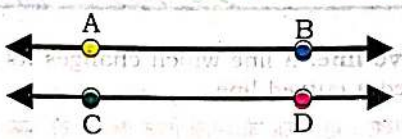
कोणों का रैखिक युग्म: दो आसन्न कोण, कोणों का रैखिक युग्म तब बनाते हैं जब उसकी दो असमान भुजाएँ दो विपरीत रेखाएं हों।



@BaKa_260

(iii) **Parallel Lines :** Two straight lines are parallel if they lie in the same plane and do not intersect even if they produced infinitely. Perpendicular distances between two parallel lines are always same at all places.

समांतर रेखाएँ : दो सीधी रेखाएँ समांतर होंगी यदि वे समान तल में स्थित हों और अनंत तक बढ़ाने पर भी एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित न करे। दो समांतर रेखाओ के बीच की लंबवत दूरी सभी जगह समान होती है।



In the figure AB and CD are parallel lines.

दिये गये चित्र में AB और CD समांतर रेखाएँ हैं।

Symbol for parallel lines is ||.

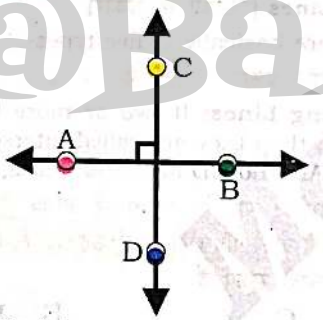
Hence, AB || CD.

समांतर रेखाओं का प्रतिचिह्न || है।

अत: AB || CD.

(iv) **Perpendicular Lines :** If two lines intersect at right angles, then two lines are called perpendicular lines. In the following figure AB and CD are perpendicular lines.

लंबवत रेखाएँ : यदि दो रेखाएँ समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं तो दोनों रेखाएँ लंबवत रेखाएँ कहलाती हैं। नीचे दिये गये चित्र में AB और CD में लंबवत रेखाएँ हैं।

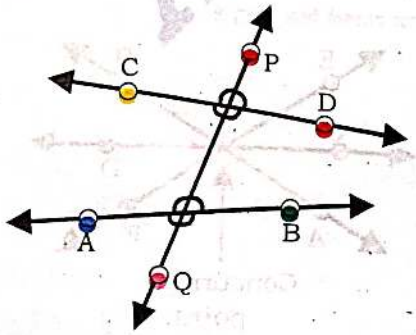


Symbolically it is represented as AB ⊥ CD or we can also say that CD ⊥ AB.

संकेत रूप में इसे AB ⊥ CD द्वारा प्रदर्शित करते हैं अथवा हम कह सकते हैं कि CD ⊥ AB है।

(v) **Transversal Lines :** A line which intersects two or more given lines at distinct points is called a transversal of the given lines.

तिर्यक रेखाएँ : वह रेखा जो दो या दो से अधिक दी गई रेखाओं को अलग-अलग बिंदुओं पर काटती है, दी गई रेखाओं की तिर्यक रेखा कहलाती है।



In figure straight lines AB and CD are intersected by a transversal line PQ.

दिये गये चित्र में सीधी रेखाएँ AB और CD तिर्यक रेखा PQ द्वारा प्रतिच्छेदित की गई हैं।

IMPORTANT POINTS OF LINES

- There is one and only one line passing through two distinct points.

  दो अलग बिन्दुओं से होकर सिर्फ और सिर्फ एक रेखा गुजरती है।
- Two or more lines are said to be coplanar if they lie in the same plane, otherwise they are said to be non-coplanar.

  दो या दो से अधिक रेखाएँ समतलीय कहलाती हैं यदि वे एक ही तल में हों, अन्यथा वे असमतलीय कहलाती हैं।
- The intersection of two planes is a line.

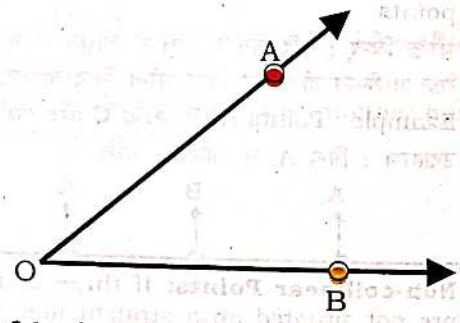
  दो तलों का प्रतिच्छेद एक रेखा होती है।

3. **Angles :** An angle is the union of two non-collinear line with a common initial point. The two line forming an angle are called arms of the angle and the common initial point is called the vertex of the angle.

कोण : जब दो रेखाएं एक ही उभयनिष्ठ बिन्दु से प्रारंभ होती हैं तो एक कोण बनता है। जो दो रेखाएं कोण बनाती है उन्हें कोण की भुजा कहते हैं और उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिन्दु शीर्ष कहलाता है।

The angle AOB denoted by ∠AOB, is formed by line OA and OB and point O is the "vertex" of the angle.

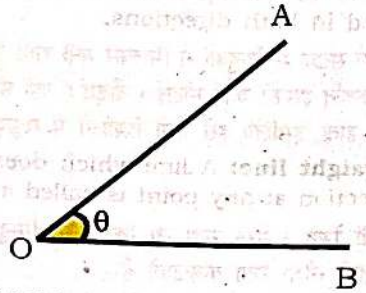
रेखाएं OA और OB द्वारा बना हुआ कोण AOB को ∠AOB द्वारा प्रदर्शित किया जाता है और बिन्दु O कोण का शीर्ष है।



Types of Angles (कोण के प्रकार)

(i) **Acute Angle:** If the measure of an angle is less than 90°, it is an acute angle.

न्यून कोण : यदि किसी कोण की माप 90° से कम हो तो यह न्यून कोण होता है।



0° < θ < 90° (∠AOB is an acute angle)

@Baka_260

- In figure, OA and OB are two opposite line ∠AOC & ∠BOC are the adjacent angles. Therefore, ∠AOC and ∠BOC form a linear pair.

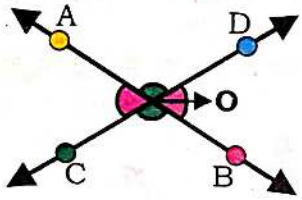
  दिये गये चित्र में, OA और OB विपरीत रेखाएं हैं, ∠AOC और ∠BOC आसन्न कोण है इसलिए ∠AOC और ∠BOC रैखिक युग्म बनाते हैं।

- If a line stand on another line, the sum of the adjacent angles so formed is 180°.

  यदि कोई रेखा किसी अन्य रेखा से मिलती है तब इनके आसन्न कोणों का योग 180° होता है।

(v) Vertically opposite Angles : If arm of two angles form two pairs of opposite rays, then the two angles are called as vertically opposite angles.

शीर्षाभिमुख कोण: यदि दो कोणों की भुजा विपरीत किरणों के दो युग्म बनाती हों, तो दोनों कोण शीर्षाभिमुख कोण कहलाते हैं।



- In other words, when two lines intersect, two pairs of vertically opposite angles are formed. Each pair of vertically opposite angles are equal.

  दूसरे शब्दों में, जब दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं तो शीर्षाभिमुख कोणों के दो युग्म बनते हैं। शीर्षाभिमुख कोणों के प्रत्येक युग्म बराबर होते हैं।

- In the figure, two lines AB and CD intersect at O. We find that ∠AOC and ∠BOD are vertically opposite angles

  चित्र में दो रेखाएँ AB और CD बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं।

  So, ∠AOC = ∠BOD

  Similarly, ∠BOC and ∠AOD are vertically opposite angles.

  इसी प्रकार, ∠BOC और ∠AOD शीर्षाभिमुख कोण हैं।

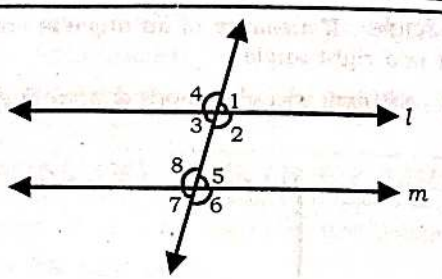
  So, ∠BOC = ∠AOD

(vi) Corresponding Angles : When two parallel lines are intersected by a transversal. They form pairs of corresponding angles.

संगत कोण : जब दो समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित की जाती है तो वे संगत कोणों के युग्म बनाती हैं।

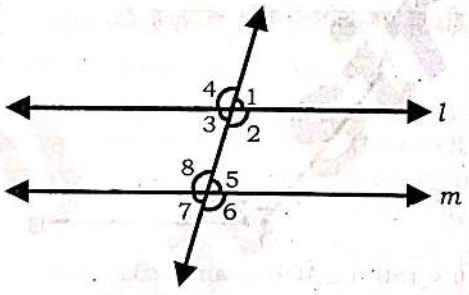
Lines l and m are intersected by the transversal n. Then ∠1 = ∠5, ∠4 = ∠8, ∠3 = ∠7 and ∠2 = ∠6 .

रेखाएँ l और m तिर्यक रेखा n द्वारा प्रतिच्छेदित की गई हैं, तो ∠1 = ∠5, ∠4 = ∠8, ∠3 = ∠7 और ∠2 = ∠6.



(vii) Alternate Angles: When two parallel lines are intersected by a transversal, they form pairs of Alternate Angles. Each pair of alternate angles is equal.

एकान्तर कोण: जब दो समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित की जाती है तो वे एकांतर कोणों के युग्म बनाती हैं। एकांतर कोणों के प्रत्येक युग्म बराबर होते हैं।



In the given figure alternate interior angles ∠3 = ∠5 and ∠2 = ∠8 and alternate exterior angles ∠1 = ∠7 and ∠4 = ∠6.

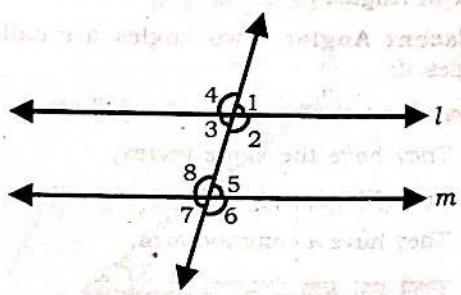
दिये गये चित्र में एकांतर अंत:कोण ∠3 = ∠5 तथा ∠2 = ∠8 और एकान्तर वाह्य कोण ∠1 = ∠7 तथा ∠4 = ∠6

Note: Conversely, if a transversal intersects two lines in such a way that a pair of alternate interior angles is equal, then the two lines are parallel.

इसके विपरीत यदि कोई तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि एकांतर अंत:कोणों का एक युग्म बराबर हो तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।

(viii) Consecutive Interior Angles : When two parallel lines are intersected by a transversal, they form two pairs of interior angles. The pairs of interior angles so formed are supplementary

क्रमागत आंतरिक कोण : जब दो समांतर रेखाएं एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित होती हैं तो आंतरिक कोणों के दो युग्म बनते हैं। इस प्रकार बने आंतरिक कोण पूरक होते हैं।



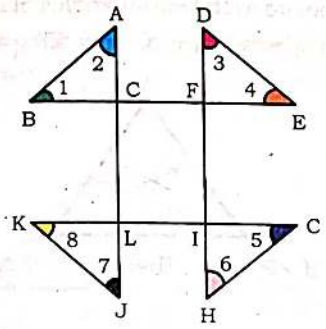
Pairs of interior angles are:

∠2 + ∠5 = 180° & ∠3 + ∠8 = 180°

@Baka_260

Ex. Angles are shown in the given figure. What is the value of $\angle1 + \angle2 + \angle3 + \angle4 + \angle5 + \angle6 + \angle7 + \angle8$?

दिए गए चित्र में कोण दिखाए गए हैं। $\angle1 + \angle2 + \angle3 + \angle4 + \angle5 + \angle6 + \angle7 + \angle8$ का मान क्या है?



HINTS:

$\angle C = 180 - (\angle1 + \angle2)$

$\angle F = 180 - (\angle3 + \angle4)$

$\angle I = 180 - (\angle5 + \angle6)$

$\angle L = 180 - (\angle7 + \angle8)$

$\therefore$ CFLI is quadrilateral.

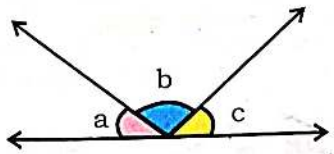
$\therefore$ Sum of angles of CFLI is 360°

$720° - (\angle1 + \angle2 + \angle3 + \angle4 + \angle5 + \angle6 + \angle7 + \angle8) = 360°$

$360° = (\angle1 + \angle2 + \angle3 + \angle4 + \angle5 + \angle6 + \angle7 + \angle8)$

Ex. In the given figure, if $\frac{b}{a} = 5$ and $\frac{c}{a} = \frac{6}{5}$ then what is the value of b.

दिए गए चित्र में, यदि $\frac{b}{a} = 5$ और $\frac{c}{a} = \frac{6}{5}$ है तो b का मान क्या है?



HINTS:

$b : a = (5 : 1) \times 5 = 25 : 5$

$c : a = 6 : 5$

$a : b : c = 5 : 25 : 6$

$\angle a + \angle b + \angle c = 180°$ (straight line)

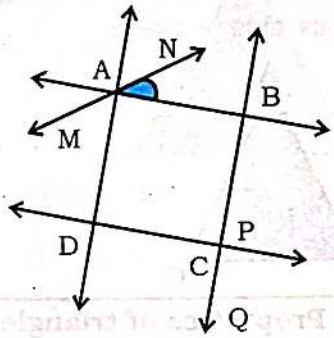
36 unit = 180°

1 unit = 5°

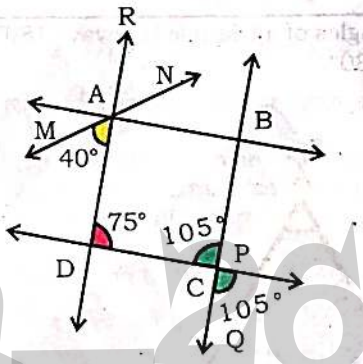
$\angle b = 25$ unit = 125°

Ex. In the given figure, AB is parallel to CD and AD is parallel to BC. If $\angle MAD = 40°$ and $\angle PCQ = 105°$, then what is $\angle NAB$ equals to?

दिए गए चित्र में, AB, CD के समानांतर है और AD, BC के समानांतर है। यदि $\angle MAD = 40°$ और $\angle PCQ = 105°$, तो $\angle NAB$ किसके बराबर है?



HINTS:



$\angle BCD = \angle PCQ$

$\angle BCD = 105°$ (Vertically opposite angle)

$\angle CDA = 180° - 105° = 75°$ (AD || BC)

$\angle RAB = \angle CDA = 75°$ (corresponding angles)

$\angle RAN = \angle MAD = 40°$ (Vertically opposite angle)

$\angle NAB = \angle RAB - \angle RAN$

$= 75° - 40° = 35°$

Ex. The measure of an angle for which the measure of the supplement is four times the measure of the complement is:

एक कोण का माप जिसके लिए पूरक का माप पूरक के माप का चार गुना है:

HINTS:

Let the angle is x.

So, Complement angle = $90 - x$

Supplement angle = $180 - x$

According to Question,

3 × Complement angle = Supplement angle

$\Rightarrow 3 \times (90 - x) = 180 - x$

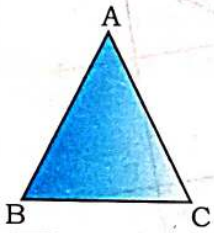
$\Rightarrow x = 45°$

☆☆☆☆☆

@Baka_260

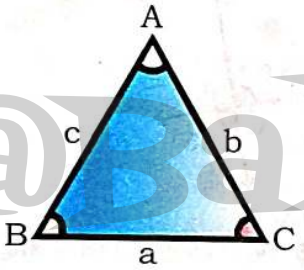
TRIANGLE/ त्रिभुज

The region enclosed by three lines is called triangles.
तीन भुजाओं से घिरे हुए बंद क्षेत्र को त्रिभुज कहते है।



Fundamental Properties of triangle
त्रिभुज के मूलभूत गुणधर्म

1. Sum of all three angles of a triangle is always 180°, i.e. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.
किसी भी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। अर्थात् $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$



Ex. $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ are three angles of a ΔABC. If $\angle A - \angle B = 15°$, $\angle B - \angle C = 30°$, then $\angle A$, $\angle B$ and $\angle C$ are:
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, ΔABC के तीन कोण हैं। यदि $\angle A - \angle B = 15°$, $\angle B - \angle C = 30°$ है, तो $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ का मान है:

HINTS:

We know, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\Rightarrow \angle B + 15° + \angle B + \angle B - 30° = 180°$

$\Rightarrow 3\angle B - 15° = 180°$

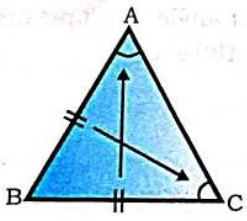
$\Rightarrow 3\angle B = 195°$

$\Rightarrow \angle B = 65°$

$\therefore \angle A = \angle B + 15° = 80°$

$\therefore \angle C = \angle B - 30° = 35°$

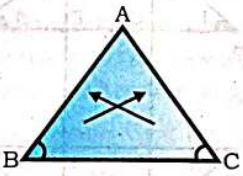
2. (i) Angles opposite to the equal sides of a triangle are equal.
किसी त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं।



In ΔABC, if $AB = BC$, then
त्रिभुज ABC में यदि $AB = BC$ है, तो

$\angle A = \angle C$

(ii) Sides opposite to the equal angles of a triangle are equal
किसी त्रिभुज में बराबर कोणों के सामने की भुजाएँ बराबर होती है।

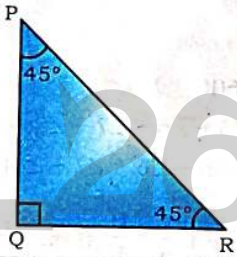


In ΔABC, if $\angle B = \angle C$, then
त्रिभुज ABC में यदि $\angle B = \angle C$ है, तो

$AC = AB$

Ex. In ΔPQR, $\angle Q = 90°$, $PQ = 8$ cm and $\angle PRQ = 45°$. Find the length of QR.
ΔPQR, में $\angle Q = 90°$, $PQ = 8$ cm और $\angle PRQ = 45°$ है। QR की लंबाई ज्ञात कीजिए।

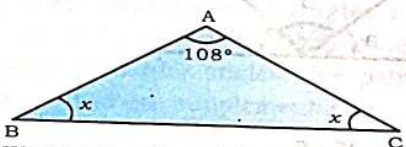
HINTS:



Using property 2 (ii), $QR = PR = 8$ cm

Ex. One of the angles of a triangle is 108°, and the other two angles are equal. What is the measure of each of these equal angles?
त्रिभुज का एक कोण 108° है और अन्य दो कोण बराबर हैं। इन बराबर कोणों में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:



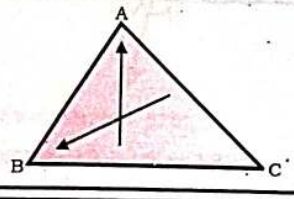
We know, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\Rightarrow 108° + x + x = 180°$

$\Rightarrow 2x = 72°$

$\Rightarrow x = 36°$

3. (i) The angle opposite to the greater side is always greater than the angle opposite to the smaller side.
बड़ी भुजा के विपरीत का कोण हमेशा छोटी भुजा के विपरीत कोण से बड़ा होता है।



@Baka_260

In ΔABC, if BC > AC, then ∠A > ∠B

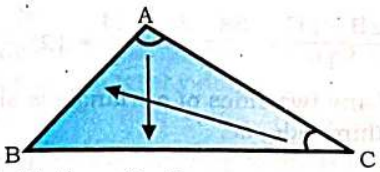
ΔABC में यदि BC > AC, तो ∠A > ∠B

(If the side BC is greater than the side AC, then ∠A will be always greater than ∠B.)

(यदि भुजा BC भुजा AC से बड़ी है, तो ∠A हमेशा ∠B से बड़ा होगा।)

(ii) The side opposite to the greater angle is always greater than the side opposite to the smaller angle.

बड़े कोण के विपरीत की भुजा हमेशा छोटे कोण के विपरीत भुजा से बड़ी होती है।



In ΔABC, if ∠A > ∠C, then

ΔABC में यदि ∠A > ∠C, तो

BC > AB

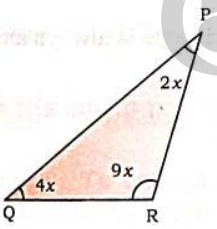
Ex. The ratio of the angle ∠P, ∠Q and ∠R of a ΔPQR is 2 : 4 : 9, then which of the following is true ?

Δ PQR के कोणों ∠P, ∠Q और ∠R का अनुपात 2 : 4 : 9 है, तो निम्न में से कौन-सा सही है?

(a) PQ > QR > RP (b) PQ > RP > QR

(c) QR > RP > PQ (d) PR > PQ > QR

HINTS:



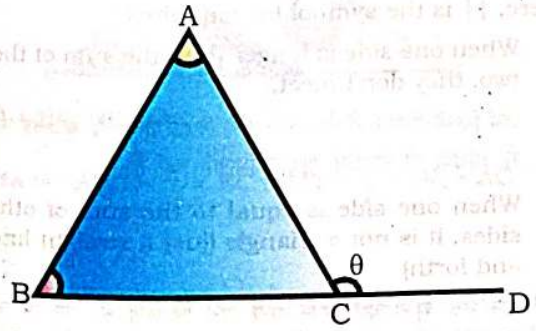
Here, $9x > 4x > 2x$

So, PQ > PR > QR

4. If a side of triangle is produced, then the exterior angle so formed is equal to the sum of the two interior opposite angles.

यदि त्रिभुज की किसी भुजा को बढ़ाया जाता है तो इस प्रकार बना बाह्य कोण दो विपरीत आंतरिक कोणों के योगफल के बराबर होता है।

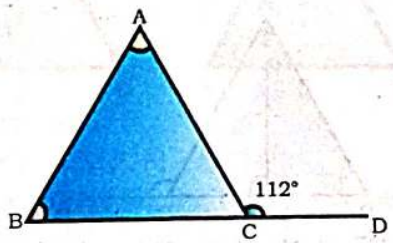
∠ACD = ∠CAB + ∠ABC



Ex. The side BC of triangle ABC is produced to D. If ∠ACD = 112° and $\angle B = \frac{3}{4}\angle A$, then find the measure of ∠B.

यदि त्रिभुज ABC की भुजा BC को D तक बढ़ाया गया है। यदि ∠ACD = 112° और $\angle B = \frac{3}{4}\angle A$ है, तो ∠B का माप ज्ञात कीजिए।

HINTS:



∠ACD = 112° ∴ ∠ACB = 180° − 112° = 68°

$\angle B = \frac{3}{4}\angle A$ $\therefore \angle A = \frac{4}{3}\angle B$ ....(1)

∠A + ∠B + ∠C = 180°

∠A + ∠B + ∠68° = 180°

∴ ∠A + ∠B = 112°

From (1), $\frac{4}{3}\angle B + \angle B = 112°$

$\Rightarrow 7\angle B = 336°$

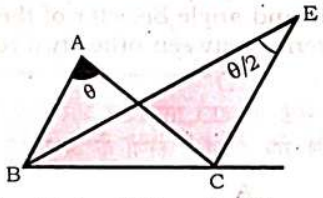
$\Rightarrow \angle B = 48°$

5. In a triangle the angle between internal bisector of a base angle and external bisector of the other base angle is half of the remaining vertex angle.

According to this property, $\angle BEC = \frac{\angle A}{2}$.

किसी त्रिभुज में एक आधार कोण के आंतरिक समद्विभाजक और दूसरे आधार कोण के बाह्य समद्विभाजक के बीच बना कोण शेष शीर्ष कोण का आधा होता है।

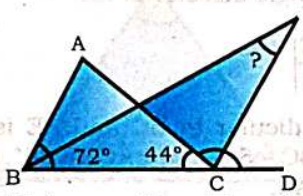
इस गुणधर्म के अनुसार, $\angle BEC = \frac{\angle A}{2}$



Ex. In ΔABC, ∠B is 72° and ∠C = 44°. Side BC is produced to D. Then bisectors of ∠B and ∠ACD meet at E. What is the measure of ∠BEC?

त्रिभुज ABC में ∠B = 72° तथा ∠C = 44° है। भुजा BC को D तक बढ़ाया जाता है। ∠B तथा ∠ACD के समद्विभाजक E पर मिलते हैं। ∠BEC का मान क्या होगा?

HINTS:



We know, ∠A + ∠B + ∠C = 180

$\Rightarrow \angle A = 180 - 72 - 44$

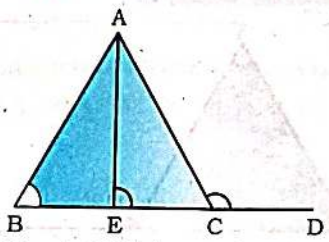
$\Rightarrow \angle A = 64°$

$\therefore \angle BEC = \frac{\angle A}{2} = \frac{64}{2} = 32°$

@Baka 260

6. In ΔABC, the side BC produced to D and angle bisector of ∠A meets BC at E, then ∠ABC + ∠ACD = 2 ∠AEC.

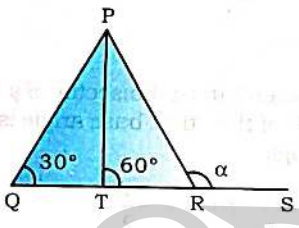
ΔABC में भुजा BC को D तक बढ़ाया गया है और ∠A का समद्विभाजक भुजा BC से बिन्दु E पर मिलता है, तो ∠ABC + ∠ACD = 2 ∠AEC



Ex. The side QR of ΔPQR is produced to a point S. The bisector of ∠P meets side QR in T. If ∠PQR = 30° and ∠PTR = 60°, find ∠PRS.

ΔPQR में भुजा QR को S तक बढ़ाया गया है और ÐP का समद्विभाजक भुजा QR से बिन्दु T पर मिलता है, यदि ∠PQR = 30° तथा ∠PTR = 60° हैं तो ∠PRS का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:



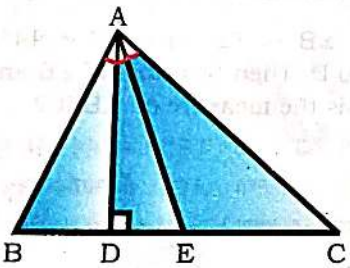
$\therefore 60° = \frac{30° + \alpha}{2}$

$\Rightarrow 120° = 30° + \alpha$

$\Rightarrow \alpha = 90°$

7. The angle between perpendicular drawn by a vertex to opposite side and angle bisector of the vertex angle is half of difference between other two remaining vertex angles.

शीर्ष से विपरीत भुजा पर डाले गए लम्ब और शीर्ष कोण के समद्विभाजक के बीच का कोण शेष दो शीर्ष कोणों के अंतर का आधा होता है।



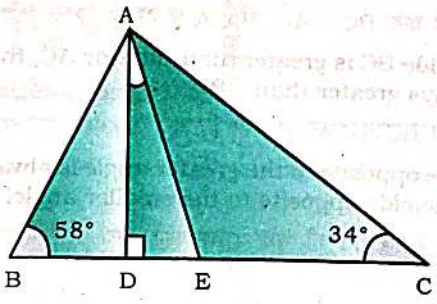
If AD ⊥ BC and AE is angle bisector of ∠A

Then $\angle DAE = \left|\frac{\angle B - \angle C}{2}\right|$

Ex. In ΔABC, AD is perpendicular to BC and AE is the bisector of ∠BAC. If ∠ABC = 58° and ∠ACB = 34°, then find the measure of ∠DAE.

ΔABC में, AD भुजा BC पर लंबवत है और AE, ∠BAC का समद्विभाजक है। यदि ∠ABC = 58° और ∠ACB = 34° है, तो ∠DAE का माप ज्ञात कीजिए।

HINTS:



$\angle DAE = \frac{\angle B - \angle C}{2} = \frac{58 - 34}{2} = \frac{24}{2} = 12°$

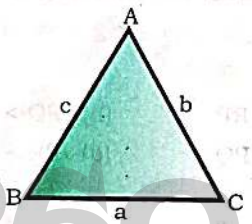
8. (i) Sum of any two sides of a triangle is always greater than the third side, *i.e.*

किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा से हमेशा बड़ा होता है। अर्थात्

$a + b > c$

$b + c > a$

$c + a > b$



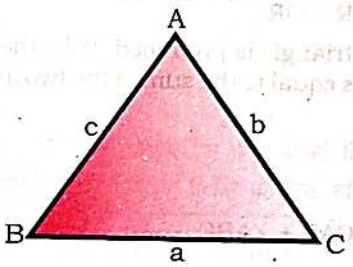
(ii) Difference of any two sides of a triangle is always smaller than the third side.

किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से हमेशा छोटा होता है। अर्थात्

$|a - b| < c$

$|b - c| < a$

$|c - a| < b$



(Here, | | is the symbol for modulus)

Note: 1. When one side is longer than the sum of the other two, they don't meet.

जब किसी त्रिभुज में एक भुजा की लंबाई शेष दोनों भुजाओं के योगफल से अधिक हो तो दोनों भुजाएँ मिलती नहीं हैं।

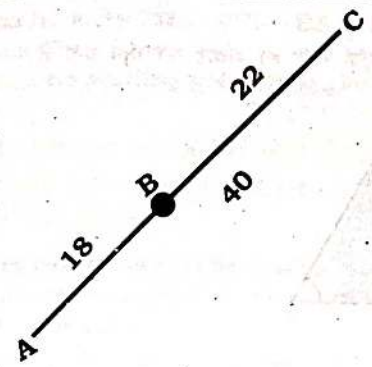
2. When one side is equal to the sum of other two sides, it is not a triangle (just a straight line back and forth).

जब एक भुजा की लंबाई शेष दोनों भुजाओं के योग के बराबर हो, तो यह त्रिभुज नहीं होता। (बल्कि यह एक सीधी रेखा होती है)

i.e., if $a + b = c$ then point A, B and C are collinear.

अर्थात् यदि $a + b = c$ है, तो बिन्दु A, B और C समरैखिक होंगे।

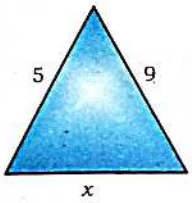
@Baka_260



Ex. Three sides of a triangle are 5 cm, 9 cm, and x cm. The minimum integral value x is.

किसी त्रिभुज की तीन भुजाएँ 5 सेमी, 9 सेमी और x सेमी है। x का न्यूनतम पूर्णांक मान है :

HINTS:



Value of x lies between, $4 < x < 14$.

Thus, Minimum intergral value of x is 5.

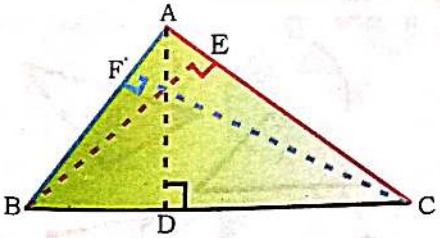
9. Area of Triangle/त्रिभुज का क्षेत्रफल

(A) Area of $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times$ base $\times$ height

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

Note : To calculate area of ΔABC, we take any of the side as base and the perpendicular from the vertex to the base is called the height. In triangle ABC,

नोट : त्रिभुज ABC की गणना के लिए हम किसी भी भुजा को आधार और शीर्ष से आधार पर डाले गए लम्ब को ऊँचाई मानते हैं। त्रिभुज ABC में



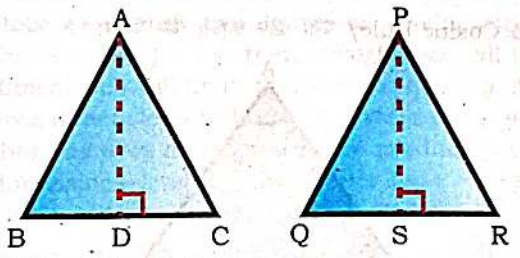
$AD \perp BC$, $BE \perp AC$ and $CF \perp AB$.

Area of $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times BE \times AC$

$= \frac{1}{2} \times CF \times AB$

Note: (i) If the height of the two triangles is same, the ratio of their area is proportional to the ratio of their base.

यदि दो त्रिभुजों की ऊचाइयाँ समान हो, तो इनके क्षेत्रफल का अनुपात, इनके आधार के अनुपात के समानुपाती होता है।

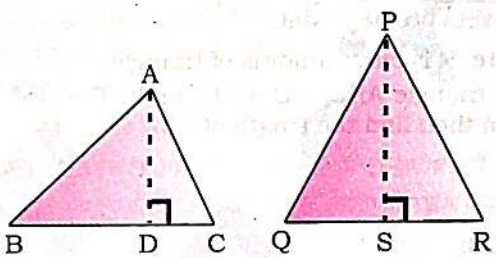


If AD = PS, then

Ar (ΔABC) : Ar (ΔPQR) = BC : QR

(ii) If the base of the two triangles is the same, the ratio of their areas is proportional to the ratio of their heights.

यदि दो त्रिभुजों के आधार समान हो, तो इनके क्षेत्रफल का अनुपात, इनकी ऊँचाइयों के अनुपात के समानुपाती होता है।

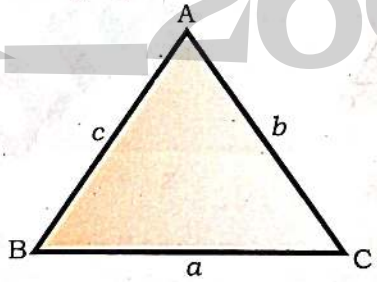


If BC = QR, then

Ar (ΔABC) : Ar (ΔPQR) = AD : PS

(B) Area of scalene triangle

विषमबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल



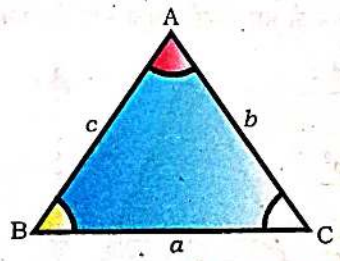
Area of $\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Hero's formula)

Where (जहाँ),

Semi Perimeter/अर्द्ध परिमाप (S) $= \frac{a+b+c}{2}$

(C) When two sides and angle between these two sides is given

जब दो भुजाएं और इन दोनों भुजाओं के बीच का कोण दिया गया हो

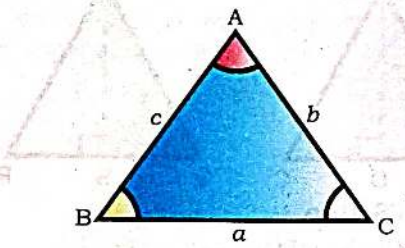


Area of ΔABC/ त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$

@Baka_260

10. Sine & Cosine Rule/ ज्या और कोज्या का नियम



(a) **Sine Rule :** Ratio of side and sine of opposite angle of a triangle is equal to double of circum radius.

ज्या का नियम : किसी त्रिभुज में भुजा और उसके विपरीत कोण की ज्या का अनुपात त्रिभुज की बाह्य त्रिज्या के दोगुने के बराबर होता है।

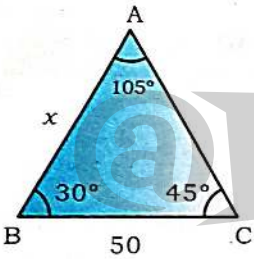
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R;$$

Where, R is circumradius of triangle.

Ex. In a triangle ABC, $\angle B = 30°$ and $\angle C = 45°$. If BC = 50cm then find the length of AB/

किसी त्रिभुज ABC में, $\angle B = 30°$ और $\angle C = 45°$ है। यदि BC = 50 है तो AB की लंबाई ज्ञात करें।

HINTS:



$$\Rightarrow \frac{50}{\sin 105°} = \frac{x}{\sin 45}$$

$$\Rightarrow \frac{50}{\frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}} = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \because \sin 105° = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{100}{(\sqrt{3}+1)} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 50\left(\sqrt{3}-1\right)$$

(b) **Cosine Rule :** If two sides and angle between sides are given, then we can find the opposite side by Cosine Rule.

को-ज्या का नियम : यदि दो भुजा और भुजाओं के बीच का कोण दिया हो, तो को-ज्या के नियम से हम विपरीत भुजा ज्ञात कर सकते हैं।

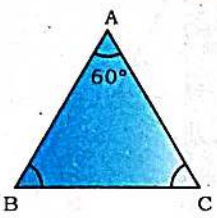
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ex. In the triangle ABC, AB = 12cm and AC = 10cm, and $\angle BAC = 60°$ What is the value of the length of the side BC?

त्रिभुज ABC में AB = 12 cm और AC = 10 cm, और $\angle BAC = 60°$ है। भुजा BC की लंबाई का मान क्या है?



HINTS:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2ABAC}$$

$$\cos 50° = \frac{(12)^2 + (10)^2 - BC^2}{2 \times 12 \times 10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{144 + 100 - BC^2}{2 \times 120}$$

$$\Rightarrow 120 = 244 - BC^2$$

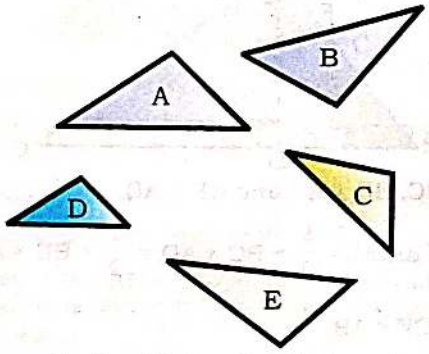
$$\Rightarrow BC^2 = 124$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{31}$$

Congruence & Similarity in Triangle
त्रिभुज में सर्वांगसमता और समरूपता

In Geometry, two figures are said to be similar if their shape is the same. Note that this shape could be rotated or even flipped and it would still be fine. They would be said to be congruent if the shape as well as the size is the same. So congruence is a more stringent condition- any pair of congruent figures is similar by definition.

ज्यामिति में दो आकृतियों को समरूप कहा जाता है। जब उनकी संरचना (बनावट) समान होती है। ध्यान रहे कि समान संरचना की दो आकृतियों को घुमाने या पलटने पर भी ये समरूप रहती है। दो आकृतियों को सर्वांगसम कहा जाता है जब उनकी संरचना और माप दोनों समान होती है। जब ऐसा होता है तो एक आकृति को दूसरी आकृति पर अध्यारोपित करने पर पहली आकृति दूसरी आकृति को पूर्णत: ढक लेती है। इस प्रकार सर्वांगसमता की शर्त अधिक कठोर है। परिभाषानुसार, सर्वांगसम आकृतियों का युग्म समरूप होता है।



For example the 5 triangles shown alongside are all similar. A, B and E are congruent (but E is flipped), while C and D are of different sizes.

उदाहरणस्वरूप 5 त्रिभुज दिखाये गये हैं, सभी समरूप हैं। A, B और E सर्वांगसम है, जबकि C और D की माप भिन्न है।

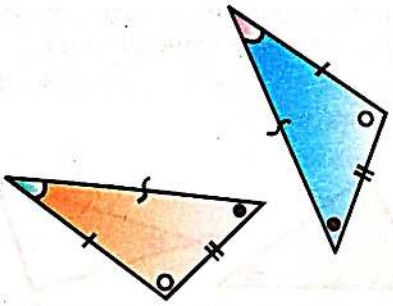
@Baka_pro

A more mathematical way of looking at similarity and congruence : Two figures can be said to be Congruent if all their corresponding sides are angles (in order) and the same.

समरूपता और सर्वांगसमता को देखने का बेहतर गणितीय तरीका - जब दो आकृतियों की सभी संगत भुजाओं एवं कोणों (क्रम में) की माप समान होती है तो आकृति सर्वांगसम होती है।

Two figures can be said to be similar if all their angles (in order) are the same and all their corresponding sides are in the same ratio.

जब दो आकृतियों के सभी कोण (क्रम में) समान और उनकी संगत भुजाओं का अनुपात समान होता है तो आकृति समरूप होती है।

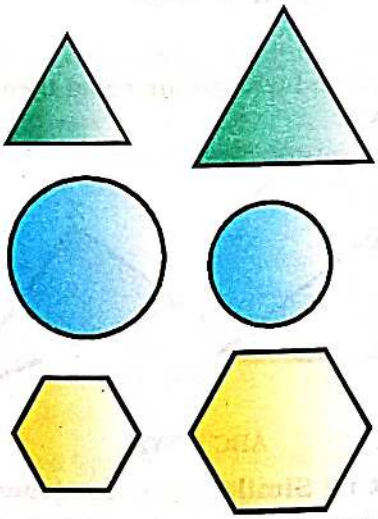


(The figure may not always look similar-one should test to make sure)

(आकृति हमेशा देखने में समरूप नहीं दिखती है, हमें जाँच करनी पड़ती है।)

Note that, while we normally study similarity and congruence for triangles, any two figures could be tested to check for similarity and congruence. In the case of regular figures, this is easiest – any two regular figures with the same number of sides will be similar to each other.

ध्यान रहे, सामान्यत: हम समरूपता और सर्वांगसमता त्रिभुजों के लिए पढ़ते हैं परंतु कोई भी दो आकृति समरूपता और सर्वांगसमता के लिए जाँच किये जा सकते हैं। सम आकृतियों के लिए यह आसान होता है। कोई दो सम आकृति जिसमें भुजाओं की संख्या समान हो, एक-दूसरे के समरूप होते हैं।



For example if we take two regular hexagons, or two circles, or two equilateral triangles, or two squares, or two regular pentagons, each pair of figures will be similar without any further checking required.

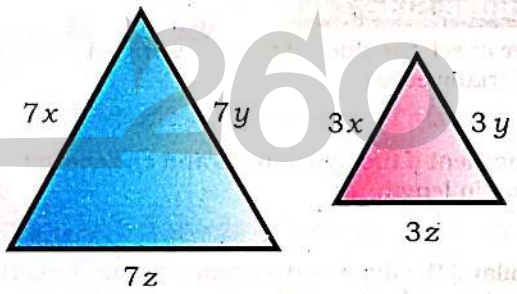
उदाहरण के लिए यदि हम दो सम षठभुज या दो वृत्त या दो समबाहु त्रिभुज या दो वर्ग या दो सम पंचभुज लें तो आकृतियों के प्रत्येक युग्म बिना किसी अतिरिक्त जाँच के समरूप होते हैं।

Once we identify two figures as similar with sides in the ratio (say) x : y, then straightaway all their liner dimensions will be in this same ratio $x : y$. Also, their area dimensions will be in the ratio $x^2 : y^2$ (remember that any area dimension is the product of two length dimensions–length × breadth or base × height or radius × radius .....)

एक बार यदि भुजाओं के अनुपात x : y के साथ दो आकृति समरूप हो जाए तो उनकी सभी रैखिक विमाएँ समान अनुपात x : y में हो जाती है तथा उनकी क्षेत्रफल विमा $x^2 : y^2$ के अनुपात में होगी। (ध्यान रहे कि क्षेत्रफल विमा दो लम्बाई विमाओं का गुणनफल होता है। लम्बाई × चौड़ाई या आधार × ऊँचाई या त्रिज्या × त्रिज्या या .....)।

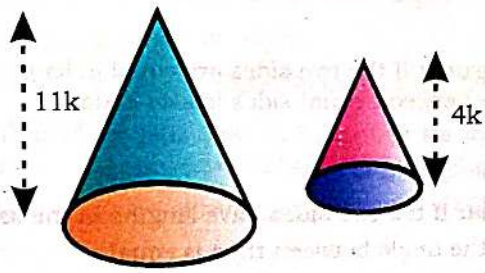
For example if two triangles are similar with sides in the ratio 3 : 7 then their perimeters, circumradii, inradii, medians or altitudes from corresponding vertices etc will all be in the ratio 3 : 7, while their areas will be in the ratio 9 : 49.

उदाहरण के लिए यदि दो त्रिभुज समरूप हो और उनकी भुजाओं का अनुपात 3 : 7 हो तो उनके परिमाप, वाह्य त्रिज्या, अन्त: त्रिजया, माध्यिका, संगत शीर्ष से डाले गए लम्बों का अनुपात भी 3 : 7 होगा जबकि उनके क्षेत्रफलों का अनुपात 9 : 49 होगा।



Similarity if two cones are similar with heights in the ratio 4 : 11 then their base radii, slant heights etc will also be in the ratio 4 : 11. Their surface areas, base surface areas, curved surface areas etc will be in the ratio 16 : 121 and their volumes will be in the ratio 64 : 1331.

इसी प्रकार यदि दो शंकु उनकी ऊँचाइयों के अनुपात 4 : 11 के साथ समरूप हो तो उनकी आधार त्रिज्या, तिरछी ऊँचाई आदि भी 4 : 11 के अनुपात में होगी। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफल आधार के क्षेत्रफल, पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल आदि 16 : 121 के अनुपात में होंगे और उनके आयतन 64 : 1331 के अनुपात में होंगे।



Triangles : Conditions for Congruence and Similarity

त्रिभुज : सर्वांगसमता और समरूपता की शर्तें

SSS Test

If we check the three sides of two triangles, then the triangles are

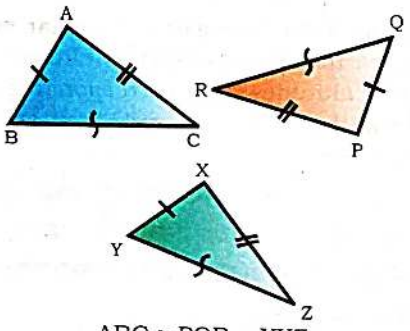
यदि हम दो त्रिभुजों की तीनों भुजाओं की जाँच करे, तो

- Congruent if three pairs of sides of the two triangles are equal in length.

  दोनों त्रिभुजों की भुजाओं के तीनों युग्मों की लम्बाइयाँ समान हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

- Similar if the corresponding sides of two triangles have lengths in the same ratio.

  दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं की लम्बाइयों का अनुपात समान हो तो त्रिभुज समरूप होते हैं।



ABC ≅ PQR ~ XYZ

Hypotenuse Side Test

If we check the sides of two right-angled triangles, then the triangles are

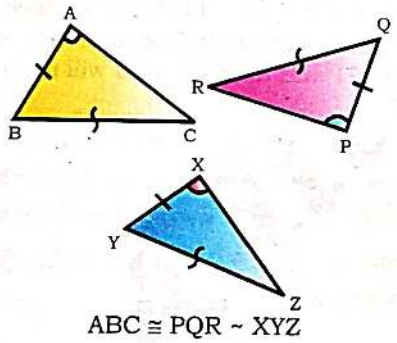
यदि दो समकोण त्रिभुजों की भुजाओं की जाँच करें तो

- Congruent if the hypotenues and one shorter sides are equal in length.

  यदि कर्ण और एक छोटी भुजा की लम्बाई समान हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

- Similar if the hypotenuses and one pair of shorter sides have length in the same ratio.

  कर्ण और छोटी भुजाओं के एक युग्म की लम्बाई का अनुपात समान हो तो त्रिभुज समरूप होते हैं।



ABC ≅ PQR ~ XYZ

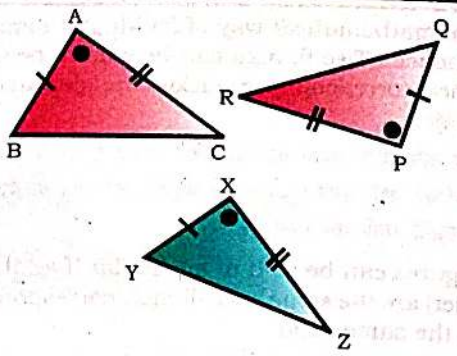
SAS Test

- Congruent if the two sides are equal in length and the angle between equal sides is also equal.

  सर्वांगसम यदि दोनों भुजाओं की लंबाई बराबर हो और समान भुजाओं के बीच का कोण भी बराबर हो।

- Similar if the two sides have lengths in the same ratio and the angle between then is equal.

  इसी तरह अगर दोनों भुजाओं की लंबाई समान अनुपात में हो और उनके बीच का कोण बराबर हो।

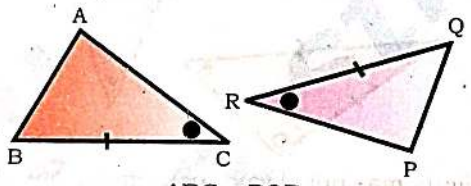


ABC ≅ PQR ~ XYZ

ASA Test

- congruent if the two pairs of angle have the same mea sure and the sides are equal in length.

  कोणों के दोनों युग्मों की माप समान हो और शामिल भुजाओं की लम्बा समान हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

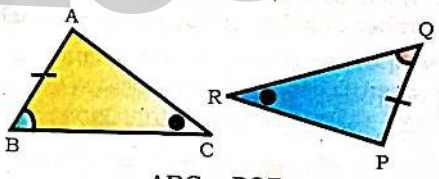


ABC ≅ PQR

AAS Test

- Congruent if the two pairs of angles have the sam measure and the sides are equal in length.

  कोणों के दोनों युग्मों की माप समान और अशामिल संगत भुजाओं क लम्बाई समान हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

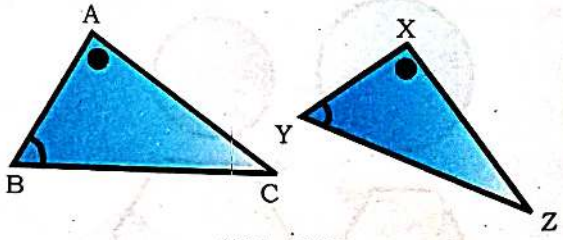


ABC ≅ PQR

AA Test

- If two angles o f triangle are equal then both triangl are similar.

  यदि त्रिभुज के दो कोण बराबर हों तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।



ABC ≅ XYZ

Spotting Similarity & Congruence

सर्वांगसमता और समरूपता की पहचान

Being able to spot Similarity (and Congruence) is of paramount importance to the visualisation of problems in Geometry; in my experience Similirity stands next only to Right-Angled triangle in its usefulness as a concept. And a key to recognising similarity is spotting equal angles. Let me demonstrate through some typical cases.

@Raka_200

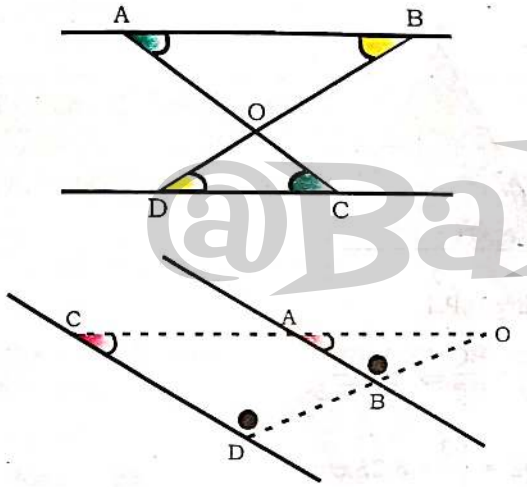
ज्यामिति के प्रश्नों में समरूपता के प्रयोग की पहचान में सक्षम होना सबसे महत्वपूर्ण है। मेरे अनुभव के आधार पर अवधारणा के रूप में समरूपता की उपयोगिता समकोण त्रिभुज की उपयोगिता के जितनी ही है। समरूपता की पहचान के लिए सबसे महत्वपूर्ण समान कोणों का पहचान करना है। इसको कुछ विशेष स्थितियों के माध्यम से समझते हैं।

Parallel lines : The moment one sees two parallel lines, one should immediately look out for the possibility of similar triangles. This is because parallel lines and transversals centre equal angles galore

समांतर रेखा : जैसे ही समांतर रेखाएँ दिखे, हमें तुरंत ही समरूप त्रिभुजों की संभावना की तलाश प्रारंभ कर देनी चाहिए क्योंकि समांतर और अनुप्रस्थ रेखाएँ बराबर कोण बहुतायत संख्या में बनाती है।

In both the situation alongside, AB and CD are parallel lines. Immediately we should recognise that ΔAOB and ΔCOD are similar as two pairs of angles are the same in each case.

नीचे दी गई दोनों ही स्थितियों में AB और CD समांतर रेखाएँ हैं, देखते ही हम यह पहचान करने में सक्षम हो जाते हैं कि ΔAOB और ΔCOD समरूप हैं क्योंकि कोणों के दो युग्म प्रत्येक स्थिति में समान है।

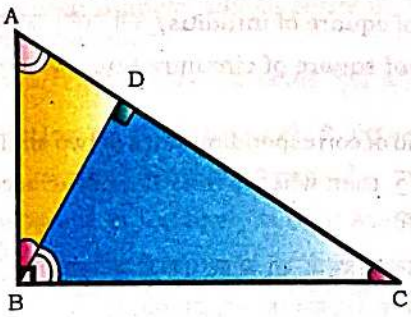


This is an idea underlying a lot of proofs – for example we used this in providing the basic Proportionality and Mid-point Theorems, as well as in showing that when the diagonals of a trapezium are drawn, the two triangles formed having their base as the parallel sides are similar.

यह ऐसी समझ है जिस पर बहुत सारी अवधारणाएँ आधारित है। उदाहरण के तौर पर इसका प्रयोग मूलभूत आनुपातिकता प्रमेय और मध्य-बिन्दु प्रमेय को सिद्ध करने में करते हैं तथा इसी के प्रयोग से, जब किसी समलम्ब चतुर्भुज के विकर्ण खींचते हैं तो समांतर रेखाओं के रूप में उनके आधार वाले दो त्रिभुज समरूप हैं।

Altitude to a hypotenuse : Another very useful similarity-based result is that when we drop a perpendicular to the hypotenuse of a right angle triangle from the opposite vertex, the two triangles formed are similar to each other and to the original triangle.

कर्ण पर डाला गया लम्ब : समरूपता पर आधारित एक और महत्वपूर्ण परिणाम है कि जब हम किसी समकोण त्रिभुज के विपरीत शीर्ष से कर्ण पर लम्ब डालते हैं तो निर्मित दो त्रिभुज एक-दूसरे के और मूल त्रिभुज के समरूप होते हैं।



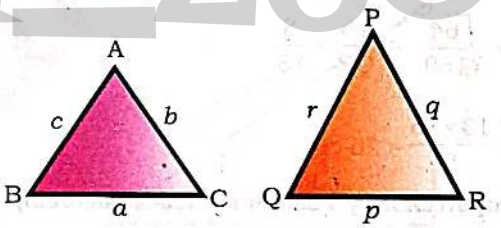
In the adjoining figure, for example, ΔABC is a right angled at B. BD is dropped perpendicular to AC. Then we can see that if we compare ΔABC and ΔADB, they both have a common angle (A) and a right angle and thus are similar. Also if we compare ΔABC with ΔBDC, they both have a common angle (C) and a right angle and thus are similar. So all three triangles (ΔABC, ΔADB and ΔBDC) are similar.

नीचे दिये गये चित्र में, उदाहरण के लिए ΔABC शीर्ष B पर समकोण है। लम्ब BD को AC पर डाला गया है तो हम यह देखते हैं कि यदि हम ΔABC और ΔADB की तुलना करे तो दोनों का एक उभयनिष्ठ कोण (A) और एक उभयनिष्ठ समकोण है, इस प्रकार दोनों समरूप है। इसी प्रकार यदि हम ΔABC की ΔBDC के साथ तुलना करे तो दोनों का एक उभयनिष्ठ कोण (C) और एक उभयनिष्ठ समकोण है। इसीलिए यह दोनों भी समरूप हैं। इसलिए सभी तीन त्रिभुज (ΔABC, ΔADB और ΔBDC) समरूप हैं।

(A) Properties of Similar triangles/समरूप त्रिभुज के गुण

If ΔABC and ΔPQR are similar, then

यदि ΔABC और ΔPQR समरूप हों, तो



(i) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$

(ii) Ratio of corresponding sides

संगत भुजाओं का अनुपात

= Ratio of perimeter/परिमाप का अनुपात

= Ratio of semi-perimeter(s)/अर्द्ध-परिमाप का अनुपात

= Ratio of corresponding medians/संगत माध्यिकाओं का अनुपात

= Ratio of inradius/अन्तःत्रिज्या का अनुपात

= Ratio of circumradius/परित्रिज्या का अनुपात

(iii) Ratio of area/क्षेत्रफल का अनुपात

= Ratio of square of corresponding sides/संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात

= Ratio of square of perimeter/परिमाप का वर्ग का अनुपात

= Ratio of square of semi-perimeter/अर्द्ध-परिमाप का वर्ग का अनुपात

= Ratio of square of corresponding medians/संगत माध्यिकाओं का वर्ग का अनुपात

@Baka_200

= Ratio of square of inradius/अन्तःत्रिज्या का वर्ग का अनुपात

= Ratio of square of circumradius/बाह्य त्रिज्या का वर्ग का अनुपात

Ex. If the ratio of corresponding sides of two similar triangles is $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ then what is the ratio of the area of the two triangles?

यदि दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ है तो दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात क्या है?

HINTS:

$$ar(\Delta ABC):ar(\Delta PQR) = \left(\sqrt{3}\right)^2 : \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3:2$$

Ex. Let $\Delta ABC \sim \Delta QPR$ and $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta QPR)} = \frac{64}{169}$. If AB = 10 cm, BC = 7 cm and AC = 16 cm, then QR (in cm) is equal to:

मान लीजिए $\Delta ABC \sim \Delta QPR$ और $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta QPR)} = \frac{64}{169}$। यदि AB = 10 सेमी, BC = 7 सेमी है, तो AC = 16 सेमी है, तो QR (सेमी में) बराबर है:

HINTS:

Here, $\Delta ABC \sim \Delta QPR$ & $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta QPR)} = \frac{64}{169}$

$$\Rightarrow \frac{AC}{QR} = \sqrt{\frac{64}{169}} \Rightarrow \frac{16}{QR} = \frac{8}{13}$$

$$\Rightarrow QR = \frac{13\times16}{8} = 26 \text{ cm}$$

(B) Basic Proportionality Theorem (Thales Theorem)

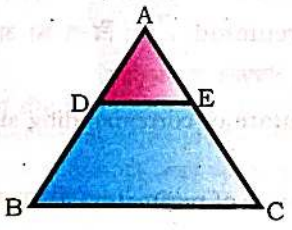
आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय)

(a) A line drawn parallel to one side of a triangle divides other two sides in the same ratio.

किसी त्रिभुज के एक भुजा के समांतर खींची गई कोई रेखा अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

(b) If a line divides any two sides of a triangle in the same ratio, the line must be parallel to the third side.

यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है तो वह रेखा तीसरी भुजा के समांतर होनी चाहिए।



In ΔABC, If DE || BC, then $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

'OR' If $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, then DE || BC

(c) Some of the results derived from this theorem, we will use, are as follows :

इस प्रमेय से निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं, जिन्हें हम प्रयोग करते हैं :

(i) $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$

(ii) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

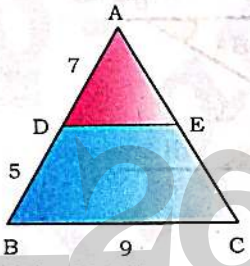
(iii) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

(iv) $\frac{Ar(\Delta ADE)}{Ar(\Delta ABC)} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$

Ex. In ΔABC, D and E are the points on sides AB and AC, respectively such that $\angle ADE = \angle B$. If AD = 7 cm BD = 5 cm and BC = 9 cm then DE (in cm) is equal to:

ΔABC में, D और E क्रमशः AB और AC भुजाओं पर इस प्रकार बिंदु हैं कि $\angle ADE = \angle B$ है। यदि AD = 7 सेमी BD = 5 सेमी और BC = 9 सेमी. तो DE (सेमी में) बराबर है:

HINTS:



Using B.P.T,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{12}{7} = \frac{9}{DE}$$

$$\therefore DE = \frac{63}{12} = 5.25 \text{ cm}$$

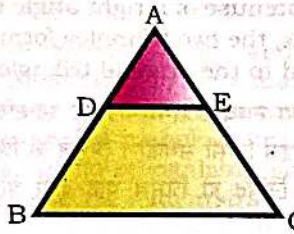
(C) Mid-Point Theorem/मध्यबिन्दु प्रमेय

(a) The line segment joining the mid-points of any two sides of a triangle is parallel to the third side and is half of the third side.

किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर और तीसरी भुजा का आधा होता है।

(ii) A line drawn parallel to the one side of a triangle and the length of the line is half of that of the side, the line will pass through the mid-points of the other two sides.

किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर खींची गई कोई रेखा और रेखा की लंबाई भुजा से आधी हो तो रेखा अन्य दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से होकर गुजरेगी।



@Baka_260

(b) If D and E are mid-points of AB and AC, respectively, then

यदि D और E क्रमशः रेखा AB और AC के मध्य बिन्दु हों, तो

$DE \parallel BC$ and $DE = \frac{BC}{2}$

(c) $DE \parallel BC$ and $DE = \frac{BC}{2}$, then D and E are the mid-points of AB and AC respectively. In this case

यदि $DE \parallel BC$ और $DE = \frac{BC}{2}$, तो D और E क्रमशः AB और AC के मध्य बिन्दु हैं। इस स्थिति में

(i) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 1$

(iii) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

(iv) $\frac{Ar(\Delta ADE)}{Ar(\Delta ABC)} = \frac{1}{4}$

Types of Triangles/त्रिभुजों के प्रकार

Triangles are classified on the basis of angles and sides-

त्रिभुजों को उनके कोणों और भुजाओं के आधार पर वर्गीकृत किया गया है-

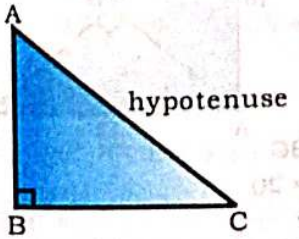
Types of Triangles/त्रिभुजों के प्रकार

On the basis of angle कोणों के आधार पर	On the basis of Sides भुजाओं के आधार पर
(i) Right angled समकोण त्रिभुज	(i) Scalene विषमबाहु त्रिभुज
(ii) Acute angled न्यून कोण त्रिभुज	(ii) Isosceles समद्विबाहु त्रिभुज
(iii) Obtuse angled अधिककोण त्रिभुज	(iii) Equilateral समबाहु त्रिभुज

Right Angle Triangle/समकोण त्रिभुज

If one of the angles of a triangle is right angle, then the triangle is called right-angled triangle. In the figure, $\angle B = 90°$, then ΔABC is right-angled triangle.

यदि किसी त्रिभुज का एक कोण समकोण हो, तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज कहलाता है। दी गई आकृति में, $\angle B = 90°$ है, इसलिए ΔABC समकोण है।



In right angled triangle, side opposite to right angle is known as hypotenuse.

किसी समकोण त्रिभुज में समकोण के विपरीत भुजा कर्ण कहलाती है।

Properties of a Right-angled Triangle

समकोण त्रिभुज की विशेषताएँ

(i) (a) Exactly one of the angle is right angle, i.e. $\angle B = 90°$

एक कोण समकोण होता है अर्थात् $\angle B = 90°$

(b) Exactly two angles will be acute.

दो कोण न्यूनकोण होंगे।

i.e. $\angle A < 90°$, $\angle C < 90°$

(c) One angle is equal to the sum of other two angle, i.e.

एक कोण अन्य दो कोणों के योगफल के बराबर होता है।

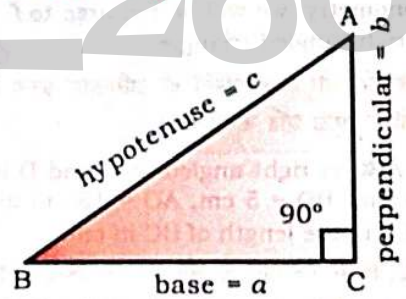
$\angle B = \angle A + \angle C = 90°$

(ii) (a) **Pythagoras Theorem :** In a right triangle, the square of the hypotenuse is equal to the sum of the square of the other two sides.

पायथागोरस प्रमेय : किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

If a, b and c be three sides of a right-angled triangle, then according to the Pythagoras Theorem,

यदि a, b और c किसी समकोण त्रिभुज की तीन भुजाएँ हों, तो पायथागोरस प्रमेय के अनुसार



$a^2 + b^2 = c^2$

Example : $3^2 + 4^2 = 5^2$

(b) **Pythagorean Triplets :** A set of three integers a, b, c which satisfy Pythagoras Theorem ($a^2 + b^2 = c^2$) or are the sides of aright-angled triangle is called Pythagorean triplets.

पायथागोरियन ट्रिपलेट : तीन पूर्णांकों a, b और c का समूह जो पायथागोरस प्रमेय ($a^2 + b^2 = c^2$) को संतुष्ट करे या किसी समकोण त्रिभुज की भुजा हो, पायथागोरियन ट्रिपलेट कहलाता है।

The smallest Pythagorean triplet is (3, 4, 5).

सबसे छोटी पायथागोरियन ट्रिपलेट (3, 4, 5) है।

If (a, b, c) be a Pythagorean triplets, then (ak, bk, ck) or $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ will also be the Pythagorean triplet.

यदि (a, b, c) पायथागोरियन ट्रिपलेट हो, तो (ak, bk, ck) या $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ भी पायथागोरियन ट्रिपलेट होंगे।

@Baka_260

Following Pythagorean triplets are frequently used in the examinations.

निम्न पायथागोरियन ट्रिपलेट परीक्षाओं में बहुतायत पूछे जाते हैं।

- (3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20), (15, 20, 25)
- (5, 12, 13), (10, 24, 26)
- (7, 24, 25), (14, 48, 50), (3.5, 12, 12.5), (21, 72, 75)
- (8, 15, 17)
- (9, 40, 41)
- (11, 60, 61)
- $(1, 1, \sqrt{2})$
- $(1, \sqrt{3}, 2)$
- $(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$
- $(2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2)$

Whenever a right-angled triangle will be given, two of its side will be given and you are required to find the third side by using Pythagoras Theorem. But now we will find the third side directly from the above Pythagorean Triplets.

जब भी कोई समकोण त्रिभुज दिया गया होता है तो इसकी दो भुजाएँ भी दी गई होती हैं और तीसरी भुजा पायथागोरस प्रमेय का प्रयोग करके ज्ञात करनी होती है। परंतु अब हम तीसरी भुजा पायथागोरियन ट्रिपलेट के माध्यम से ज्ञात कर सकते हैं।

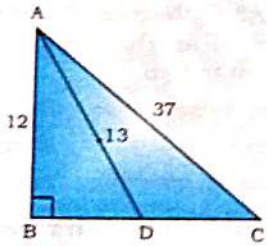
In the most of the questions of geometry, mensuration and trigonometry, we will be required to find the third side of a right-angled triangle.

ज्यामिति, क्षेत्रमिति और त्रिकोणमिति के अधिकांश प्रश्नों में हमें समकोण त्रिभुज की तीसरी भुजा ज्ञात करनी होती है।

Ex. Triangle ABC is right angled at B and D is a point of BC such that BD = 5 cm, AD = 13 cm and AC = 37 cm, then find the length of BC in cm.

त्रिभुज ABC, B पर समकोण है और BC पर बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि BD = 5 सेमी AD = 13 सेमी और AC = 37 सेमी है। BC की लंबाई (सेमी. में) ज्ञात करें।

HINTS:



$\therefore (12)^2 + (BC)^2 = (37)^2$

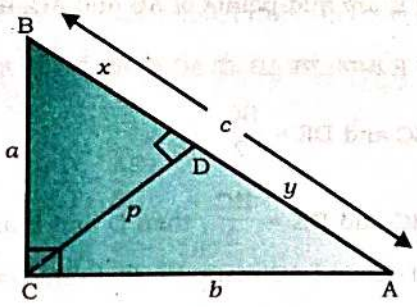
$\Rightarrow (BC)^2 = (37)^2 - (12)^2$

$\Rightarrow BC^2 = 25 \times 49$

$\Rightarrow BC = 5 \times 7 = 35$

(iii) In a right-angled triangle ABC, if a perpendicular (CD) is drawn from the vertex which is right angle (C) to the hypotenuse (AB), then

किसी समकोण त्रिभुज ABC में, यदि शीर्ष (C) जो कि समकोण है, से कर्ण (AB) पर लम्ब (CD) डाला जाता है, तो



(a) (i) $a^2 = x \times c$

(ii) $b^2 = y \times c$

(b) $p^2 = x \times y$

(c) $a \times b = p \times c$

(d) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

In other words,/दूसरे शब्दों में,

(a) (i) $BC^2 = BD \times AB$

(ii) $AC^2 = AD \times AB$

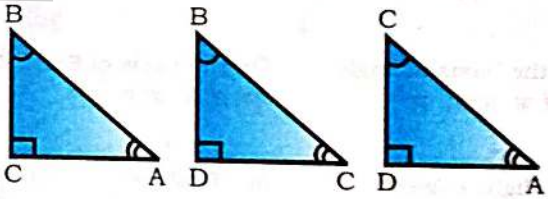
(b) $CD^2 = BD \times AD$

(c) $BC \times AC = CD \times AB$

(d) $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{AC^2}$

To prove the above formula, we take the 3 similar triangles as shown in the figure.

उपर्युक्त सूत्रों को सिद्ध करने के लिए हम तीन समरूप त्रिभुज लेते हैं, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।



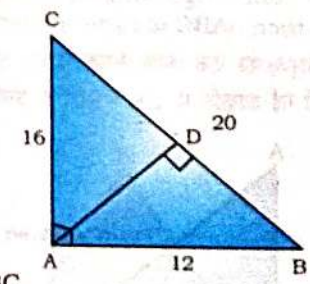
Now, use the concept of ratio of the sides of the similar triangles are equal.

अब अवधारणा, "समरूप त्रिभुजों की भुजाओं का अनुपात बराबर होता है।" का प्रयोग कीजिए।

Ex. In ΔABC, $\angle A = 90°$, $AD \perp BC$ at D. If AB = 12 cm and AC = 16 cm, then what is the length (in cm) of BD?

ΔABC में $\angle A = 90°$, बिन्दु D पर $AD \perp BC$ है। यदि AB = 12 सेमी और AC = 16 सेमी है, तो BD की लंबाई (सेमी में) ज्ञात करें।

HINTS:



$AB^2 = BD \times BC$

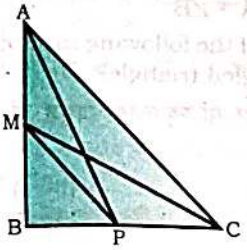
$\Rightarrow 144 = BD \times 20$

$\Rightarrow 7.2 = BD$

(iv) If P and M are two points on the sides BC and AB respectively of ΔABC, right-angled at B, then.

यदि B पर समकोण ΔABC की भुजाओं BC तथा AB पर P तथा M क्रमशः दो बिन्दु हैं, तो

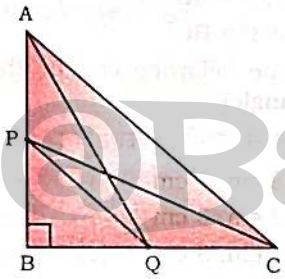
$AP^2 + MC^2 = AC^2 + MP^2$



Ex. Points P and Q are on the sides AB and BC respectively of a triangle ABC, right angled at B. If AQ = 11 cm, PC = 8 cm, and AC = 13 cm, then find the length (in cm) of PQ.

बिन्दु P और Q क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजा AB और BC पर स्थित है, त्रिभुज B परसमकोण है। यदि AQ = 11 सेमी, PC = 8 सेमी और AC = 13 सेमी है, तो PQ की लंबाई (सेमी में) ज्ञात करें।

HINTS:



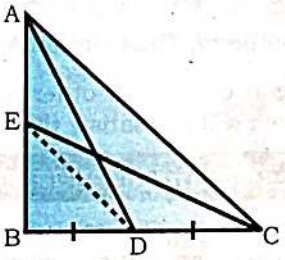
$AQ^2 + PC^2 = AC^2 + PQ^2$

$\Rightarrow 121 + 64 = 169 + PQ^2$

$\Rightarrow 16 = PQ^2$

$\Rightarrow PQ = 4$

(v)



If ΔABC is RAT

AD & CE are medians

$4(AD^2 + CE^2) = 5AC^2$

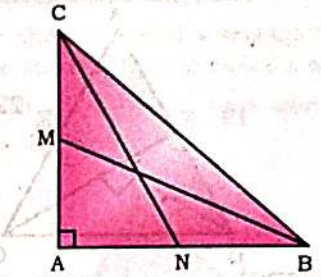
$AD^2 + CE^2 = 5ED^2$

$AD^2 + CE^2 = AC^2 + ED^2$

Ex. In a ΔABC, ∠A = 90°, if BM and CN are two medians, $\frac{BM^2 + CN^2}{BC^2}$ is equal to :

ΔABC में ∠A = 90° यदि BM और CN दो माध्यिका है तो $\frac{BM^2 + CN^2}{BC^2}$ बराबर है :

HINTS:



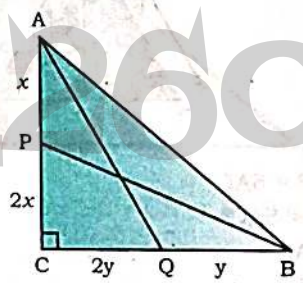
$4(CN^2 + BM)^2 = 5BC^2$

$\Rightarrow \frac{BM^2 + CN^2}{BC^2} = \frac{5}{4}$

Ex. In ΔABC, ∠C = 90°, point P and Q are on side AC and BC respectively, such that AP : PC = BQ : QC = 1: 2, then $\frac{AQ^2 + BP^2}{AB^2}$ is equal to :

ΔABC में ∠C = 90° है। बिन्दु P और Q भुजा AC और BC पर बिन्दु इस प्रकार है कि AP : PC = BQ : QC = 1 : 2, तो $\frac{AQ^2 + BP^2}{AB^2}$ = ?

HINTS:

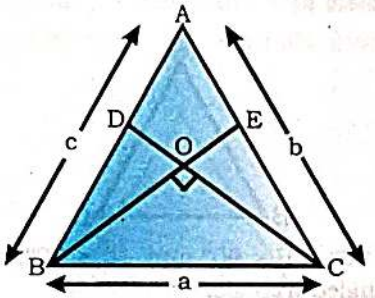


$AQ^2 = 9x^2 + 4y^2$

$BP^2 = 4x^2 + 9y^2$

$\therefore \frac{AQ^2 + BP^2}{AB^2} = \frac{13x^2 + 13y^2}{9x^2 + 9y^2} = \frac{13(x^2 + y^2)}{9(x^2 + y^2)} = \frac{13}{9}$

(vi)



BE & CD are medians

If medians are . (BE ⊥ CD) then,

$AB^2 + AC^2 = 5BC^2$

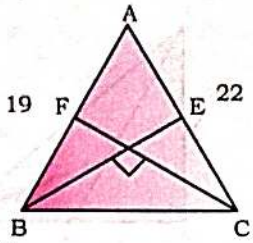
or, $b^2 + c^2 = 5a^2$

Ex. If in a ΔABC, BE and CF are two medians perpendicular to each other and if AB = 19 cm and AC = 22 cm then the length of BC is:

यदि ΔABC में, BE और CF एक दूसरे के लंबवत दो माध्यिकाएँ हैं और यदि AB = 19 सेमी और AC = 22 सेमी है तो BC की लंबाई है:

@Baka_260

HINTS:



$19^2 + 22^2 = 5BC^2$

$\Rightarrow 361 + 484 = 5BC^2$

$\Rightarrow 845 = 5BC^2$

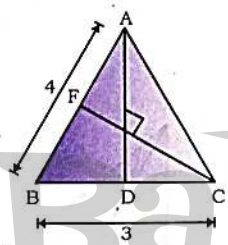
$\Rightarrow BC^2 = 169$

$\Rightarrow BC = 13$

Ex. Consider ΔABC the medians AD & CF intersect at right angles at G. if BC = 3 cm and AB = 4cm, then the length of AC is (in cm):

ΔABC पर विचार करें, माध्यिकाएं AD और CF जो पर समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि BC = 3 सेमी और AB = 4 सेमी है, तो A की लंबाई (सेमी में) है:

HINTS:



$AB^2 + BC^2 = 5AC^2$

$\Rightarrow 16 + 9 = 5AC^2$

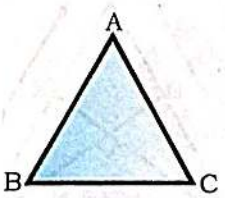
$\Rightarrow 25 = 5AC$

$\therefore AC = \sqrt{5}$

Acute Angles Triangle/न्यूनकोण त्रिभुज

If each of the angles of a triangle is accute, then the triangle is called an acute-angled triangle.

यदि किसी त्रिभुज का प्रत्येक कोण न्यूनकोण हो, तो त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज कहलाता है।



If $\angle A < 90°$, $\angle B < 90°$ and $\angle C < 90°$, then ΔABC is a acute-angled triangle.

यदि $\angle A < 90°$, $\angle B < 90°$ और $\angle C < 90°$ हो, तो ΔABC न्यूनकोण होता है।

Properties of an acute-angled triangle

न्यूनकोण त्रिभुज की विशेषताएँ

(i) Each of the angles of the triangle is acute.

त्रिभुज का प्रत्येक कोण न्यूनकोण होता है।

$0° < \angle A, \angle B, \angle C < 90°$

(ii) The sum of the any two angles of the triangle is always greater than the third angle.

त्रिभुज के दो कोणों का योग हमेशा तीसरे कोण से अधिक होता है।

(a) $\angle A + \angle B > \angle C$

(b) $\angle B + \angle C > \angle A$

(c) $\angle C + \angle A > \angle B$

Ex. Which one of the following cannot be the ratio of angles in acute-angled triangle?

निम्न में से कौन-सा न्यूनकोण त्रिभुज के कोणों का अनुपात नहीं हो सकता है?

(a) 2 : 5 : 8 (b) 4 : 1 : 4

(c) 2 : 3 : 4 (d) 1 : 1 : 1

HINTS:

Using property (ii), Option (a) cant be the ratio of angle of acute-angled triangle.

(iii) The sum of the squares of any two sides of the triangle is greater than the square of the third side.

त्रिभुज के दो भुजाओं के वर्गों का योगफल तीसरी भुजा के वर्ग से अधिक होता है।

(a) $AB^2 + BC^2 > AC^2$

(b) $BC^2 + AC^2 > AB^2$

(c) $AC^2 + AB^2 > BC^2$

Ex. Which of the following can be the 3 sides of accute angled triangle?

निम्न में से कौन-सी किसी न्यूनकोण त्रिभुज की तीन भुजाएँ हो सकती है?

(a) 4 cm, 8 cm, 7 cm

(b) 1 cm, 2 cm, 3 cm

(c) 2 cm, 4 cm, 3 cm

(d) 9 cm, 12 cm, 15 cm

HINTS:

In such type of question you have to check each option using property(ii).

Here, $4^2 + 8^2 > 7^2$, $8^2 + 7^2 > 4^2$ & $7^2 + 4^2 > 8^2$

Satisfied property, Thus Option(A) is right answer.

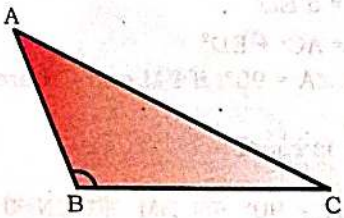
Similarly you can check other options but all other options given will not satisfy the property.

Obtuse Angles Triangle/अधिककोण त्रिभुज

If one of the angle of a triangle is obtuse, then the triangle is called an obtuse-angled triangle.

यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अधिककोण हो, तो त्रिभुज अधिककोण त्रिभुज कहलाता है।

$\angle B > 90°$, $\angle A < 90°$ and $\angle C < 90°$, then



Triangle ABC is obtuse angled triangle.

त्रिभुज ABC एक अधिककोण त्रिभुज है।

@Baka_260

Properties of an obtuse-angled triangle
अधिककोण त्रिभुज की विशेषताएँ

In a ΔABC, ∠B is obtuse, then

त्रिभुज ΔABC में ∠B अधिक हो, तो

(i) Exctly one of the angle of the triangle is obtuse and other two angles are acute.

त्रिभुज का एक कोण अधिक और अन्य दो कोण न्यूनकोण होते हैं।

$\angle B = 90°$ and $0° < \angle A, \angle C < 90°$

(ii) The sum of the two acute angles of the triangle is less than the obtuse angle.

त्रिभुज के दो न्यूनकोणों का योग अधिक कोण से कम होता है।

$(\angle A + \angle C) < \angle B$

(iii) The sum of the square of two smaller sides is lesss than the square of the third side (the largest side).

दो छोटी भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा (सबसे बड़ी भुजा) के वर्ग से कम होता है।

(a) $AB^2 + BC^2 < AC^2$

(b) $AB^2 + AC^2 < BC^2$

(c) $AC^2 + BC^2 < AB^2$

Ex. The sides of a triangle are in the ratio 4 : 6 : 8. The triangle is a/an:

एक त्रिभुज की भुजाएँ 4:6:8 के अनुपात में है। यह कैसा त्रिभुज है?

(a) Isoceles Triangle

(b) Obtuse-Angled Triangle

(c) Acute-Angled Triangle

(d) Right-Angled Triangle

HINTS:

Here, $4^2 + 6^2 < 8^2$

$52 < 64$

Thus, The given ratio of sides is of obtuse-angle triangle.

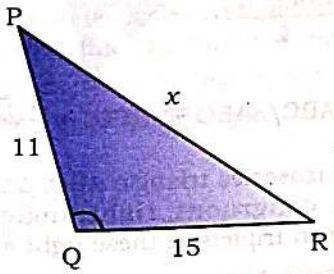
Ex. In an obtuse angle triangle PQR, angle Q is obtuse angle if side PQ=11cm, QR=15cm then find minimum possible integer length of side PR?

एक अधिक कोण त्रिभुज में, कोण Q अधिक कोण है। यदि भुजा PQ = 11 सेमी, QR = 15 सेमी तब भुजा PR की न्यूनतम लंबाई क्या होगी।

(a) 18 cm (b) 19 cm

(c) 23 cm (d) 22 cm

HINTS:



$11^2 + 15^2 < x^2$

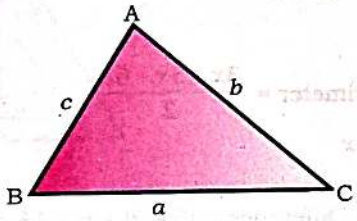
$346 < x^2$

Thus, (b) is right answer.

Scalene Triangle/विषमबाहु त्रिभुज

If all of the three sides of a triangle are of different lengths then the triangles is called a scalene triangle.

यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ अलग-अलग लम्बाइयों के हों तो त्रिभुज विषमबाहु कहलाता है।



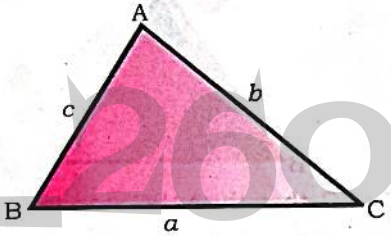
$AB \neq BC \neq CA$

or $a \neq b \neq c$, then ΔABC is an scalene triangle.

Properties of an scalene triangle
विषमबाहु त्रिभुज की विशेषताएँ

(i) No two sides are equal in length, i.e.

कोई दो भुजा लंबाई में बराबर नहीं होती है।



$AB \neq BC \neq CA$ or $a \neq b \neq c$

(ii) No two angles are equal, i.e.

कोई दो कोण बराबर नहीं होते हैं

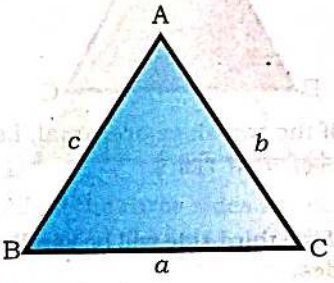
$\angle A \neq \angle B \neq \angle C$

(iii) Triangle may be one of the acute angled, right angled or obtuse angled.

त्रिभुज न्यूनकोण, समकोण या अधिककोण में से कोई एक हो सकता है।

(iv) Perimeter, Semi-perimeter and Area of scelene triangle

विषमबाहु त्रिभुज का परिमाप, अर्द्ध-परिमाप और क्षेत्रफल



Perimter/परिमाप = a + b + c

Semi-perimeter/अर्द्ध-परिमाप = $\frac{a+b+c}{2}$

Area of ΔABC/त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

@BaKa_260

Ex. The sides of the scalene triangle ABC are in the ratio 3 : 5 : 6 and the semi-perimeter is 42 cm, what is the difference of the largest and the smallest sides of the triangle?

किसी विषमबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं का अनुपात 3 : 5 : 6 और अर्द्ध-परिमाप 42 सेमी है। सबसे बड़ी और सबसे छोटी भुजा की लंबाई में अंतर है -

HINTS:

$$\text{Semi-perimeter} = \frac{3x+5x+6x}{2}$$

$\Rightarrow 42 = 7x$

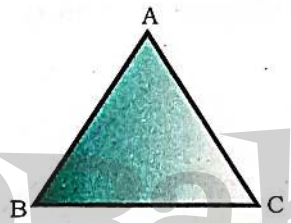
$\Rightarrow x = 6$

Required Difference = $(6 - 3) \times 6 = 18$ cm

Isoceles Triangle/समद्विबाहु त्रिभुज

If two sides of a triangle are equal in length, then the triangle is called an isosceles triangle.

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई बराबर हो, तो त्रिभुज समद्विबाहु कहलाता है।



If AB = AC ≠ BC, then the ΔABC is an isosceles triangle.

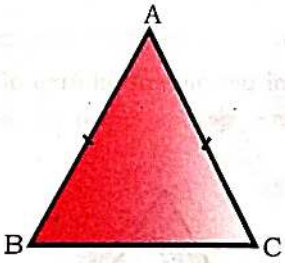
यदि AB = AC ≠ BC हो, तो ΔABC समद्विबाहु होता है।

Properties of an isosceles triangle

समद्विबाहु त्रिभुज की विशेषताएँ

ΔABC is an isosceles triangle in which AB = AC.

ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC



(i) The length of the two sides are equal, i.e.
दो भुजाओं की लंबाई बराबर होती है
AB = AC

(ii) The length of the third side will be smaller or larger than the equal sides.

तीसरी भुजा की लंबाई बराबर भुजाओं की लंबाई से अधिक या कम हो सकती है।

BC > AB = AC or BC < AB = AC

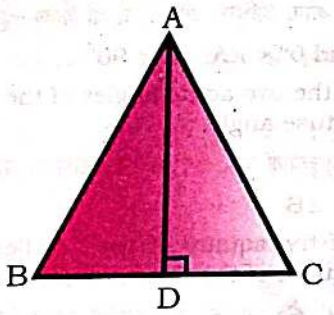
(iii) Two angles opposite to the equal sides are equal.

समान भुजाओं के विपरीत का कोण बराबर होता है।

$\angle B = \angle C$ (opposite to the side AC and AB)

(iv) In an isosceles ΔABC, the median, the angle bisector, perpendicular bisector and the altitude of unequal side is the same and it divides the ΔABC in two congruent (equal) right-angled triangle.

समद्विबाहु त्रिभुज ABC में असमान भुजा की माध्यिका, कोण समद्विभाजक, लम्ब समद्विभाजक और लम्ब समान होते हैं और यह त्रिभुज ABC को दो सर्वांगसम (समान) समकोण त्रिभुजों में विभाजित करते हैं।



In ΔABC,

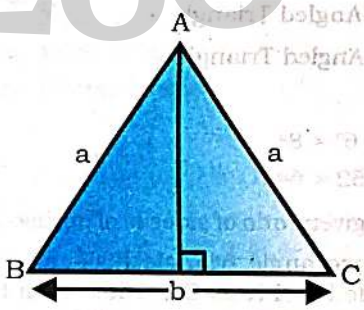
AD is the median, the angle bisector perpendicular bisector and the altitude.

AD माध्यिका, कोण समद्विभाज, लम्ब समद्विभाजक और लम्ब है।

AD ⊥ BC and BD = DC, then

DABD ≅ ACD

(v) Perimeter, semi-perimeter and Area
परिमाप, अर्द्ध-परिमाप और क्षेत्रफल



Perimeter/परिमाप = AB + BC + CA = $2a + b$.

Semi perimeter/अर्द्ध-परिमप

$$= \frac{AB + BC + CA}{2} = a + \frac{b}{2}$$

$$AD = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

Area of ΔABC/ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

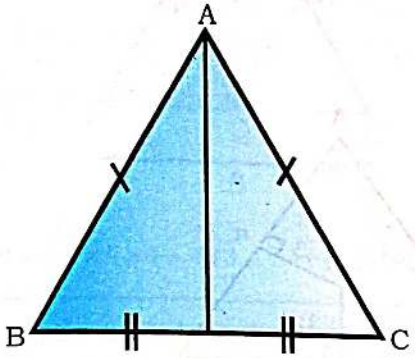
Note : In isosceles triangle ABC, ΔABD and ΔADC are the two congruent right-angled triangle. Use Pythagorean triplets in these right angled triangle.

नोट : समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, ΔABD और ΔADC दो समकोण सर्वांगसम त्रिभुज हैं। इन समकोण त्रिभुजों में पायथागोरियन ट्रिपलेट का प्रयोग करें।

@Baka_200

(vi) If a line (which joins the common vertex of two equal sides of a triangle) bisects the base then that line is perpendicular to the base and vice versa.

यदि एक रेखा (जो दो त्रिभुज की दो समान भुजाओं के उभयनिष्ठ शीर्ष को मिलाती है) आधार को समद्विभाजित करती है तो वह आधार पर लम्ब भी होती है।

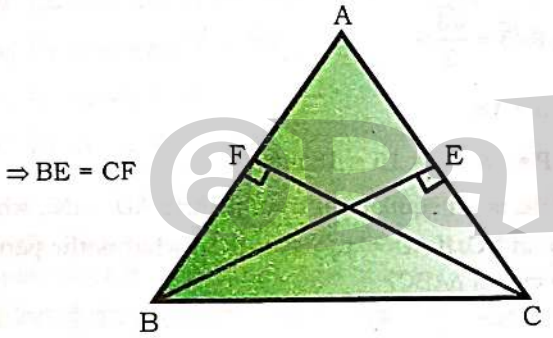


If AB = AC and BD = DC

$\Rightarrow \angle ADB = \angle ADC = 90°$

(vii) If AB = AC and BE ⊥ AC and CF ⊥ AB

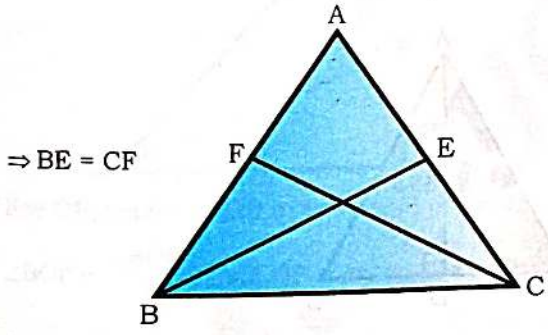
यदि AB = AC तथा BE ⊥ AC और CF ⊥ AB



$\Rightarrow$ BE = CF

(viii) If AB = AC, E and F are the mid-points

यदि AB = AC, E तथा F मध्य बिन्दु हैं



$\Rightarrow$ BE = CF

Ex. The perimeter of an isosceles triangle is 50 cm. If the base is 18 cm, then find the length of the equal sides.

एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 50 सेमी है। यदि इसका आधार 18 सेमी है, तो बराबर भुजाओं की लंबाई ज्ञात करें।

HINTS:

Perimeter, 2a + b = 50

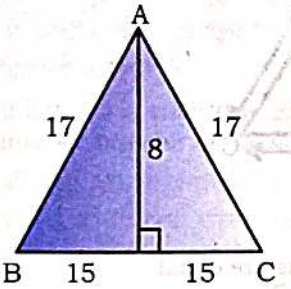
$\Rightarrow$ 2a + 18 = 50

$\Rightarrow$ a = 16

Ex. The length of perpendicular dropped on the base on an isosceles triangle is 8 cm. If its perimeter is 64 cm, what is the area of this triangle?

किसी समद्विबाहु त्रिभुज के आधार पर डाले गए लम्ब की लम्बाई 8 सेमी है। यदि इसका परिमाप 64 सेमी हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या है?

HINTS:



Check 30 + 34 = 64

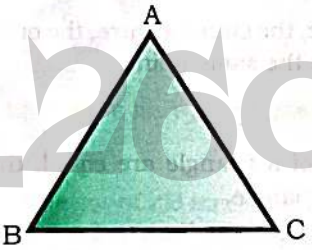
[Apply concept of triplet, to solve quickly]

Area = $\frac{1}{2} \times 30 \times 4 = 120 \text{ cm}^2$

Equilateral Triangle/समबाहु त्रिभुज

If all the three sides of a triangle are equal in length, then the triangle is called an equilateral triangle.

यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई समान हो तो त्रिभुज समबाहु कहलाता है।



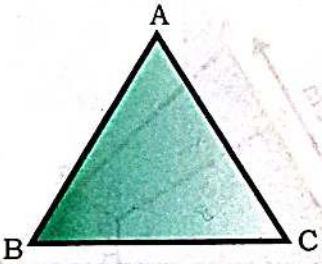
If AB = BC = AC, then ΔABC is an equilateral triangle.

यदि AB = BC = AC हो, तो ΔABC समबाहु होगा।

Properties of an equilateral triangle
समबाहु त्रिभुज की विशेषताएँ

Let ΔABC is an equilateral triangle in which AB = BC = AC

माना ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = BC = AC



(i) The length of all the three sides are equal,

तीनों भुजाओं की लंबाई बराबर होती है।

i.e. AB = BC = AC

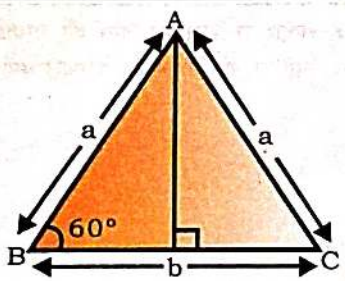
(ii) All the three angles will be equal and the value of each angle will be 60°

तीनों कोणों की माप बराबर होती है और प्रत्येक कोण का माप 60° होता है।

i.e. $\angle A = \angle B = \angle C$

@Baka_260

(iii)



In an equilateral ΔABC,

समबाहु ΔABC में

(a) All the three medians are equal

तीनों माध्यिकाएँ बराबर होती है।

(b) All the three altitudes are equal

तीनों लंब बराबर होते हैं।

(c) Each median = Each altitude = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

प्रत्येक माध्यिका = प्रत्येक लम्ब = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

(iv) In equilateral ΔABC/समबाहु ΔABC में

The incentre, the circumcentre, the orthocentre and the centroid are the same-point.

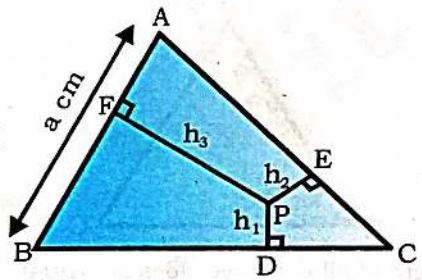
अंत: केन्द्र, बाह्य केन्द्र, लम्ब केन्द्र और केन्द्रक सभी एक ही बिन्दु पर होते हैं।

(v) If altitudes of a triangle are equal, the triangle is an equilateral triangle.

यदि किसी त्रिभुज के लम्ब बराबर हैं तो त्रिभुज, समबाहु त्रिभुज होता है।

(vi) If P is a point inside an equilateral triangle ABC, the sum of altitudes from the point P to the sides AB, BC and AC equal to the median of the ΔABC.

यदि किसी समबाहु त्रिभुज ABC के अंदर P कोई बिन्दु है तो P से भुजा AB, BC और AC पर डाले गए लम्बों का योगफल ΔABC की माध्यिका के बराबर होता है।



Let the altitudes from point P to side BC, AC and AB be h_1, h_2 and h_3 respectively and the side of the triangle be a, then

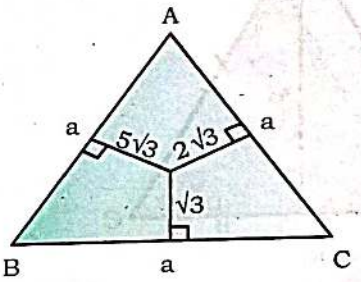
माना बिन्दु P से भुजाओं BC, AC और AB पर डाले गए लंब क्रमश: h_1, h_2 और h_3 हैं तथा त्रिभुज की भुजा a है, तो

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Ex. 'O' is a point in the interior of an equilateral triangle. The perpendicular distance from 'O' to the sides are $\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{3}$ cm, $5\sqrt{3}$ cm. The perimeter of the triangle is:

'O' एक समबाहु त्रिभुज के अभ्यंतर में एक बिन्दु है। 'O' से भुजाओं की लंबवत दूरी $\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{3}$ cm, $5\sqrt{3}$ cm है। त्रिभुज की परिमाप है।

HINTS:



$$\therefore (\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

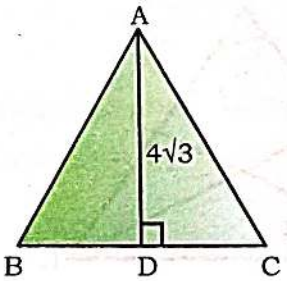
$$\Rightarrow a = 16$$

$$\therefore P = 3a = 3 \times 16 = 48 \text{ cm}$$

Ex. ΔABC is an equilateral triangle and AD ⊥ BC, where D lies in BC. If AD = $4\sqrt{3}$ cm, then what is the perimeter (in cm) of ΔABC?

त्रिभुज ABC एक समबाहु त्रिभुज है तथा AD ⊥ BC है, जहाँ D, BC पर स्थित है। यदि AD = $4\sqrt{3}$ सेमी है तो त्रिभुज ABC का परिमाप (सेमी में) कितना होगा?

HINTS:



$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 8$$

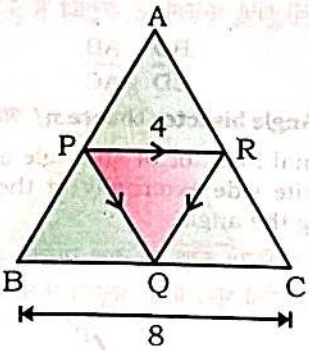
$$\therefore P = 3a = 24$$

Ex. ABC is an equilateral triangle. P, Q and R are the midpoints of sides AB, BC and CA respectively. If the length of the side of the triangle ABC is 8 cm, then the area of ΔPQR is :

ABC एक समबाहु त्रिभुज है। P, Q और R क्रमश: भुजाओं AB, BC तथा CA के मध्य बिन्दु हैं। यदि त्रिभुज ABC की भुजा की लंबाई 8 सेमी है, तो त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल कितना होगा?

@Baka_26

HINTS:



$\therefore \Delta PQR = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 4 = 4\sqrt{3}$

Centres of triangle/त्रिभुज के केन्द्र

We will study 4 types of centres of a triangle

हम यहाँ त्रिभुज के 4 प्रकार के केन्द्रों का अध्ययन करेंगे

(i) Incentre/अंत: केन्द्र

(ii) Circumcenter/बाह्य केन्द्र

(iii) Orthocentre/लम्ब केन्द्र

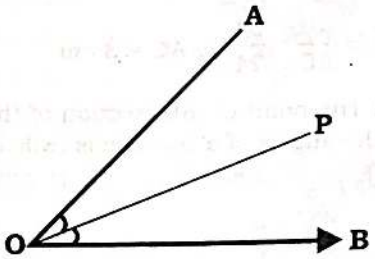
(iv) Centroid/केन्द्रक

(v) Excentre/बहिकेन्द्र

Incentre/अंत: केन्द्र

Angle Bisector : A line which divides an angle in two equal parts is called the angle bisector.

कोण समद्विभाजक : एक ऐसी रेखा जो किसी कोण को दो बराबर भागों में विभाजित कर दे, कोण समद्विभाजक कहलाते हैं।



If line OP divides ∠AOB in two equal parts, i.e. ∠AOP = ∠BOP = $\frac{\angle AOB}{2}$, then OP is an angle bisector.

यदि रेखा OP, ∠AOB को दो बराबर भागों में विभाजित करती है, अर्थात् ∠AOP = ∠BOP = $\frac{\angle AOB}{2}$, तो OP कोण समद्विभाजक होता है।

Angle bisector of an angle of a triangle
किसी त्रिभुज का कोण समद्विभाजक

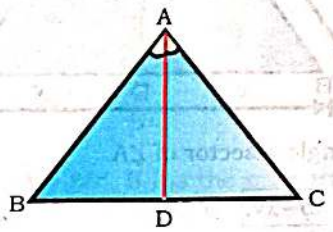
- Interior or Internal आंतरिक या अंत:
- Exterior or External बाहरी या बाह्य

Internal angle bisector of a triangle : If a line bisects the Internal angle of a triangle, then it is called internal angle bisector of a triangle.

किसी त्रिभुज का आंतरिक समद्विभाजक : यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज के आंतरिक कोण को द्विभाजित करे तो यह त्रिभुज की आंतरिक कोण द्विभाजक कहलाती है।

If line AD is such that ∠BAD = ∠CAD, then AD is the interior bisector of the angle A.

यदि रेखा AD इस प्रकार है कि ∠BAD = ∠CAD, तो AD आंतरिक कोण A का द्विभाजक कहलाती है।



(a) **Internal Angle bisector theorem**

आंतरिक कोण समद्विभाजक प्रमेय

The Internal bisector of an angle of a triangle divides the opposite side internally in the ratio of the sides containing the angle, i.e.

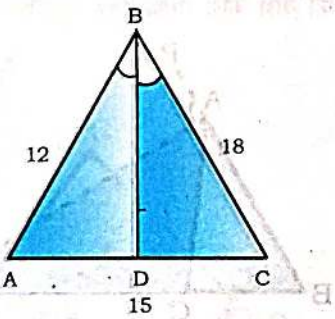
किसी त्रिभुज के किसी कोण का आंतरिक समद्विभाजक विपरीत भुजा को कोण को बनाने वाली दोनों भुजाओं के अनुपात में अंत:विभाजित करता है।

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

Ex. In ΔABC, the bisector of ∠B meets AC at the point D. If AB = 12 cm, BC = 18 cm and AC = 15 cm, then find the length (in cm) of AD.

यदि ΔABC में, ∠B का समद्विभाजक बिंदु D पर AC से मिलता है। यदि AB = 12 सेमी, BC = 18 सेमी और AC = 15 सेमी है, तो AD की लंबाई (सेमी में) ज्ञात कीजिए।

HINTS:



As AD is the angle bisector of ∠ABC

So, $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

$\Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{AD}{DC}$

$\Rightarrow AD : DC = 2 : 3$

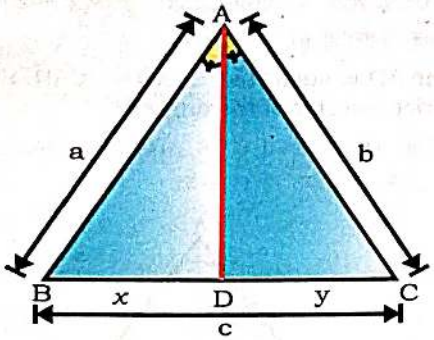
Also, AC = 15 cm

So, $AD = \frac{15}{(2+3)} \times 2 = 6$ cm

@Baka_260

How to find length of angle bisector
कोण के समद्विभाजक की लंबाई कैसे ज्ञात करें

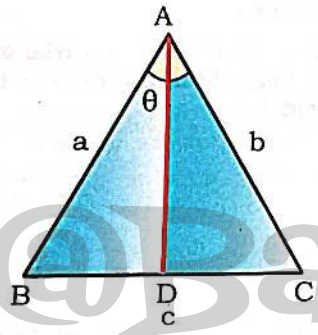
(i)



AD = angle bisector of ∠A.

$\boxed{AD^2 = ab - xy.}$

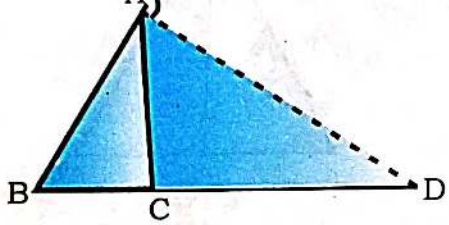
(ii)



$\boxed{AD = \frac{2ab\cos\theta}{a+b}}$

External Angle Bisector of a Triangle
त्रिभुज का वाह्य कोण समद्विभाजक

If a line bisects the exterior angle of a triangle, then it is called external angle bisector of a triangle.
यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज के वाह्य कोण को समद्विभाजित करे तो यह त्रिभुज की वाह्य कोण समद्विभाजक कहलाती है।



If line AD is such that $\angle PAD = \angle DAC = \left(\frac{\pi - A}{2}\right)$, then AD is the exterior bisector of the angle ∠A.

यदि रेखा AD इस प्रकार है कि $\angle PAD = \angle DAC = \left(\frac{\pi - A}{2}\right)$, तो AD, ∠A का वाह्य समद्विभाजक कहलाती है।

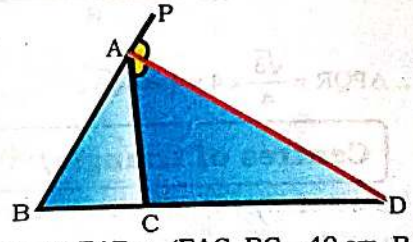
The external bisector of an angle of a triangle divides the opposite side externally in the ratio of the sides containing the angle.
किसी त्रिभुज के किसी कोण का वाह्य समद्विभाजक विपरीत भुजा को कोण को बनाने वाली दोनों भुजाओं के अनुपात में वाह्यत: विभाजित करता है।

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

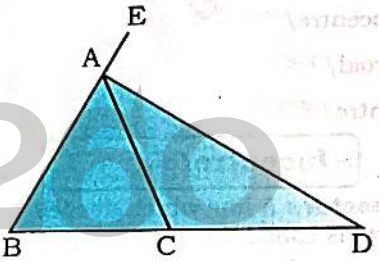
(b) **External Angle bisector theorem/ वाह्य कोण समद्विभाजक प्रमेय**

The external bisector of an angle of a triangle divides the opposite side externally in the ratio of the sides containing the angle.
किसी त्रिभुज के किसी कोण का वाह्य समद्विभाजक विपरीत भुजा को कोण को बनाने वाली दोनों भुजाओं के अनुपात में वाह्यत: विभाजित करता है।

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$



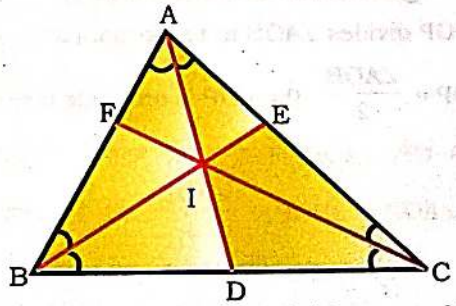
Ex. If the given figure, $2\angle EAD = \angle EAC$, BC = 40 cm, BA = 8 cm and CD = 24 cm, then AC is equal to
दिये गये चित्र में $2\angle EAD = \angle EAC$, BC = 40 सेमी, BA = 8 सेमी और CD = 24 सेमी है तो AC बराबर है :



HINTS:
Since AD is angle bisector

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{8}{AC} = \frac{64}{24} \Rightarrow AC = 3 \text{ cm}$$

Incentre: The point of intersection of the internal bisector of the angles of a triangle is called the incentre.
अन्त:केन्द्र : त्रिभुज की आंतरिक समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिन्दु अंत:केन्द्र कहलाता है।

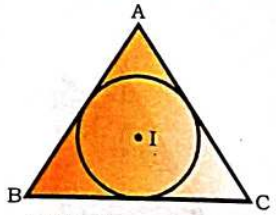


If AD, BE and CF are the angle bisectors of the ∠A, ∠B and ∠C respectively, then all the three bisectors of the angles pass through a point, which is called the incentre of the ΔABC. It is generlly denoted by 'I'.
यदि AD, BE और CF क्रमश: ∠A, ∠B और ∠C के समद्विभाजक हों तो कोणों के सभी समद्विभाजक एक बिन्दु से होकर गुजरते हैं, जिसे ΔABC का अंत:केन्द्र कहते हैं। इसे सामान्यत: I से निरूपति किया जाता है।

@Baka_260

In other word, the incentre is the centre of the incircle of a triangle.

दूसरे शब्दों में, अंत:केन्द्र त्रिभुज के अंतवृत्त का केन्द्र होता है।



I → Incentre of ΔABC

I → Incentre of the circle.

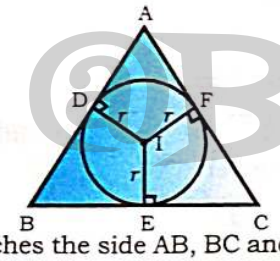
Properties of incentre/अंत:केन्द्र की विशेषताएँ

(i) All the three internal bisectors of the angles of a triangle pass through a point (incentre).

किसी त्रिभुज के सभी आंतरिक समद्विभाजक एक बिन्दु (अंत:केन्द्र) से होकर गुजरते हैं।

(ii) The incentre of the triangle is equidistance from all the three sides of the triangle and the distance is equal to the inradius.

त्रिभुज का अंत:केन्द्र त्रिभुज के तीनों भुजाओं से समान दूरी पर होता है और यह दूरी अंत: त्रिज्या के बराबर होती है।



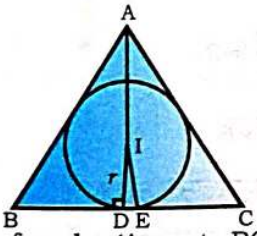
If circle touches the side AB, BC and AC at points D, E and F respectively and I be the incentre, then

यदि वृत्त भुजाओं AB, BC और AC को क्रमश: बिन्दुओं D, E और F पर स्पर्श करता हो और I अंत:केन्द्र हो तो

ID = IE = IF (inradius)

Note : The bisector of the angle ∠A of ΔABC may or may not intersect side BC at point E where the incircle touches the side BC of the triangle and the same in true for other angle bisectors.

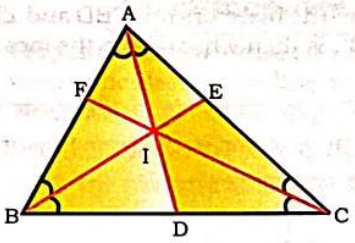
नोट : त्रिभुज ΔABC के कोण ∠A का समद्विभाजक भुजा BC को बिन्दु E पर प्रतिच्छेद कर भी सकता है या नहीं भी कर सकता है जबकि अंत:वृत्त त्रिभुज की भुजा BC को स्पर्श करता है और यह दूसरे समद्विभाजकों के लिए भी सत्य है।



The bisector of angle ∠A meets BC at D and the side BC touches the circle at E.

∠A का समद्विभाजक BC को बिन्दु D पर मिलता है और भुजा BC वृत्त को E पर स्पर्श करती है।

(iii)



$$\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$$

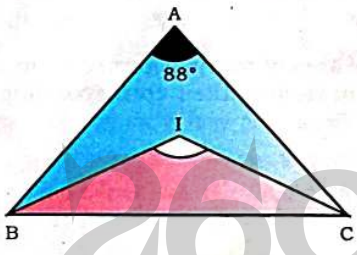
$$\angle AIC = 90° + \frac{\angle B}{2}$$

$$\angle AIB = 90° + \frac{\angle C}{2}$$

Ex. In ΔABC, ∠A = 88°. If I is the incentre of the triangle, then the measure of ∠BIC is:

ΔABC में, ∠A = 88° यदि I त्रिभुज का अंत: केंद्र है, तो ∠BIC का माप है:

HINTS:



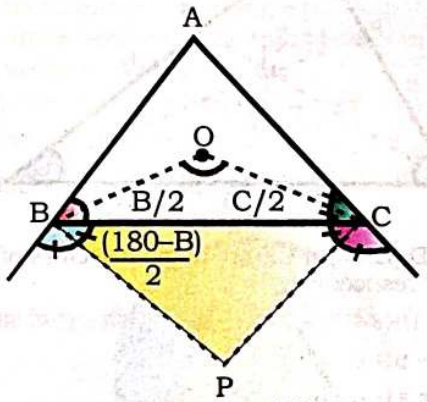
We know that, $\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$

So, $\angle BIC = 90° + \frac{88°}{2} = 90° + 44° = 134°$

(iv) The angle between the external bisectors of two angles of a triangle is difference between right angle and half of the third angle.

त्रिभुज के दो कोणों के वाह्य समद्विभाजकों के बीच का कोण, समकोण और तीसरे कोण के आधे का अंतर होता है।

$$\angle BPC = 90 - \frac{\angle A}{2}$$



Note: If in ΔABC, the internal bisectors of ∠B and ∠C meet at O and the external bisectors of ∠B and ∠C meet at P, then

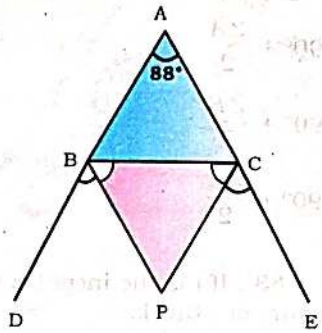
∠BOC + ∠BPC = 180°.

@Baka_260

Ex. The sides of ΔABC, AB and AC are extended to the points D and E, respectively. The bisectors of ∠CBD and ∠BCE meet at P. If ∠A = 88°, is then what will be the measure of ∠P?

ΔABC, AB और AC की भुजाएँ क्रमशः बिंदु D और E तक बढ़ाया जाता हैं। ∠CBD और ∠BCE के समद्विभाजक P पर मिलते हैं। यदि ∠A = 88° है, तो ∠P का माप क्या होगा?

HINTS:



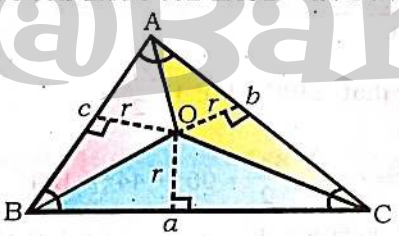
$$\angle P = 90° - \frac{1}{2}\angle A$$

$$\Rightarrow \angle P = 90° - \frac{1}{2} \times 88° = 46°$$

(v) The ratio of area of triangle formed by incentre and two vertex are in ratio in their corresponding sides.

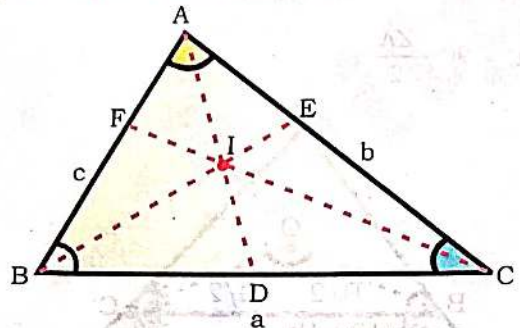
अंत:केन्द्र और त्रिभुज के दो शीर्षों से बने त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजओं के अनुपात के बराबर होता है।

Ar ΔBOC : Ar ΔAOC : Ar ΔAOB = a : b : c



(vi) Incentre divides each angle bisector in the ratio of length of sum of two adjacent sides and opposite side.

अंत: केन्द्र प्रत्येक कोण समद्विभाजक को दो संगत भुजाओं और विपरीत भुजा के अनुपात में विभाजित करता है।



Here, AD, BE and CF are angle bisectors of ∠A, ∠B and ∠C respectively.

यहाँ AD, BE और CF क्रमशः ∠A, ∠B और ∠C के समद्विभाजक हैं।

AI : ID = b + c : a

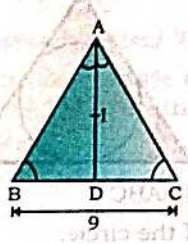
BI : IE = a + c : b

CI : IF = a + b : c

Ex. The perimeter of ΔABC is 24 cm and its side, BC = 9 cm. AD is the bisector of ∠BAC, while I is the incentre AI : ID is equal to :

त्रिभुज ABC का परिमाप 24 सेमी है तथा इसकी भुजा BC = 9 सेमी है। AD, ∠BAC का कोण समद्विभाजक है जबकि I अंत:केन्द्र है। AI : ID किसके बराबर है?

HINTS



$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB + AC}{BC} = \frac{15}{9}$$

Inradius/अंत:त्रिज्या

(i) Inradius of a triangle/ त्रिभुज की अंत:त्रिज्या

$$= \frac{\Delta}{s} = \frac{\text{Area / क्षेत्रफल}}{\text{Semi - perimeter / अर्द्ध - परिमाप}}$$

Ex. In a ΔABC, perimeter is 24 cm and inradius is 7 cm. Find the area of ΔABC.

ΔABC में , परिधि 24 सेमी और अंत:त्रिज्या 7 सेमी है। ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS:

p = 24 cm r = 7cm

$$r = \frac{ar\Delta ABC}{\text{Semi} - \text{perimeter}} \Rightarrow 7 = \frac{ar\Delta ABC}{12}$$

$$\Rightarrow ar\ \Delta ABC = 84\ cm^2$$

(ii) If triangle is not right angled then find out inradius by following relation

यदि त्रिभुज समकोण नहीं है तो अंत:त्रिज्या निम्न संबंध से निकालते हैं।

$$r = \frac{\Delta}{s}$$

Where, $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Ex. Find in-radius of a triangle whose sides are 13 cm, 14cm and 15 cm.

उस त्रिभुज की अंत:त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 13 सेमी, 14 सेमी और 15 सेमी हैं।

HINTS:

$$S = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

$$\Delta = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6}$$

$$= \sqrt{3 \times 7 \times 4 \times 2 \times 7 \times 2 \times 3}$$

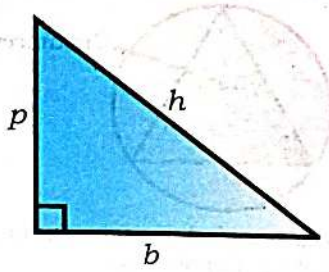
$$= 3 \times 7 \times 2 \times 2 = 84\ cm^2$$

Now, $r = \frac{\Delta}{s} = \frac{84}{21} = 4$ cm

@Baka_260

(ii) Inradius of a right-angled triangle/समकोण त्रिभुज की अंत:त्रिज्या

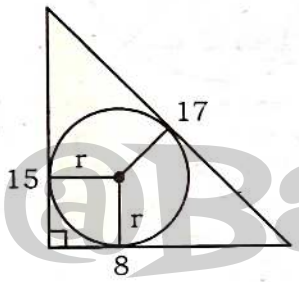
$$r = \frac{p+b-h}{2}$$



Ex. A circle inscribed in a right-angled triangle. The lengths of the two sides containing the rightangles are 15 cm and 8 cm.

एक समकोण त्रिभुज में एक वृत्त अंत:स्थापित है। समकोण बनाने वाली दो भुजाओं की लंबाई 15 सेमी और 8 सेमी है। अंत:वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करें।

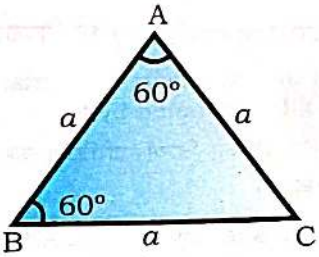
HINTS:



$$r = \frac{p+b-h}{2} = \frac{15+8-17}{2} = 3 \text{ cm}$$

(iii) Inradius of an equilateral triangle/समबाहु त्रिभुज की अंत:त्रिज्या

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\text{Side}}{2\sqrt{3}}$$



Ex. ΔPQR is an equilateral triangle and the centroid of ΔPQR is point A. If the side of the triangle is 12 cm, then what is the length of PA?

Δ PQR एक समबाहु त्रिभुज है तथा ΔPQR को केंद्रक बिंदु A है। यदि त्रिभुज की भुजा 12 सेमी हो, तो PA की लंबाई कितनी है?

HINTS:

IMAGE

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{12 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

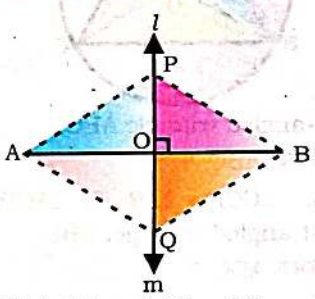
$$PA = 2 \times r = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = FB^2 + DC^2 + AE^2$$

Circumcentre/परिकेन्द्र

Perpendicular bisector : If a line bisects a line segment perpendicularly, the line is called a perpendicular bisector.

लम्ब समद्विभाजक : यदि कोई रेखा किसी रेखाखंड को लम्बवत द्विभाजित करे तो रेखा लम्ब समद्विभाजक कहलाती है।



If the line LM ⊥ AB and AO = OB,

then AP = PB and AQ = BQ

lm is the perpendicular bisector of AB

Circumcentre: The point of intersection of the perpdndicular bisectors of the sides of a triangle is called the circumcentre.

परिकेन्द्र: किसी त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिन्दु को परिकेन्द्र कहते हैं।



OD ⊥ AB and AD = BD

OE ⊥ BC and BE = EC

OF ⊥ AC and CF = FA

Properties of Circumcircle/परिकेन्द्र की विशेषताएँ

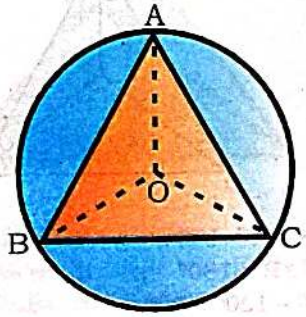
(i) All the three perpendicular bisectors of the sides of a triangle pass through a point (circumcentre).

किसी त्रिभुज के भुजाओं के सभी लम्ब समद्विभाजक एक ही बिन्दु (परिकेन्द्र) से होकर गुजरते हैं।

(ii) The circumcentre of a triangle is equal-distance from all the three vertices of the triangle and the distance is equal to the circumradius, i.e.

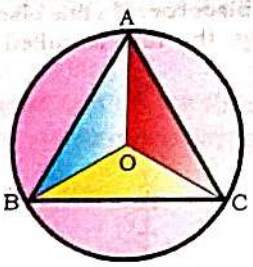
त्रिभुज का परिकेन्द्र त्रिभुज के तीनों शीर्षों से समान दूरी पर होता है और यह दूरी परित्रिज्या के बराबर होती है।

OA = OB = OC = R (circumradius)



@Baka_Boo

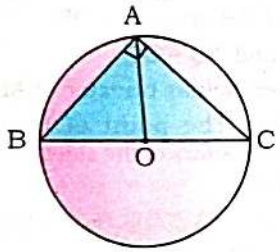
(iii) If O be the circumcentre, then
यदि O परिकेंद्र हो, तो



- In acute-angled triangle ABC,
न्यूनकोण त्रिभुज ABC में

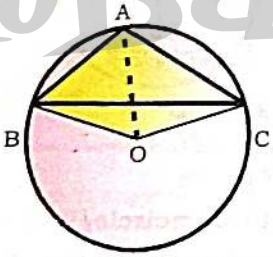
$\angle BOC = 2\angle A$, $\angle COA = 2\angle B$ & $\angle AOB = 2\angle C$

- In a right-angled triangle, ABC,
समकोण त्रिभुज ABC में



$\angle BOC = 2\angle A = 180°$
$\angle COA = 2\angle B = 180° - 2\angle C$
$\angle AOB = 2\angle C = 180° - 2\angle B$

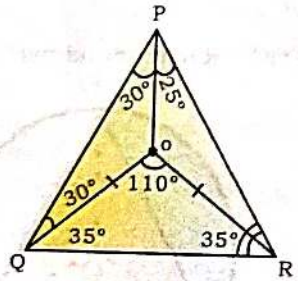
In an obtuse-angled triangle ABC,
अधिककोण त्रिभुज ABC में,



$\angle BOC = 2(180° - \angle A)$
$\angle COA = 2\angle B$ & $\angle BOA = 2\angle C$

Ex. If O be the circumcentre of a triangle PQR and $\angle QOR = 110°$, $\angle OPR = 25°$, the measure of $\angle PRQ$ is :
यदि O, PQR का परिकेन्द्र हो और $\angle QOR = 110°$, $\angle OPR = 25°$ हो, तो $\angle PRQ$ की माप है :

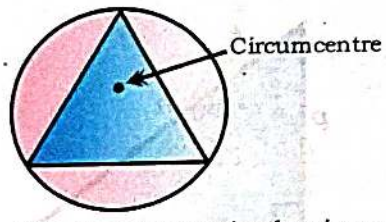
HINTS:



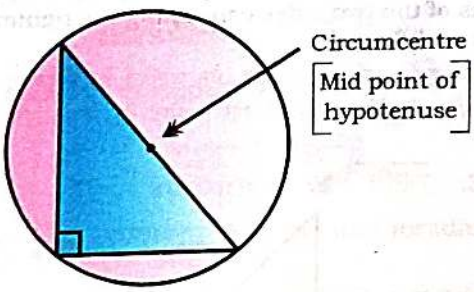
$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$
$55 + 56 + \angle R = 180°$
$\angle R = 180° - 120° = 60°$

(b) Position of Circumcentre/परिकेन्द्र के अवस्थिति

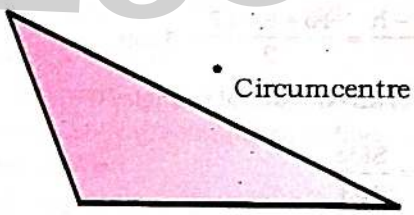
- In a acute triangle, the circumcentre is always inside the triangle.
किसी न्यूनकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र हमेशा त्रिभुज के अंदर होता है।



- In a right-angled triangle, the circumcentre is mid-point of the hypotenuse.
किसी समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र हमेशा कर्ण का मध्य बिन्दु होता है।



In an obtuse-angled triangle, the circumcentre is always outside the triangle and will be at the front of the angle which is obtuse.
किसी अधिक कोण त्रिभुज में परिकेन्द्र हमेशा त्रिभुज के बाहर और अधिक कोण के सामने होता है।

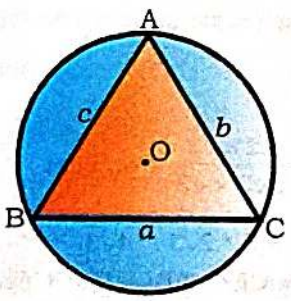


Circumradius/परित्रिज्या

The radius of the circumcircle of a triangle is called the circumradius. It is denoted by R.
किसी त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या, परित्रिज्या कहलाती है। इसे R द्वारा निरूपति किया जाता है।

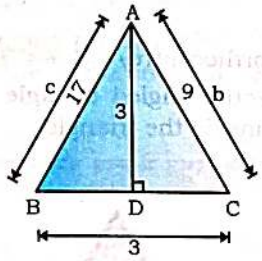
(a) The circumradius of any triangle ABC
किसी भी त्रिभुज ABC की परित्रिज्या

$$= \frac{\text{Product of all three sides}}{4 \times \text{Area of the triangle}} = \frac{abc}{4\Delta}$$



@Baka_260

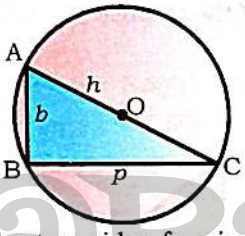
Ex. In a ΔABC, AB = 17 cm, AC = 9 cm, AD is perpendicular on BC & AD = 3 cm. Find the circum radius of this triangle.
∠ABC में AB = 17 सेमी, AC = 9 सेमी & AD = 3 सेमी, AD भुजा BC पर लम्ब है। त्रिभुज की परित्रिज्या ज्ञात कीजिए।
HINTS:



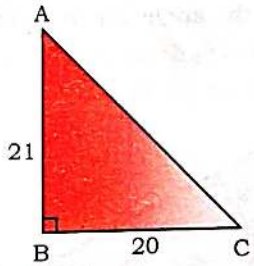
$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{a \times 9 \times 17}{4 \times \frac{1}{2} \times a \times 3} = 25.5$$

(b) The circumradius of a right-angled triangle
समकोण त्रिभुज की परित्रिज्या

$$= \frac{\text{Hypotenuse}}{2} = \frac{h}{2}$$



Ex. The lengths of the two sides forming the right angle of a right-angled triangle are 21 cm and 20 cm. What is the radius of the circle circumscribing the triangle?
समकोण त्रिभुज में समकोण बनने वाली दो भुजाओं की लम्बाई 21 सेमी और 20 सेमी है। इस त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या क्या है?
HINTS:

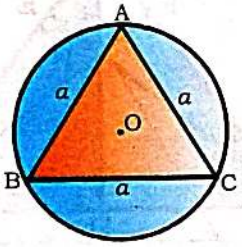


$$AC = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29$$

$$R = \frac{Hyp}{2} = \frac{29}{2} = 14.5$$

(c) The circumradius of an equilateral triangle
समबाहु त्रिभुज की परित्रिज्या

$$= \frac{Side}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



Ex. ABC is an equilateral triangle. If the area of the triangle is $36\sqrt{3}$ then what is the radius of circle circumscribing the triangle ABC ?
ABC एक समबाहु त्रिभुज है। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल $36\sqrt{3}$ है, तो त्रिभुज ABC के परिगत वृत्त की त्रिज्या क्या है?
HINTS:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 36\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^2 = 144$$

$$\Rightarrow a = 12$$

$$\therefore R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{12 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Note: Distance between circum-centre and incentre in any triangle is = $\sqrt{R^2 - 2Rr}$.
किसी भी त्रिभुज में परिकेन्द्र तथा अंत:केन्द्र के बीच की दूरी = $\sqrt{R^2 - 2Rr}$
Where, R = circum-radius/परित्रिज्या &
r = inradius/अंत:त्रिज्या

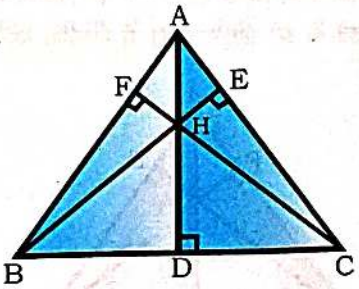
Ex. If the circumradius of a triangle is 6 cm and inradius is 2 cm. Find the distance between circum-centre and incentre.
यदि किसी त्रिभुज की परित्रिज्या 6 सेमी और अंत: त्रिज्या 2 सेमी हो तो उनके परिकेन्द्र तथा अंत:केन्द्र के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
HINTS:
R = 6 r = 2

$$\therefore d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

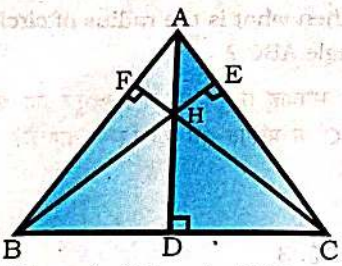
$$= \sqrt{36 - 2 \times 6 \times 2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Orthocentre/लम्ब केन्द्र

Altitude : If a perpendicular drawn from a vertex of a triangle to the opposite side is called the altitude of the triangle.
शीर्ष लम्ब : किसी त्रिभुज के शीर्ष से विपरीत भुजा पर लम्ब डाले गए लम्ब को त्रिभुज का शीर्ष लम्ब कहते हैं।

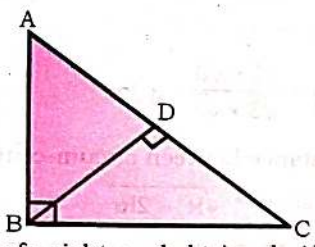


If AD ⊥ BC, therefore AD is the altitude.
(i) Altitudes in an acute angle triangle ABC
न्यून कोण त्रिभुज ABC में शीर्ष लम्ब



(ii) Altitude in right-angled triangle ABC

समकोण त्रिभुज ABC में शीर्ष लम्ब

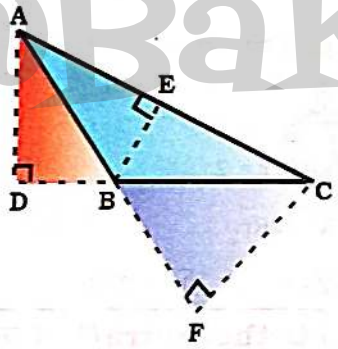


Two altitudes of a right-angled triangle ABC are side AB and BC and the third altitude is BD.

समकोण त्रिभुज ABC के दो शीर्ष लम्ब AB और BC तथा तीसरा शीर्ष लम्ब BD है।

(iii) Altitude in an obtuse-angled triangle.

अधिक कोण त्रिभुज में शीर्ष लम्ब

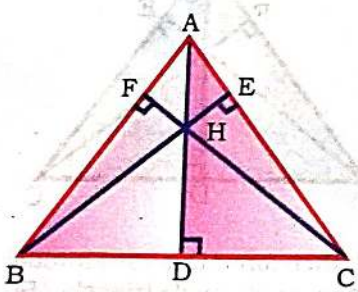


Three altutudes of ΔABC are AD, BE and CF.

त्रिभुज ABC के तीन शीर्ष लम्ब AD, BE और CF हैं।

Orthocentre: Point of intersections of the altitudes of a triangle is called the orthocentre of the triangle. It is generally denoted by H.

लम्बकेन्द्र: किसी त्रिभुज के शीर्ष लम्बों के प्रतिच्छेद विन्दु को त्रिभुज का लम्ब केन्द्र कहते हैं। इसे सामान्यत: H से निरूपित किया जाता है।



Properties of Orthocentre/लम्ब केन्द्र की विशेषताएँ

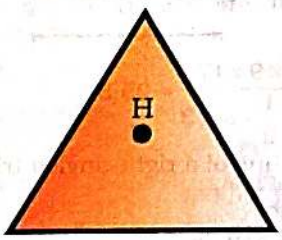
(i) All the three altitudes of a triangle pass through a point (orthocentre)

किसी त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्ब एक ही विन्दु (लम्ब केन्द्र) से होकर गुजरते हैं।

(ii) Position of orthocentre/लम्ब केन्द्र की अवस्थिति

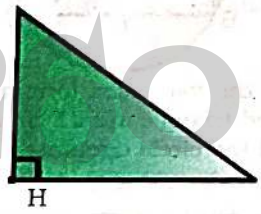
- In an acute-angled triangle the orthocentre is always inside the triangle.

  किसी न्यूनकोण त्रिभुज में लम्ब केन्द्र हमेशा त्रिभुज के भीतर होता है।



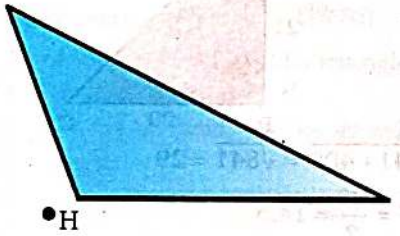
- In a right-angled triangle the orthocentre is on the vertex of the triangle at which triangle is the right-angled.

  किसी समकोण त्रिभुज में लम्ब केन्द्र समकोण बनाने वाले त्रिभुज के शीर्ष पर स्थित होता है।

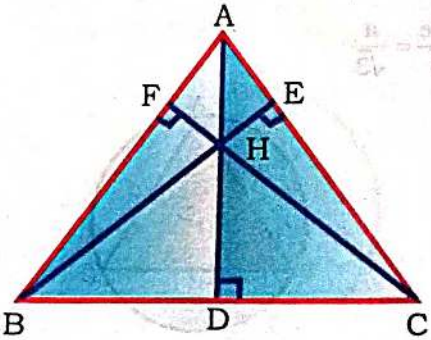


- In an obtuse-angled triangle the orthocentre is always outside of the triangle and will be at the back of the angle which is obtuse.

  अधिककोण त्रिभुज में लम्ब केन्द्र हमेशा त्रिभुज के बाहर और अधिक कोण के पीछे की ओर होता है।



(iii)



@Baka_200

(a) $\angle BHC = 180° - \angle A$
$\angle CHA = 180° - \angle B$
$\angle AHB = 180° - \angle C$

It is true for all types of triangle.
यह सभी प्रकार के त्रिभुजों के लिए सत्य है।

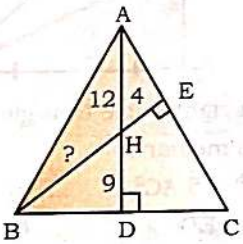
Ex. In an obtuse-angled triangle ABC, $\angle A$ is the obtuse angle and O is the orthocentre. If $\angle BOC = 54°$, then $\angle BAC$ is :
किसी अधिककोण त्रिभुज ABC में $\angle A$ अधिककोण तथा O लम्ब केन्द्र है। यदि $\angle BOC = 54°$ है, तो $\angle BAC$ का मान है:
HINTS:
$\angle BAC = 180° - 54° = 126°$

(b) $\angle BHD = \angle C$ and $\angle CHD = \angle B$
$\angle CHE = \angle A$ and $\angle AHE = \angle C$
$\angle AHF = \angle B$ and $\angle BHF = \angle A$

(c) (i) $\Delta BFH \sim \Delta CEH$
$BH \times HE = CH \times HF$
Also, $BH \times HE = CH \times HF = AH \times HD$
(ii) $BD \times DC = AD \times DH$
$BE \times EH = CE \times EA$
$CF \times FH = AF \times FB$
(iii) $(AB + BC + CA) > (AD + CF + BE)$

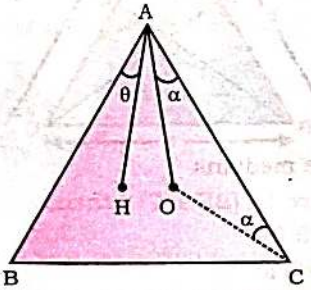
$\sum$ sides > $\sum$ Altitudes

Ex. In the triangle ABC, AD and BE are the altitude of the triangle meets at H such that AH = 12 cm, HD = 9 cm, and HE = 4 cm. Find BH?
त्रिभुज ABC में, AD और BE, त्रिभुज के शीर्षलम्ब हैं जो H पर इस प्रकार मिलते हैं कि AH = 12 सेमी, HD = 9 सेमी, और HE = 4 सेमी है। BH ज्ञात कीजिये।
HINTS:

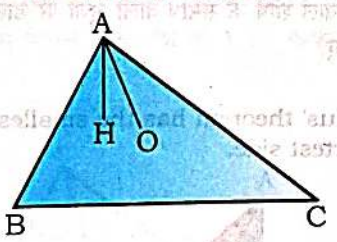


$AH \times HD = BH \times HE$
$\Rightarrow 12 \times 9 = BH \times 4$
$\Rightarrow BH = 27$ cm

(d) If H & O are orthocentre & circumcentre (as shown in the figure) then, $\theta = \alpha$



Ex. In ΔABC, H is the orthocenter, O is circumcenter. If $\angle BAH = 30°$ then find $\angle OAC$?
त्रिभुज ABC में, बिंदु H त्रिभुज का लम्बकेन्द्र है तथा O परिकेन्द्र है। यदि $\angle BAH = 30°$ तब $\angle OAC$ का मान होगा?

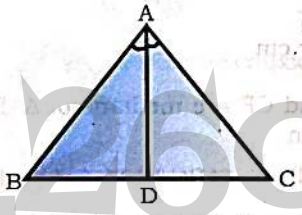


HINTS:
Given, $\angle BAH = 30°$
$\angle OAC = \angle BAH = 30°$

Centroid/केन्द्रक

Median : If a line segment from a vertex of a triangle bisects the opposite side, the line segment is called the median of the triangle.

माध्यिका : यदि किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से खींचा गया रेखाखंड विपरीत भुजा को समद्विभाजित करता हो, तो रेखाखंड त्रिभुज की माध्यिका कहलाती है।



If line segment AD bisects BC, then AD is the median.
यदि रेखाखंड AD भुजा BC को समद्विभाजित करे तो AD माध्यिका होती है।

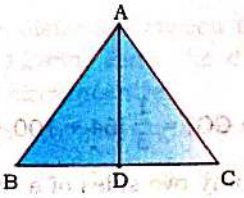
Centroid : The polint of intersection of the medians of the triangle is called the centroid. It is denoted by G.
केन्द्रक : किसी त्रिभुज की माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु केन्द्रक कहलाता है। इसे G द्वारा निरूपित करते हैं।

Properties of centroid/केन्द्रक की विशेषताएँ

(i) All the three median of a triangle pass through a point (Centroid).
किसी त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ एक बिन्दु (केन्द्रक) से होकर गुजरती है।

(ii) Centroid of all types of triangles are always inside the triangle.
सभी प्रकार के त्रिभुजों के केन्द्रक हमेशा त्रिभुज के भीतर होते हैं।

(iii) Appollonius Theorem/अपोलोनियस प्रमेय
If AD is median of ΔABC, then
यदि AD, ΔABC की माध्यिका हो, तो



$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + CD^2)$
'OR'
Length of median, $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2}$

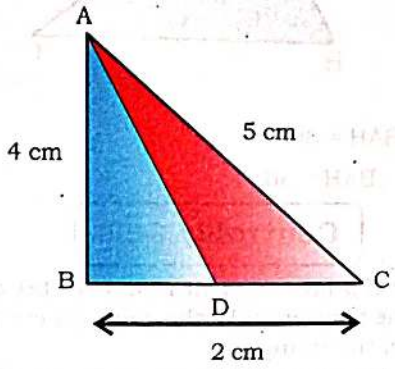
@Baka_260

Ex. If the sides of ∠ABC are 5 cm, 4 cm and 2 cm, then find the length of the median inserted on the side of the side which is adjacent to its smallest angled vertex?

यदि ∠ABC की भुजाएँ 5 सेमी, 4 सेमी और 2 सेमी हैं, तो उसके सबसे छोटे कोण वाले शीर्ष के समीप वाली भुजा पर डाली गई मध्यिका की लंबाई ज्ञात कीजिए?

HINTS:

Apollonius' theorem has the smallest angle in front of the shortest side.

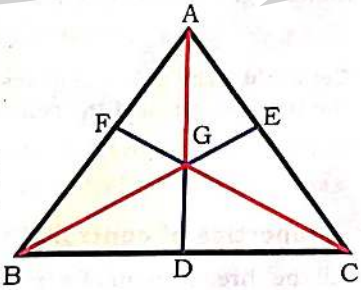


$$AD = \sqrt{\frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{32 + 50 - 4}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{78}{4}} = \sqrt{\frac{39}{2}} \text{ cm}$$

(iv) If AD, BE and CF are medians of ΔABC and G is the centroid, then

यदि AD, BE और CF, ΔABC की माध्यिका है और G केन्द्रक हो, तो



$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$$

(v) $$\frac{AG^2 + BG^2 + CG^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2} = \frac{1}{3}$$

Ex. G is the centroid of triangle ABC. If the length of sides of triangle ABC are 8 cm, 10 cm, and 12 cm, then find the $AG^2 + BG^2 + CG^2$?

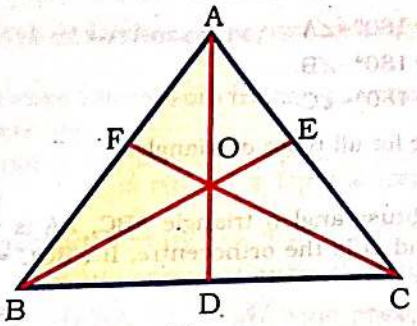
G, त्रिभुज ABC का केन्द्रक है। यदि त्रिभुज ABC की भुजाओं की लम्बाई 8 सेमी, 10 सेमी और 12 सेमी है, तो $AG^2 + BG^2 + CG^2$ ज्ञात कीजिये।

HINTS:

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}[64 + 100 + 144] = \frac{308}{3}$$

(vi) The sum of any two sides of a triangle is greater than twice the median drawn to the third side.

त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा पर खींची गई माध्यिका के दोगुने से अधिक होता है।



$AB + AC > 2AD$ ...(1)

$AB + BC > 2BE$ ...(2)

$AC + BC > 2CF$ ...(3)

Adding (1), (2) and (3)

$2(AB + AC + BC) > 2(AD + AE + CF)$

$AB + AC + BC > AD + BE + CF$

So, We can say that sum of sides (perimeter) is always greater than sum of all median.

इसलिए हम कह सकते है कि भुजाओं का योगफल (परिमाप) हमेशा माध्यिकाओं के योगफल से अधिक होता है।

(vii) $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

Ex. In the triangle ABC, the sum of square of all sides is 64 cm. Find the sum of square of all three medians.

त्रिभुज ABC में, सभी भुजाओं के वर्ग का योग 64 सेमीसेमी है। सभी तीन माध्यिकाओं के वर्ग का योग ज्ञात कीजिये।

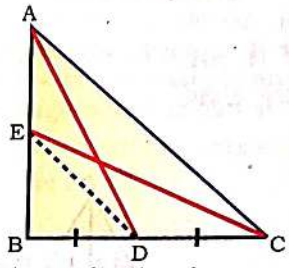
HINTS:

$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$

$\Rightarrow 3 \times 64 = 4 \times R$

$\Rightarrow 48 = R$

(viii)



If ΔABC is a right angle triangle

AD & CE are medians

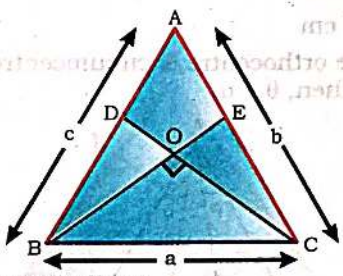
$4(AD^2 + CE^2) = 5AC^2$ .... (i)

$AD^2 + CE^2 = 5ED^2$ .... (ii)

Add both equation

$AD^2 + CE^2 = AC^2 + ED^2$

(ix)



BE & CD are medians

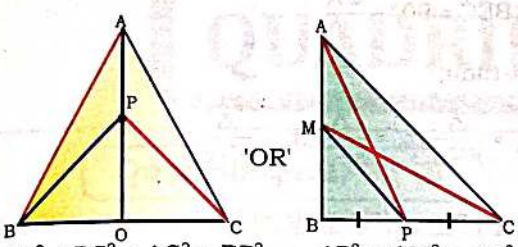
If medians are $\perp^r$. (BE ⊥ CD) then,

$AB^2 + AC^2 = 5BC^2$

OR, $b^2 + c^2 = 5a^2$

@BaKa_260

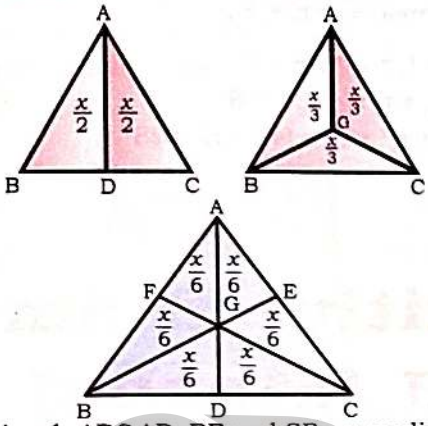
(x)



$AB^2 + PC^2 = AC^2 + BP^2$ $AP^2 + CM^2 = AC^2 + MP^2$

(xi) If the area of $\Delta ABC = x$, AD, BE and CF are three medians and G is centroid, then

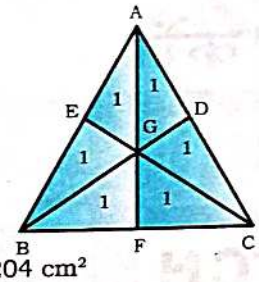
यदि ΔABC का क्षेत्रफल = x हो, AD, BE और CF तीन माध्यिकाएँ और G केन्द्रक हो, तो



Ex. In a triangle ABC AD, BE and CF are medians intersect at G. If area of triangle ABC is 204 cm^2. Find the area of quadrilateral GDFC.

एक त्रिभुज ABC में AD, BE और CF माध्यिकाएँ G पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 204 $सेमी^2$ है। GDFC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS:



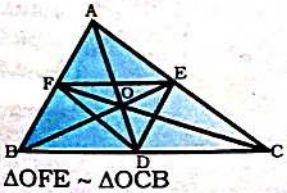
Here, 6 unit = 204 cm^2

$\therefore$ 2 unit = 68 cm^2

(xii) Area of triangle formed by joining mid points of two sides and centroid is $\frac{1}{12}$th of area of triangle.

दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं और केन्द्रक को मिलाने से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल मूल त्रिभुज के क्षेत्रफल का $\frac{1}{12}$ भाग होता है।

$Ar\ \Delta OFE = Ar\ \Delta OFD = Ar\ \Delta OED = \frac{1}{12} Ar\ \Delta ABC$

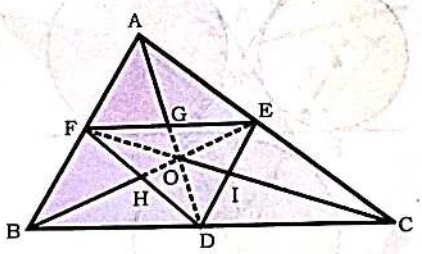


$\Delta OFE \sim \Delta OCB$

(According to Mid-Point theorem FE || BC so that $\angle EFO = \angle OCB$, $\angle OEF = \angle OBC$)

(xiii) The line segment joining the mid points of two sides divides the line joining of vertex in between line to the centroid in the ratio 3 : 1.

दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड भुजाओं के मध्य के शीर्ष को केन्द्रक से मिलाने वाली रेखा को 3 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।



AG : GO = BH : HO = CI : IO = 3 : 1

Note: G is the Mid point of AD and FE

G भुजा AD और FE का मध्य बिन्दु है।

(xiv) If three medians of a triangle are given then

यदि किसी त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ दी गई हों, तो

Area of $\Delta = \frac{4}{3}$ (Area of triangle considering medians as side)

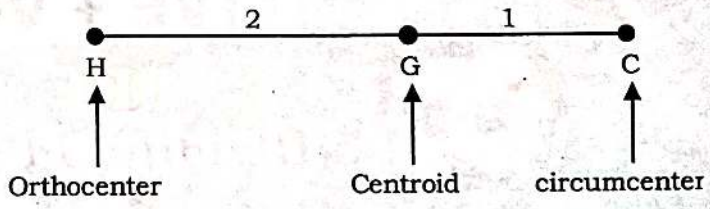
त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{4}{3}$ (माध्यिकाओं को भुजा मानते हुए त्रिभुज का क्षेत्रफल)

Relation between Orthocenter, centroid and circumcenter

लम्ब केन्द्र, केन्द्रक और परिकेन्द्र के बीच संबंध

In any triangle, orthocenter, centroid and circumcenter are co-linear and centroid divides the line in 2:1 as in figure

किसी भी त्रिभुज में लम्ब केन्द्र, केन्द्रक और परिकेन्द्र सरेखीय होते है तथा केन्द्रक रेखा को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।



Ex. In a triangle the distance between the centroid and orthocentre is 12 cm. Find the distance between orthocentre and circumcentre.

किसी त्रिभुज में केन्द्रक और लम्ब केन्द्र के बीच की दूरी 12 सेमी है। लम्ब केन्द्र तथा परिकेन्द्र के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Given, 2 unit = 12 cm

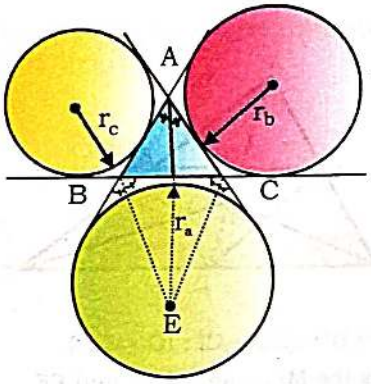
$\therefore$ 3 unit = 18 cm

@RaKa_260

Excentre/बहिःकेन्द्र

The intersection point of internal angle bisector of one angle and bisectors of other two opposite exterior angles.

एक कोण के आन्तरिक समद्विभाजक तथा अन्य दो बाह्य विपरीत कोणों के समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिन्दु को बहिकेन्द्र कहते हैं।



(a) $\angle BEC = 90° - \frac{\angle A}{2}$

(b) ex-radii:

$$r_a = \frac{\Delta}{s-a}; r_b = \frac{\Delta}{s-b}; r_c = \frac{\Delta}{s-c}$$

(c) $r_a = \frac{rs}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

where, $S = \frac{a+b+c}{2}$

(d) $\Delta(\text{area}) = \sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c}$

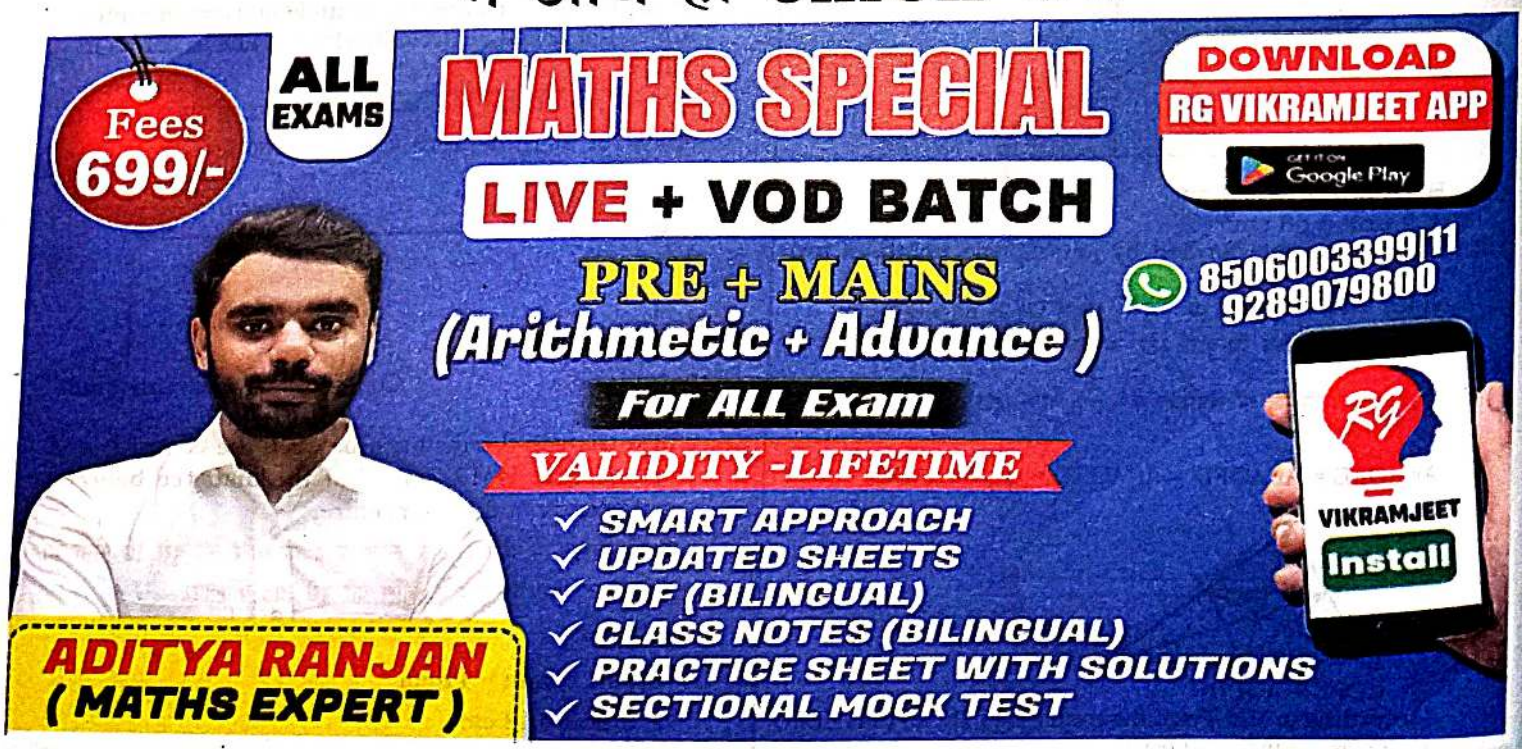
(e) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

(f) $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = S^2$

(g) $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R + r)^2 - 2S^2$

☆☆☆☆☆

भारत के किसी भी **Competitive Exam** (प्रतियोगी परीक्षा) में **गणित (Maths)** विषय में **शत-प्रतिशत Score** करने के लिए **RG Vikramjeet App** पर **Students** के **Favourite** आदित्य सर के **Recorded Batch** में आज ही **enroll** करें।

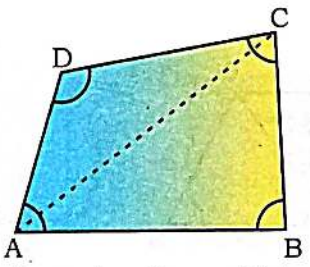


QUADRILATERAL/चतुर्भुज

Quadrilateral/चतुर्भुज

Quadrilateral is a plane figure bounded by four straight lines. the line segment which joins the opposite vertices of a quadrilateral is called diagonal of the quadrilateral. In figure, ABCD is a quadrilateral and AC, BD are its two diagonals.

चतुर्भुज चार सीधी रेखाओं से घिरी एक समतल आकृति होती है। विपरीत शीर्षों को जोड़ने वाला रेखाखंड चतुर्भुज का विकर्ण कहलाता है। आकृति में, ABCD एक चतुर्भुज तथा AC, BD इसके दो विकर्ण हैं।



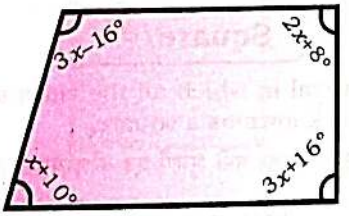
Sum of interior angles of a quadrilateral = 360°

चतुर्भुज के अंत:कोणों का योगफल = 360°

i.e., $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

Ex. Find the value of x in the given figure.

दी गई आकृति में x का मान ज्ञात करें।



HINTS:

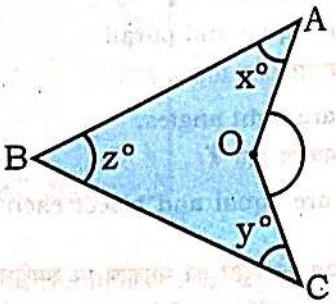
$3x - 16° + 2x + 8° + x + 10° + 3x + 16° = 360°$

$\Rightarrow x = 38°$

Important Points/महत्वपूर्ण बिन्दु

- In the figure given below, we have the following result.

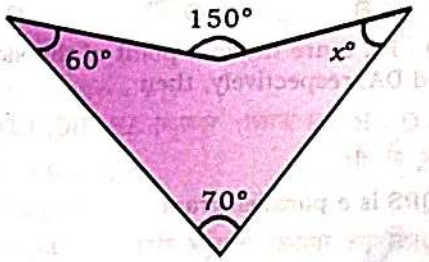
नीची दी गई आकृति में निम्नलिखित परिणाम याद रखें।



$\angle AOC = x° + y° + z°$

Ex. Find the value of x in the given figure.

दी गई आकृति में x का मान ज्ञात करें।



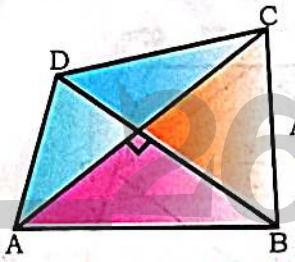
HINTS:

$60° + 70° + x = 150°$

$\Rightarrow x = 20°$

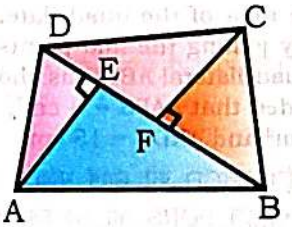
- If diagonals of the quadrilateral intersect each other at 90°, then

यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को 90° पर प्रतिच्छेद करे तो,



$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

- Area of quadrilateral/चतुर्भुज का क्षेत्रफल



$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times BD \times AE + \frac{1}{2} \times BD \times CF$$

$$= \frac{1}{2} \times BD\,(AE + CF)$$

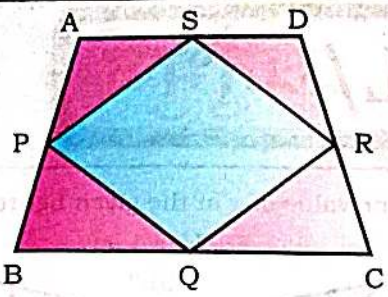
$$= \frac{1}{2} \times \text{diagonal} \times (\text{sum of perpendicular dropped on it})$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{विकर्ण} \times (\text{विकर्ण पर डाले गए लम्बों का योग})$$

- The quadrilateral formed by joining the mid-point of the adjacent side of the quadrilateral will be a parallelogram of half area.

चतुर्भुज की आसन्न भुजा के मध्य-बिंदु को मिलाने से बनने वाला चतुर्भुज आधे क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज होगा।

@Baka_260



If P, Q , R , S are the mid-point of the side AB, BC, CD and DA, respectively, then

यदि P, Q , R , S क्रमश: भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिंदु हो तो:

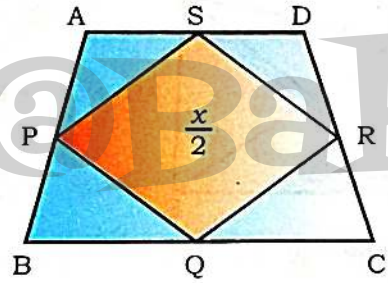
(a) PQRS is a parallelogram

PQRS एक समान्तर चतुर्भुज होगा

(b) If the area of the quadrilateral is x, then

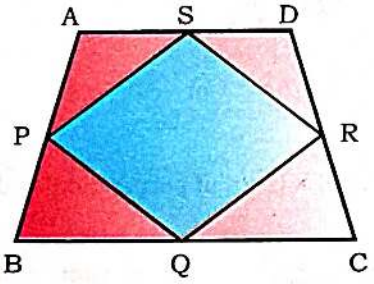
Area of the parallelogram PQRS = $\frac{x}{2}$

यदि चतुर्भुज का क्षेत्रफल x हो तो समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल = $\frac{x}{2}$



Ex. What is the area of the quadrilateral PQRS, which is formed by joining the mid-points of the adjacent sides of a quadrilateral ABCD as shown in the figure, if it is provided that $\Delta APS = 8\ cm^2$, $\Delta BPQ = 12\ cm^2$, $\Delta QCR = 9\ cm^2$ and $\Delta RDS = 15\ cm^2$.

चित्रानुसार चतुर्भुज ABCD की संगत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बने चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल क्या है यदि यह दिया गया है कि $\Delta APS = 8$ वर्ग सेमी, $\Delta BPQ = 12$ वर्ग सेमी, $\Delta QCR = 9$ वर्ग सेमी और $\Delta RDS = 15$ वर्ग सेमी।

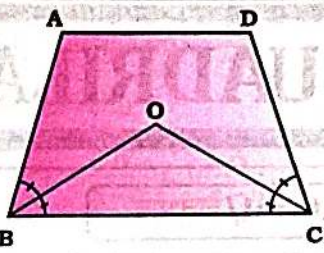


HINTS:

$ar(\square ABCD) = 12 + 8 + 15 + 9 = 44\ cm^2$

- If BO and CO are the angle bisectors of angles $\angle B$ and $\angle C$, respectively, then

  यदि BO तथा CO क्रमश: $\angle B$ और $\angle C$ के कोण समद्विभाजक हो तो:

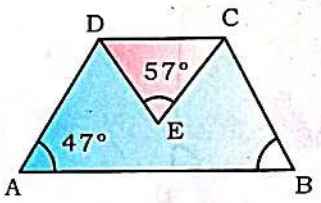


$\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

Ex. In a quadrilateral ABCD, the bisectors of $\angle C$ and $\angle$ meet at point E. If $\angle CED = 57°$ and $\angle A = 47°$, the the measure of $\angle B$ is:

एक चतुर्भुज ABCD में, $\angle C$ और $\angle D$ के समद्विभाजक बिंदु पर मिलते हैं। अगर $\angle CED = 57°$ और $\angle A = 47°$ है, तो $\angle$ का माप बताइए।

HINTS:



Let $\angle B = \theta$.

$\Rightarrow 57° = \frac{47 + \theta}{2}$

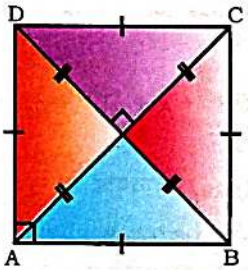
$\Rightarrow 114° - 47° = \theta$

$\Rightarrow \theta = 67°$

Square/वर्ग

A quadrilateral in which all the sides and the angle are equal is known as a square.

एक ऐसा चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ एवं कोण बराबर हों, वर्ग कहलाता है।

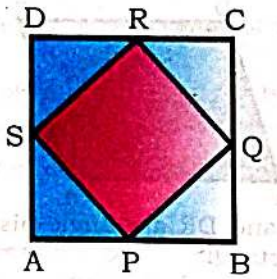


Important Points/महत्वपूर्ण बिन्दु

- All sides are equal and parallel.
  सभी भुजाएँ बराबर और समांतर होती हैं।
- All angles are right angles.
  सभी कोण समकोण होते हैं।
- Diagonals are equal and bisect each other at right angle.
  विकर्ण बराबर एवं एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
- Straight lines joining the mid points of adjacent sides of any square forms a square.

@Baka_260

वर्ग की संगत भुजाओं के मध्य बिन्दु को मिलाने से बनने वाली आकृति वर्ग होती है।

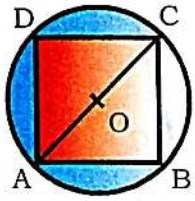


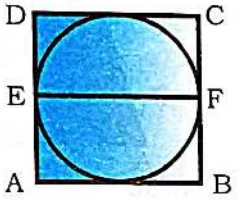
P, Q, R, and S are mid points and PQRS is a square.

P, Q, R और S मध्य-बिन्दु हैं तथा PQRS एक वर्ग है।

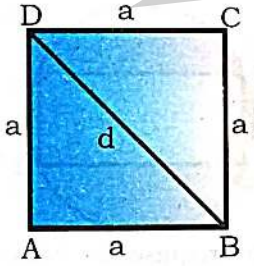
- Side of a circumscribed square is equal to the diameter of the inscribed circle.

किसी वृत्त के बाहर बने वर्ग की भुजा वृत्त के व्यास के बराबर होती है।



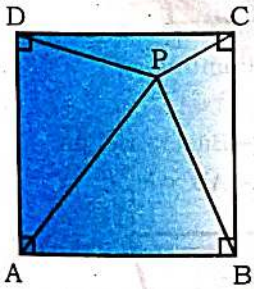


$$\text{Area} = (\text{Side})^2 = (a)^2 = \frac{(\text{diagonal})^2}{2} = \frac{d^2}{2}$$



- Diagonal/विकर्ण = side $\sqrt{2}$ = $a\sqrt{2}$
- Perimeter/परिमाप = 4 × side = $4a$
- If P be a point inside a square ABCD, then

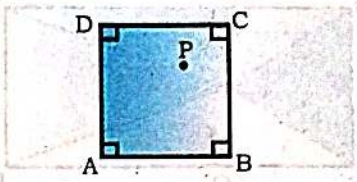
यदि P वर्ग के अंदर कोई बिंदु हो तो



$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

Ex. As shown in the figure, P is a point inside a square ABCD such that PA = 15 cm, PB = 7 cm and PC = 20 cm, the value of PD is :

जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, कोई बिन्दु P वर्ग ABCD के अंदर इस प्रकार है कि PA = 15 सेमी, PB = 7 सेमी और PC = 20 सेमी है। PD का मान है:



HINTS:

$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

$\Rightarrow 225 + 400 = 49 + PD^2$

$\Rightarrow 625 - 49 = PD^2$

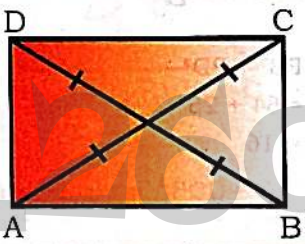
$\Rightarrow PD^2 = 576$

$\Rightarrow PD = 24$

Rectangle/आयत

A quadrilateral in which all the four angles at vertices are right (i.e., 90°), is called a rectangle.

ऐसा चतुर्भुज जिसमें शीर्ष के चारों कोण समकोण अर्थात् 90° के होते है, आयत कहलाता है।



Important Points/महत्वपूर्ण बिन्दु

- Opposite sides are parallel and equal.

विपरीत भुजाएँ समांतर एवं बराबर होती हैं।

- Diagonals are equal and bisect each other but not at right angles.

विकर्ण बराबर तथा एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं परंतु समकोण पर नहीं।

- Perimeter = $2(l + b)$ where l = length and b = breadth

परिमाप = $2(l + b)$ जहाँ l = लंबाई और b = चौड़ाई है।

- Area/क्षेत्रफल = AB × BC = $l \times b$
- Diagonal/विकर्ण = $(l^2 + b^2)$
- Of all the rectangles of given perimeter the square will have the maximum area.

दिये हुए परिमाप वाले सभी आयतों में से वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

- Bisector of the four angles enclose a square

चारों कोणों के समद्विभाजक एक वर्ग बनाते हैं।

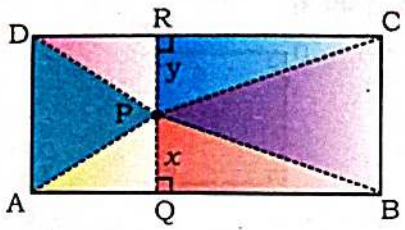
- When the rectangle is inscribed in a circle, it will have the maximum area when it is a square.

वृत्त के अंदर बने आयत का क्षेत्रफल अधिकतम होगा जब यह एक वर्ग होता है।

@Baka_Edo

- If P is a any point inside the rectangle then,

  यदि P आयत के अंदर कोई बिंदु हो तो

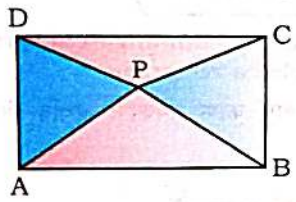


$AP^2 + PC^2 = BP^2 + PD^2$

Ex. There is a point P in a rectangle ABCD, such that PA = 4, PD = 5, PB = 8, find PC.

आयत ABCD के अंदर कोई बिन्दु P इस प्रकार है कि PA = 4, PD = 5, PB = 8 है, तो PC का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:



$PA^2 + PC^2 + PB^2 + PD^2$

$\Rightarrow 16 + PC^2 = 64 + 25$

$\Rightarrow PC^2 = 89 - 16$

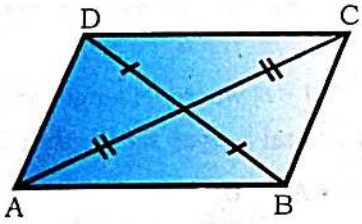
$\Rightarrow PC^2 = 73$

$\Rightarrow PC = \sqrt{73}$

Parallelogram/समांतर चतुर्भुज

A quadrilateral whose opposite sides are parallel and equal is called as a parallelogram.

ऐसा चतुर्भुज जिसकी विपरीत भुजाएँ समांतर एवं बराबर हो, समांतर चतुर्भुज कहलाता है।



Important Points/महत्वपूर्ण बिन्दु

- Opposite sides are parallel and equal.

  विपरीत भुजाएँ समांतर एवं बराबर होती है।

- Diagonals may or may not be equal.

  विकर्ण बराबर हो भी सकते है या नहीं भी हो सकते है।

- Diagonals may or may not bisect each other at right angles.

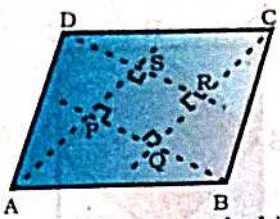
  विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद कर भी सकते हैं या नहीं भी कर सकते हैं।

- Sum of any two adjacent angles = 180°

  किन्हीं दो संगत कोणों का योगफल 180° होता है।

- Bisectors of the four angles enclose a rectangle.

  चारों कोणों के समद्विभाजक आयत बनाते हैं।

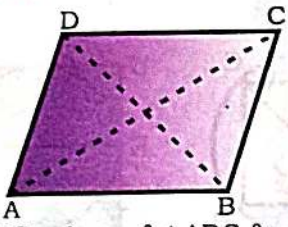


AS, BP, CQ and DR are angle bisectors therefore, PQRS is a rectangle.

AS, BP, CQ और DR कोण समद्विभाजक हैं। इसलिए PQRS एक आयत है।

- Each diagonal divides the parallelogram into two triangle of equal area.

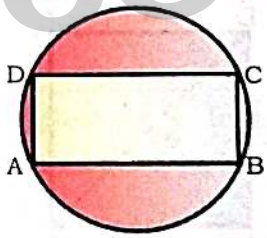
  प्रत्येक विकर्ण समांतर चतुर्भुज को दो बराबर क्षेत्रफल के त्रिभुजों में विभाजित करता है।



Area of ΔABC = Area of ΔADC &
Area of ΔABD = Area of ΔBDC.

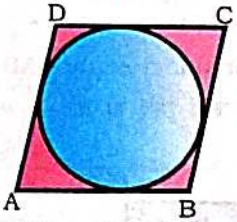
- A parallelogram inscribed in a circle is always a rectangle.

  वृत्त के अंदर बना हुआ समांतर चतुर्भुज हमेशा आयत होता है।



- A parallelogram circumscribed about a circle is always a rhombus.

  वृत्त के परितः बना समांतर चतुर्भुज हमेशा सम चतुर्भुज होता है।

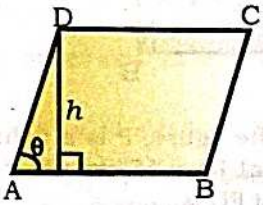


Therefore ABCD is a rhombus.

इसलिए ABCD एक समचतुर्भुज हैं।

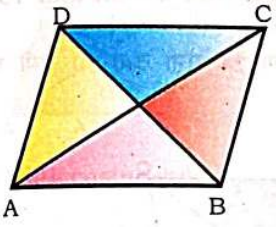
- Area of parallelogram = Base × Height

  समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = AB × h



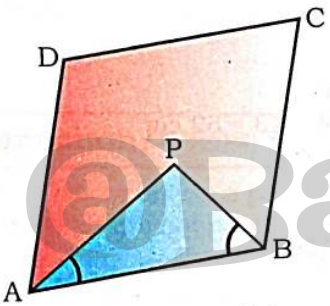
@Baka_260

- Area of parallelogram(समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)
  = AB × AD sinθ
- In a parallelogram, the sum of the square of the diagonals
  = 2 × (sum of the squares of the two adjacent sides)
  समांतर चतुर्भुज में, दोनों विकर्णों के वर्गों का योगफल = 2 × (दो संगत भुजाओं के वर्गों का योगफल)



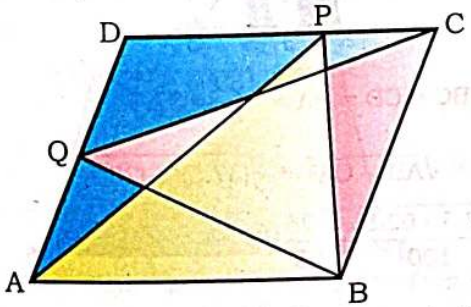
$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

- In a parallelogram, the bisectors of any two consecutive angles intersect at right angle.
  एक समांतर चतुर्भुज में, किन्हीं दो क्रमागत कोणों के समद्विभाजक समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।



The above figure is a parallelogram ABCD such that the bisectors of consecutive angles A and B intersect at P. Here, ∠APB = 90°.
उपरोक्त आकृति में ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें क्रमागत कोणों A और B के समद्विभाजक P पर प्रतिच्छेद करते हैं। यहाँ, ∠APB = 90° है।

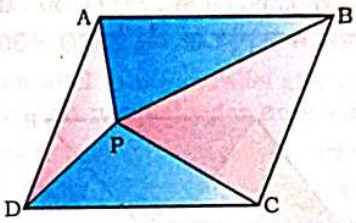
- If P and Q are two points lying on the sides DC and AD respectively of a parallelogram ABCD, then the area (ΔAPB) = Area (ΔBQC).
  यदि P और Q एक समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर स्थित दो बिंदु हैं, तो क्षेत्रफल (ΔAPB) = क्षेत्रफल (ΔBQC) है।



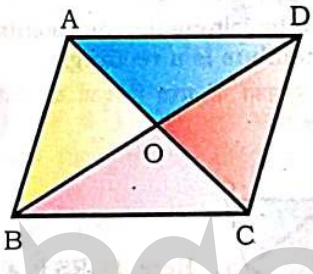
- In the figure given below, P is a point in the interior of a parallelogram ABCD, then.
  नीचे दी गई आकृति में, P एक समांतर चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में एक बिंदु है, तो।

(a) Area (ΔAPB) + Area (ΔPCD) = $\frac{1}{2}$ Area (□ABCD).

(b) Area (ΔAPD)+Area (ΔPBC)= Area (ΔAPB) + Area (ΔPCD).



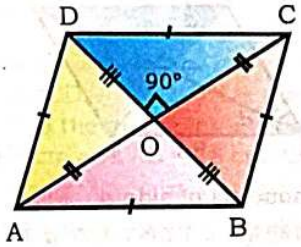
Ex. In a parallelogram ABCD, diagonals AC and BD intersect each other at a point O. If the area of ΔOAB = 8 cm², then the area of parallelogram ABCD is :
समांतर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं। यदि ΔOAB का क्षेत्रफल = 8 वर्ग सेमी है, तो समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल है :



HINTS:
Area of parallelogram ABCD = 8 × 4 = 32 cm²

Rhombus/समचतुर्भुज

A parallelogram in which all sides are equal, is called a rhombus.
ऐसा समांतर चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं, सम चतुर्भुज कहलाता है।



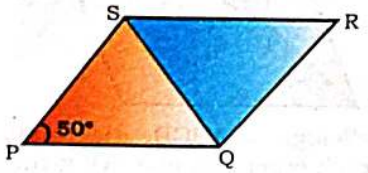
Important Points/महत्वपूर्ण बिन्दु

- Opposite sides are parallel and equal.
  विपरीत भुजाएँ समांतर एवं बराबर होती है।
- Opposite angles are equal.
  विपरीत कोण बराबर होते हैं।
- Diagonals bisect each other at right angle, but they are not necessarily equal.
  विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं लेकिन आवश्यक नहीं कि वे बराबर हों।
- Diagonals bisect the vertex angles.
  विकर्ण, शीर्ष को समद्विभाजित करते हैं।

@Baka_260

- Sum of any two adjacent angles is 180°
  $\angle A + \angle B = 180°$
  किन्हीं दो संगत कोणों का योगफल 180° होता है।

Ex. If PQRS is a rhombus and $\angle SPQ = 50°$, then $\angle RSQ$ is :
यदि PQRS एक समचतुर्भुज हो और $\angle SPQ = 50°$ हों, तो $\angle RSQ$ का मान है :

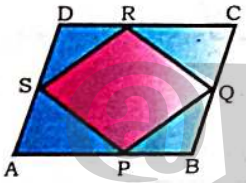


HINTS:
Here, PQ = QR = RS = SP & $\angle PSQ = 50°$

$\therefore \angle PSQ = \angle PQS = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$

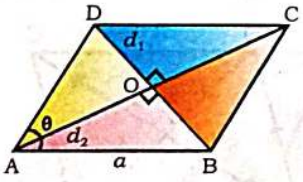
Now, $\angle PSR = 180° - 50° = 130°$
$\therefore \angle RSQ = 130° - 65° = 65°$

- Figure formed by joining the mid-points of the adjacent sides of a rhombus is a rectangle.
  समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनी आकृति आयत होती है।



Here, PQRS is a rectangle.

- Area of a rhombus/सम चतुर्भुज का क्षेत्रफल
  $= \frac{1}{2}$ × product of diagonals (विकर्णों का गुणनफल)
  $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

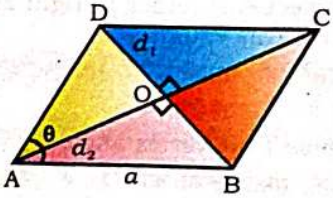


ABCD is a rhombus of side a
ABCD एक समचतुर्भुज है जिसकी भुजा a है।
Area of ΔAOB/ ΔAOB का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2} = \frac{1}{8} \times d_1 d_2$

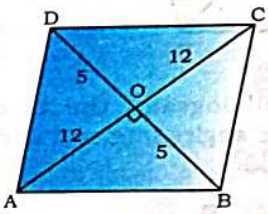
Area of ABCD/ABCD का क्षेत्रफल

= 4 × Area of $\Delta AOB = \frac{1}{2} \times d_1 d_2$



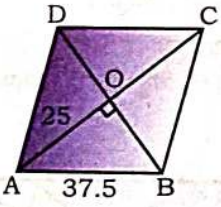
- $d_1 = 2a\frac{\sin\theta}{2}$, $d_2 = 2a\frac{\cos\theta}{2}$
- Area of ABCD/ABCD का क्षेत्रफल
  $= \frac{1}{2} \times 2a\sin\frac{\theta}{2} \times 2a\cos\frac{\theta}{2} = 2a^2\frac{\sin\theta}{2} \times \frac{\cos\theta}{2} = a^2\sin\theta$
- $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

Ex. The diagonals of a rhombus are 24 cm and 10 cm. The perimeter of the rhombus (in cm) is :
यदि किसी समचतुर्भुज के विकर्ण 24 सेमी तथा 10 सेमी हो, तो इसका परिमाप (सेमी में) है :
HINTS:



$AB^2 = OA^2 + OB^2$
$= 12^2 + 5^2$
$= 169$
AB = 13 cm
Perimter = 4 × 13 = 52 cm
$24^2 + 10^2 = 4a^2$
$576 + 100 = 4a^2$
$a^2 = \frac{676}{4} = 169$
$a = 13$
Perimter = 4 × a = 4 × 13 = 52 cm

Ex. If the perimeter of rhombus is 150 cm and length of one diagonal is 50 cm. Then find the length of second diagonal and area of rhombus.
यदि समचतुर्भुज का परिमाप 150 सेमी और इसके एक विकर्ण की लंबाई 50 सेमी है, तो दूसरे विकर्ण की लंबाई तथा समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
HINTS:



$AB = BC = CD = DA = \frac{150}{4} = 37.5$

$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{(37.5)^2 - (25)^2}$

$= \sqrt{\frac{12.5 \times 62.5}{100}} = \frac{25}{2}\sqrt{5}$

$\therefore BD = 2 \times OB = 2 \times \frac{25}{2}\sqrt{5} = 25\sqrt{5}$ cm

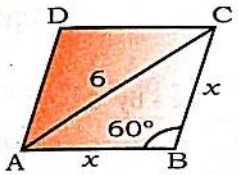
$\therefore$ Area $= \frac{1}{2} d_1 \times d_2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 25\sqrt{5} = 625\sqrt{5}$ cm²

@Baka_260

Ex. If ABCD be a rhombus. AC is its smallest diagonal and ∠ABC = 60°. Find the length of one side of the rhombus when AC = 6 cm.

ABCD एक समचतुर्भुज है। AC इसका सबसे छोटा विकर्ण है और ∠ABC = 60° है। समचतुर्भुज की भुजा की लंबाई ज्ञात करें जब AC = 6 सेमी है।

HINTS:



Using cosine rule,

$$\cos 60° = \frac{x^2 + x^2 - 36}{2 \times x \times x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2x^2 - 36}{2x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2x^2 - 36$$

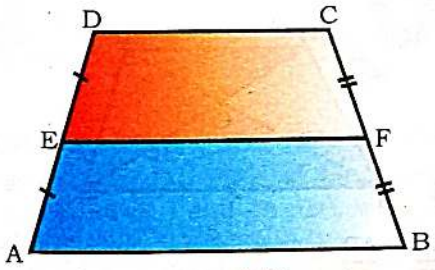
$$\Rightarrow 36 = x^2$$

$$\Rightarrow x = 6$$

Trapezium/समलम्ब चतुर्भुज

A quadrilateral whose only one pair of sides is parallel and other two sides are not parallel.

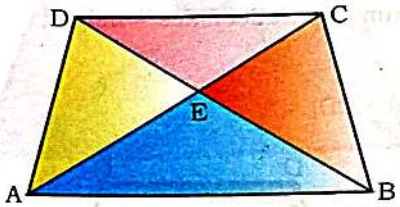
ऐसा चतुर्भुज जिसमें भुजाओं का एक युग्म समांतर होता हैं और बाकी दो भुजाएँ समांतर नहीं होती हैं समलम्ब कहलाता हैं।



Important Points/महत्वपूर्ण बिंदु

- Diagonals of a trapezium divide each other proportionally.

समलम्ब चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को आनुपातिक रूप से विभाजित करते हैं।



If the above figure is a trapezium ABCD in which th diagonals AC and BD intersect at E, then $\frac{DE}{EB} = \frac{CE}{EA}$.

Conversely, if the diagonals of a quadrilateral divide each other proportionally, then it is a trapezium.

यदि उपरोक्त आकृति में ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC और BD, E पर प्रतिच्छेद करते हैं। तो $\frac{DE}{EB} = \frac{CE}{EA}$.

इसके विपरीत, यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को आनुपातिक रूप से विभाजित करते हैं, तो यह एक समलम्ब चतुर्भुज होता है।

- Any line parallel to the parallel sides of a trapezium divides the non-parallel sides proportionally.

समलम्ब चतुर्भुज के समानांतर भुजाओं के समानांतर कोई भी रेखा गैर-समानांतर भुजाओं को आनुपातिक रूप से विभाजित करती है।



If the above figure is a trapezium ABCD in which DC || AB and EF is a line parallel to DC and AB, then $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

यदि उपरोक्त आकृति में ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें DC || AB और EF भुजा DC और AB के समानांतर है, तो $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

- If a □ABCD is a trapezium in which side AB is parallel to side DC and E, F are the mid-points of sides AD and DC respectively, then

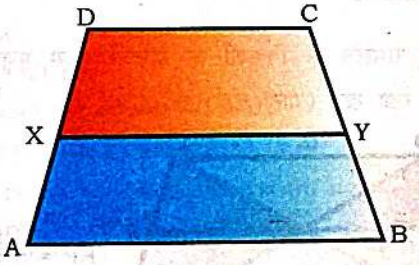
यदि □ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें भुजा AB भुजा DC के समानांतर है, E और F क्रमशः भुजा AD और DC के मध्य-बिंदु हैं, तो



$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

Ex. In trapezium ABCD, AB||DC. X is the mid-point of the side AD and Y is the mid point of the side BC. If AD = 12 cm, DC = 8 cm and AB = 18 cm, then XY is :

किसी समलम्ब चतुर्भुज ABCD में AB||DC है। X भुजा AD का मध्यबिंदु है तथा Y भुजा BC मध्यबिंदु है यदि AD = 12 सेमी DC = 8 सेमी और AB = 18 सेमी हो तो XY का मान है।



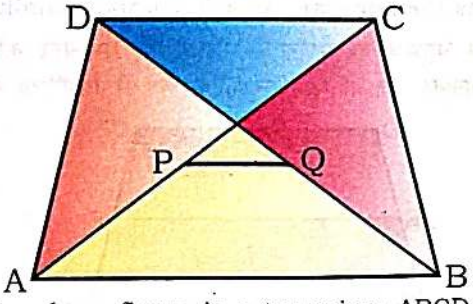
HINTS:

$$XY = \frac{AB + DC}{2} = \frac{18 + 8}{2} = 13 \text{ cm}$$

@Pakabdo

- The line segment joining the mid-points of the diagonals of trapezium is parallel to each of the parallel sides and is equal to half the difference of these sides.

समलम्ब चतुर्भुज के विकर्णों के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड प्रत्येक समांतर भुजा के समांतर होती है और इन भुजाओं के अंतर के आधे के बराबर भी होती है।



If the above figure is a trapezium ABCD in which AB||DC and P and Q are the mid-points of its diagonals AC and BD respectively, then

यदि उपरोक्त आकृति में ABCD एक समलम्ब है जिसमें AB||DC और P और Q क्रमशः इसके विकर्णों AC और BD के मध्य-बिंदु हैं, तो

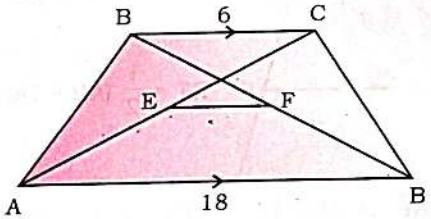
(i) PQ||AB or DC

(ii) $PQ = \frac{1}{2}(AB - DC)$

Ex. ABCD is a quadrilateral in which AB || DC. E and F are the midpoints of the diagonals AC and BD, respectively. If AB = 18 cm and CD = 6 cm, then EF = ?

ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AB || DC. E और F क्रमशः विकर्ण AC और BD के मध्यबिंदु AB = 18 सेमी और CD = 6 सेमी, तो EF = ?

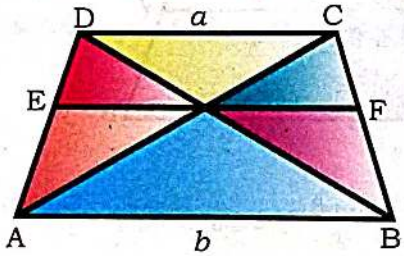
HINTS:



$EF = \frac{1}{2}(AB - CD) = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ cm

- The length of a parallel line segment (*i.e.* EF) passing through the intersection of diagonals of the isosceles trapezium is –

समद्विबाहु समलंब के विकर्णों के प्रतिच्छेदन से गुजरने वाली एक समानांतर रेखा खंड (यानी EF) की लंबाई है-



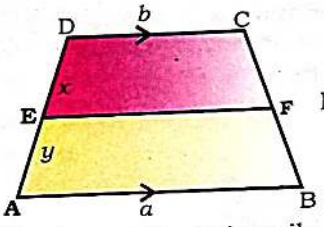
$EF = \frac{2ab}{a+b}$

- A trapezium can be divided into smaller ones by drawing a line parallel to the parallel sides.

समांतर भुजाओं के समानांतर एक रेखा खींचकर छोटे समलम्ब चतुर्भुजों में विभाजित किया जा सकता है।

If the line divides the non-parallel sides in the ratio of $x : y$ then the length of the line

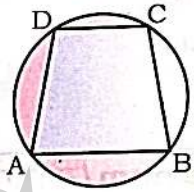
यदि कोई रेखा गैर-समानांतर भुजाओं को $x : y$ के अनुपात में विभाजित करती है तो रेखा की लंबाई



$EF = \frac{ax+by}{x+y}$

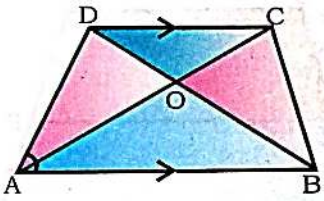
- If a trapezium is inscribed in a circle it has to be isosceles trapezium.

यदि समलम्ब चतुर्भुज को एक वृत्त के अंदर बनाया जाता है। तो यह एक समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज होता है।



- $\angle ADC + \angle DAB = \angle ABC + \angle BCD = 180°$
- Diagonals intersect each other proportionally in the ratio of lengths of parallel sides.

विकर्ण एक दूसरे को समानांतर भुजाओं की लंबाई के अनुपात में समानुपाती रूप से काटते हैं।

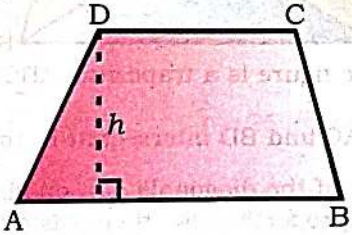


$\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO} = \frac{AB}{CD}$ (by similarity/समरूपता से)

- Area of ΔAOD = Area of ΔBOC
- $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2(AB \times CD)$
- Area of trapezium/समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ (sum of parallel sides × height)

$= \frac{1}{2} \times (AB + CD) \times h$



Ex. The lengths of a pair of parallel sides of a trapezium are 20 cm and 25 cm, respectively, and the perpendicular distance between these two sides is 14 cm. What is the area (in cm²) of the trapezium?

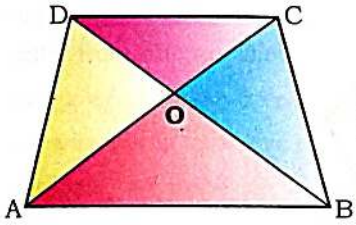
एक समलब चतुर्भुज की सामानातर भुजाओं के एक युग्म की लम्बाई क्रमश: 20 cm और 25 cm है, और इन दोनों भुजाओं के बीच की लबवत दूरी 14 cm है। समलब चतुर्भुज का क्षेत्रफल (cm² में) ज्ञात करें।

HINTS:

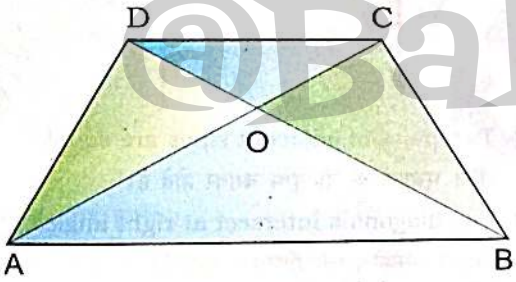
$$\text{Area} = \frac{1}{2}\times(20+25)\times14 = 45\times7 = 315$$

If in a trapezium ABCD, AB||DC and AB = 2DC, then the ratio of the areas of ΔAOB and ΔCOD is 4 : 1.

यदि एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD में, AB||DC तथा AB = 2DC तो ΔAOB और ΔCOD के क्षेत्रफलों का अनुपात 4:1 होता है।



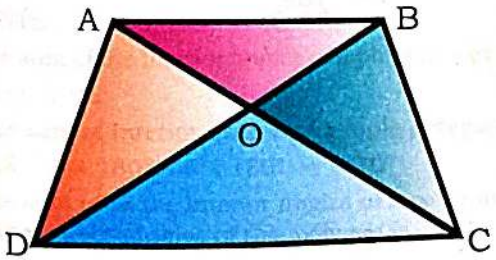
$$\frac{\text{Area}(\Delta AOB)}{\text{Area}(\Delta COD)} = \frac{4}{1}$$



$$\text{Ar}(\Delta AOB)\times\text{Ar}(\Delta DOC) = \text{Ar}(\Delta AOD)\times\text{Ar}(\Delta BOC)$$

Ex. In the given figure, AB||DC. If ΔAOD and ΔDOC are, respectively, 36 cm² and 48 cm², what is the value of ΔAOB?

दिए गए आकृति में AB||DC है यदि ΔAOD और ΔDOC के क्षेत्रफल क्रमश: 36 सेमी² और 48 सेमी² है तो ΔAOB क्षेत्रफल है



HINTS:

Here, $\text{Ar}(\Delta AOD) = \text{Ar}(\Delta BOC) = 36\ \text{cm}^2$.

$\therefore \text{Ar}(\Delta AOB)\times\text{Ar}(\Delta DOC) = \text{Ar}(\Delta AOD)\times\text{Ar}(\Delta BOC)$

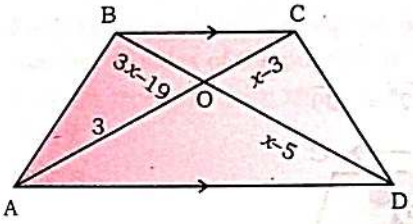
$\Rightarrow x\times48 = 36\times36$

$\Rightarrow x = 27\ \text{cm}^2$

Ex. ABCD is a trapezium where AD||BC. The diagonals AC and BD intersect each other at a point O. If AO = 3, CO = $x-3$, BO = $3x-19$ and DO = $x-5$, the value of x is :

ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें AD||BC है। विकर्ण AC तथा BD एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है। यदि AO = 3, CO = $x-3$, BO = $3x-19$ और DO = $x-5$ है तो x का मान है :

HINTS:



For a trapezium ABCD whose side AD is parallel to BC, diagonals AC and BD intersect at O then,

$$\Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-9}{x-3} = \frac{x-5}{3}$$

$$\Rightarrow (3x-19)3 = (x-3)(x-5)$$

$$\Rightarrow 9x-57 = x^2-5x-3x+15$$

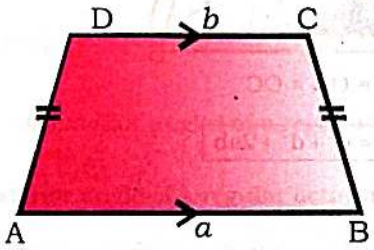
$$\Rightarrow x^2-17x+72 = 0$$

$$\Rightarrow x = 8, 9$$

Isosceles Trapezium: A trapezium which has equal oblique sides.

समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज : एक समलम्ब चतुर्भुज जिसमें तिरछी भुजाएँ बराबर होती है।

Important Points/महत्वपूर्ण बिंदु



AD = BC

∠DAB = ∠CBA

Diagonals are equal, AC = BD

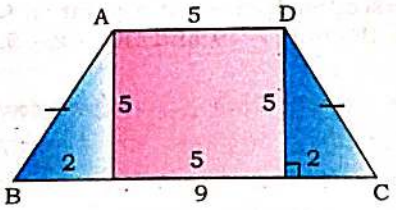
विकर्ण बराबर होते है, AC = BD

Ex. ABCD is an isosceles trapezium in which AB = CD and AD||BC. If AD = 5 cm, BC = 9 cm and area of trapezium is 35 cm², then find the length of side CD.

ABCD एक समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें AB = CD और AD||BC है। यदि AD = 5 सेमी, BC = 9 सेमी और समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 35 सेमी², है तो CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

@Baka_260

HINTS:

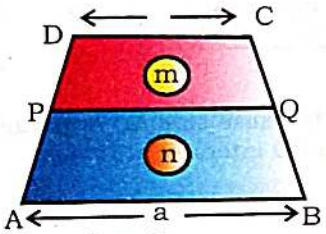


$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 14 \times h$

$\Rightarrow 35 = 7 \times h$

$\Rightarrow h = 5$

$\therefore CD = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$



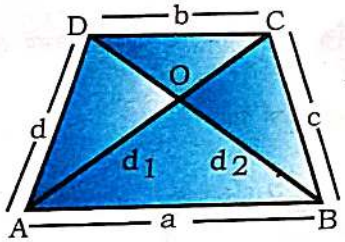
From above figure

$PQ = \sqrt{\frac{ma^2 + nb^2}{m+n}}$

If PQ divide into two equal area m : n = 1 ; 1

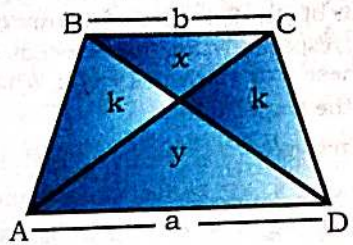
यदि PQ दो समान क्षेत्रफल m : n = 1 : 1 में विभाजित होता है

$PQ = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$



$OA \times OD = OB \times OC$

$\boxed{d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab}$



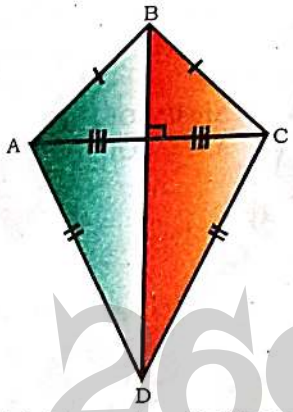
$k = \sqrt{xy}$ $ar(\Delta ADB) = ar(\Delta ACD)$

$x : y = b^2 : a^2$

Kite/पतंग

A quadrilateral is called a kite, it have two pairs of equal and adjacent.

एक चतुर्भुज को पतंग कहा जाता है, इसमें समान और आसन्न के दो युग्म होते हैं।



(a) Two pairs of adjacent sides are equal.
संगत भुजाओं के दो युग्म बराबर होते हैं।

(b) The diagonals intersect at right angles.
विकर्ण समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(c) The longer diagonal bisects the shorter diagonal.
लंबा विकर्ण छोटे विकर्ण को समद्विभाजित करता है।

(d) Area = $\frac{1}{2}$ × product of diagonals.

$= \frac{1}{2} \times AC \times BD$

☆☆☆☆☆

@BaKa_260

POLYGONS/बहुभुज

Polygon/बहुभुज

A polygon is a 'n' sided closed figure formed by line segments.

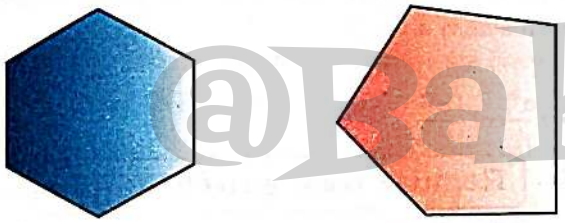
बहुभुज, रेखाखंडों द्वारा निर्मित 'n' भुजाओं वाली बंद आकृति होती है।

There are two types of polygon/बहुभुज दो प्रकार के होते हैं

1. Regular Polygon (सम या नियमित बहुभुज)
2. Irregular Polygon (विषम या अनियमित बहुभुज)

A regular polygon is one with equal lengths on all sides and identical angles at each vertex, whereas an irregular polygon has sides that are not equal and angles that differ from one another.

एक सम बहुभुज वह होता है जिसकी सभी भुजाओं की लंबाई समान होती है और प्रत्येक शीर्ष पर समान कोण होते हैं, जबकि एक अनियमित बहुभुज की भुजाएँ समान नहीं होती हैं और कोण एक दूसरे से भिन्न होते हैं।



Regular Polygon
नियमित बहुभुज

Irregular Polygon
अनियमित बहुभुज

Some Important Formulae for Regular Polygon
सम बहुभुज के लिए कुछ महत्वपूर्ण सूत्र

1. Sum of all internal angles of a polygon of n sides
n भुजाओं वाले बहुभुज के सभी आंतरिक कोणों का योगफल
$= (n - 2)\ 180°$

Ex. The sum of the interior angles of a simple octagon is:
एक साधारण अष्टभुज के आंतरिक कोणों का योग है:

HINTS:
The sum of the Interior angles of a polygon $= (n - 2) \times 180°$
Here, $n = 8$
The sum of interior angles of simple octagon
$= (8 - 2) \times 180° = 6 \times 180° = 1080°$

Ex. The sum of all the interior angles of a polygon is 1440°. The number of sides of this polygon is-
एक बहुभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग 1440° हैं। बहुभुज की भुजाओं की संख्या हैं।

HINTS:
Sum of interior angles of polygon $= (n - 2) \times 180°$
$\Rightarrow (n - 2) \times 180° = 1440°$
$\Rightarrow n = 10$

2. Each interior angle of a regular polygon of n sides
n भुजाओं वाले बहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण
$= \frac{(n-2)180°}{n}$

Ex. Each interior angle of a regular polygon is 144°. The number of sides of the polygon is :
किसी सम बहुभुज का प्रत्येक कोण 144° है। बहुभुज में भुजाओं की संख्या है :

HINTS:
Each interior angle of regular polygon $= \frac{(n-2)180°}{n}$

$\Rightarrow 144° = \frac{(n-2)180°}{n}$
$\Rightarrow 144n = 180n - 360$
$\Rightarrow 36n = 360$
$\Rightarrow n = 10$
Thus, Number of suides = 10.

3. Sum of all exterior angles of a polygon of n sides
n भुजाओं वाले बहुभुज के सभी वाह्य कोणों का योगफल
$= 360°$

4. Each exterior angle of a regular polygon of n sides
n भुजाओं वाले बहुभुज का प्रत्येक वाह्य कोण
$= \frac{360}{n}$

Ex. The measure of each exterior angle of a regular octagon is:
एक सम अष्टभुज के प्रत्येक वाह्य कोण का माप है:

HINTS:
The sum of exterior angles of a regular octagon = 360°
Each exterior angle of a regular octagon $= \frac{360°}{8} = 45°$

5. No. of side in a regular polygon
सम बहुभुज में भुजाओं की संख्या
$n = \frac{360°}{\text{Exterior angle}}$; Where, n is number of side.

6. Ratio of the measure of an interior angle of a polygon of n-sides to the measure of its exterior angle is given by
n -भुजाओं वाले बहुभुज के आंतरिक कोण की माप और उसके बाह्य कोण की माप का अनुपात इस प्रकार दिया जाता है-
$= \left(\frac{n}{2} - 1\right) : 1$

@Rakar260

Ex. In a polygon, the interior and exterior angles are in the ratio 4 : 1. The number of sides of the polygon is :
किसी बहुभुज में अंत: और वाह्य कोणों का अनुपात 4 : 1 है। बहुभुज में भुजाओं की संख्या है :

HINTS:

Using property, $\frac{n}{2}-1=4 \Rightarrow n=10$

Ex. The measure of each interior angle of a cyclic polygon with 'n' sides is 144°. So, what will be the measure of the angle formed by each of its arms at the geometric center of the polygon?
'n' भुजाओं वाले चक्रीय बहुभुज के प्रत्येक आंतरिक कोण का माप 144° है। तो, बहुभुज के ज्यामितीय केंद्र पर उसकी प्रत्येक भुजा से बने कोण का माप क्या होगा?

HINTS:

Each interior angle of a regular polygon $=\frac{(n-2)}{2}\times 180°$

$\Rightarrow \frac{(n-2)}{n}\times 180°=144°$

$\Rightarrow n=10$

The angle at the geometric center of the polygon 360°.
As the polygon is regular, the central angle is equally divided into 10 parts.
Thus, The angle formed by each of its arms at the geometric center $=\frac{360°}{10}=36°$

Diagonal of polygon/बहुभुज के विकर्ण

If we join any 2 (non-adjacent) vertex of a polygon then that is a diagonal.
यदि हम किसी बहुभुज के दो असंगत शीर्षों को मिलाएँ तो यह विकर्ण कहलाता है।

7. No. of diagonals in a polygon of n sides
n भुजाओं वाले बहुभुज के विकर्णों की संख्या

$=\frac{n(n-3)}{2}$

Ex. The number of diagonals in a polygon of 17 sides is:
17 भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या है:

HINTS:

$\therefore$ Number of diagonals $=\frac{17(17-3)}{2}=119$

Ex. A polygon has 35 diagonals. The number of sides in the polygon is:
किसी बहुभुज में 35 विकर्ण हैं। बहुभुज में भुजाओं की संख्या है:

HINTS:

No. of diagonal = 35

$\Rightarrow \frac{n(n-3)}{2}=35$

On solving we get, n = 10.

Ex. If one of the interior angles of a regular polygon is $\frac{15}{16}$ times of one of the interior angles of a regular decagon then find the number of diagonals of the polygon.
यदि एक सम बहुभुज का एक आंतरिक कोण एक सम दशभुज के आंतरिक कोणों का $\frac{15}{16}$ गुना है, तो बहुभुज के विकर्णों की संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Each interior angle of a polygon $=\frac{(n-2)\times 180}{n}$

Decagon each interior angle $=\frac{(10-2)\times 180}{10}=144$

ATQ, $\frac{(n-2)\times 180}{n}=\frac{15}{16}\times 144 \Rightarrow n=8$

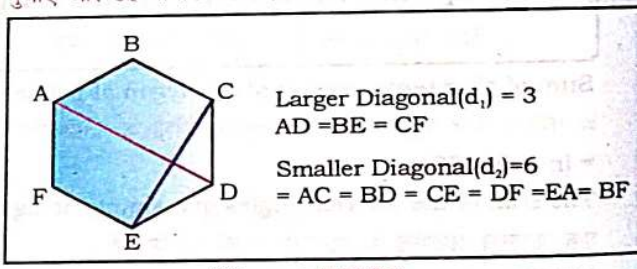
$\therefore$ Number of diagonal $=\frac{n(n-3)}{2}=\frac{8(8-3)}{2}=20$

8. Perimeter of regular polygon/सम बहुभुज का परिमाप
$= n \times a;$
Where, a is the length of the side
जहाँ, n भुजा की लंबाई है।

9. Area of a regular polygon of n sides where length of each side is a
n भुजाओं वाले सम बहुभुज का क्षेत्रफल जहाँ प्रत्येक भुजा की लंबाई a
$=n\frac{a^2}{4}\cot\frac{180}{n}$

Regular Hexagon/समषट्भुज

A regular hexagon is a closed shape polygon which has six equal sides and six equal angles.
एक नियमित षट्भुज एक बंद आकार का बहुभुज है जिसमें छह समान भुजाएँ और छह समान कोण होते हैं।



Larger Diagonal(d_1) = 3
AD =BE = CF

Smaller Diagonal(d_2)=6
= AC = BD = CE = DF =EA= BF

Hexagon समषट्भुज

1. Number of diagonals in regular hexagon/समषट्भुज विकर्णों की संख्या = 9

2. Perimeter of regular hexagon/नियमित षट्भुज का परिमाप
$= 6 \times$ Each Side

3. **Area of regular hexagon/नियमित षट्भुज का क्षेत्रफल**

When Side is given, $A=\frac{3\sqrt{3}}{2}(\text{Side})^2$

When Larger diagonal is given, $A=\frac{3\sqrt{3}}{8}(d_1)^2$

When Smaller diagonal is given, $A=\frac{\sqrt{3}}{2}(d_2)^2$

@BaKa_260

4. Inradius of regular hexagon(समषट्भुज की अंत:त्रिज्या)

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times$ Side

5. Circumradius of regular hexagon is equal to the length of its side.

नियमित षट्भुज की परित्रिज्या उसकी भुजा की लंबाई के बराबर होती है।

6. Inradius : circumradius (अंत: त्रिज्या : परित्रिज्या) = $\sqrt{3} : 2$

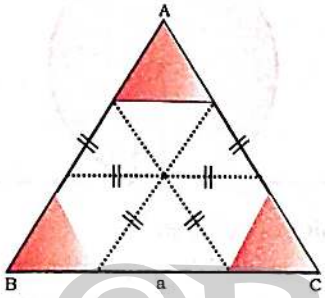
7. Area of circumcircle : area of hexagon : area of incircle

परिवृत्त का क्षेत्रफल : समषट्भुज का क्षेत्रफल : अंत:वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi a^2 : \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 : \pi\frac{3a^2}{4} = 4\pi : 6\sqrt{2} : 3\pi$

8. Regular hexagon from equilateral Δ :

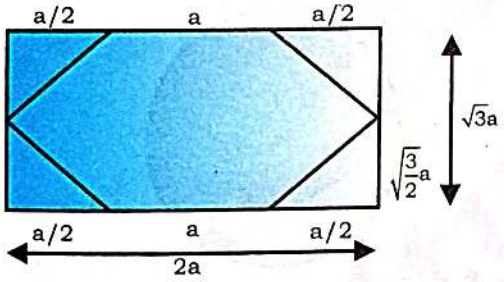
समबाहु त्रिभुज से समषट्भुज:



Ar(hexagon) : Ar(ΔABC) = 6 : 9 = 2 : 3

9. Hexagonal form by a rectangle of 2a length and $\sqrt{3}a$ breadth:

2a लम्बाई तथा $\sqrt{3}a$ चौड़ाई वाले आयत से समषट्भुज का बनना:



Regular Octagon/समअष्टभुज

A regular octagon shape has eight equal sides and eight equal angles.

एक नियमित अष्टकोणीय आकृति में आठ समान भुजाएँ और आठ समान कोण होते हैं।

1. The sum of the interior angles is 1080°.

आंतरिक कोणों का योग 1080° होता है।

2. The sum of the exterior angles is 360°.

बाह्य कोणों का योग 360° होता है।

3. The interior angle at each vertex is 135°.

प्रत्येक शीर्ष पर आंतरिक कोण का मान 135° होता है

4. Perimeter of regular octagon/नियमित अष्टभुज का परिमाप

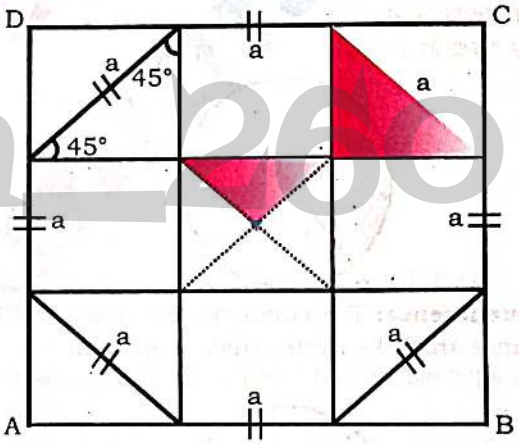
= 8 × Side(भुजा)

5. Area of regular octagon/नियमित अष्टकोण का क्षेत्रफल

$= 2a^2\left(1+2\sqrt{2}\right)$; Where, a is side of regular octagon.

6. Regular octagon formed by square of side x :–

x – भुजा के वर्ग से बना नियमित अष्टभुज



(a) Side of square(वर्ग की भुजा), $x = a(1+\sqrt{2})$

(b) Side of octagon(अष्टभुज की भुजा), $a = x(\sqrt{2}-1)$

☆☆☆☆☆

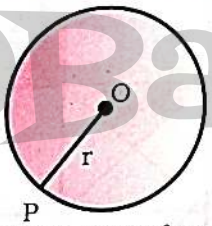
@Baka_200

CIRCLE/ वृत्त

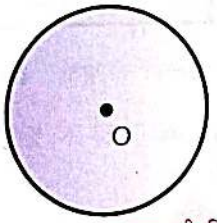
- **Circle :** A circle is a set of points on a plane which lie at a fixed distance from a fixed point.
  वृत्त: वृत्त बिंदुओं का समूह होता है जो एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर स्थित होते हैं।
- **Centre:** The fixed point is called the centre. In the given diagram 'O' is the centre of the circle.
  केन्द्र: वह निश्चित बिंदु जिससे प्रत्येक बिंदु की दूरी समान होती है। आकृति में 'O' केन्द्र है।



- **Radius:** The fixed distance is called the radius. In the given diagram OP is the radius of the circle. (Point P lies on the circumference.)
  त्रिज्या: वृत्त के किसी भी बिंदु की केन्द्र से दूरी त्रिज्या कहलाती हैं आकृति में OP त्रिज्या है। P बिंदु, परिधि पर स्थित है।

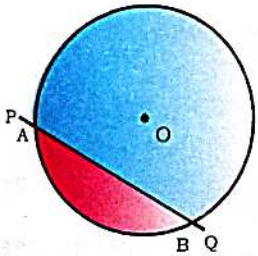


- **Circumference:** The circumference of a circle is the distance around a circle, which is equal to $2\pi r$.
  परिधि: वृत्त के चारों ओर खींची गई वृत्ताकार रेखा, जो $2\pi r$ के बराबर होती है।

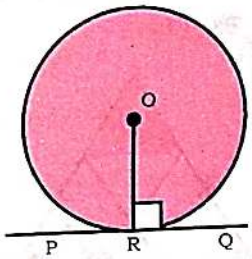


r → radius of the circle/r वृत्त की त्रिज्या है

- **Secant:** A line segment which intersects the circle in two distinct points, is called secant. In the given diagram secant PQ intersects circle at two points at A and B.
  छेदक रेखा: एक रेखाखंड जो किसी वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है, छेदक रेखा कहलाती है। दी गई आकृति में छेदक रेखा PQ वृत्त को दो बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेदित करती है।



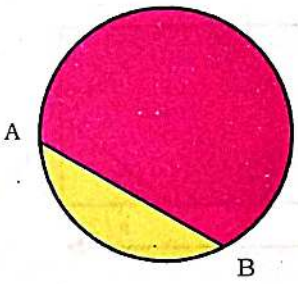
- **Tangent:** A line segment which has one common point with the circumference of a circle i.e., it touches only at only and only at one point is called as tangent of the circle. The common point is called as point of contact. In the given diagram PQ is a tangent which touches the circle at a point R.
  स्पर्श रेखा: एक रेखाखंड जो वृत्त को केवल एक बिंदु पर स्पर्श करे उसे स्पर्श रेखा कहते हैं तथा उस बिंदु को स्पर्श बिंदु कहते है। आकृति में PQ एक स्पर्श रेखा है तथा R स्पर्श बिंदु है। त्रिज्या सदैव स्पर्श रेखा पर लंबवत होती है।



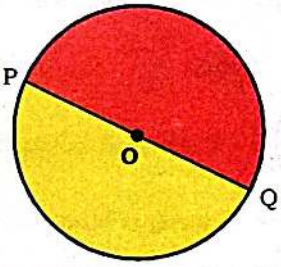
(R is the point of contact)

Note: Radius is always perpendicular to tangent.
नोट:-त्रिज्या सदैव स्पर्श रेखा पर लंबवत होती है।

- **Chord:** A line segment whose end points lie on the circle. In the given diagram AB is a chord.
  जीवा: एक रेखाखंड जिसके अंतिम बिंदु वृत्त की परिधि पर स्थित हों, जीवा कहलाती है। आकृति में, AB एक जीवा है।



- **Diameter:** A chord which passes through the centre of the circle is called the diameter of the circle. The length of the diameter is twice the length of the radius. In the given diagram PQ is the diameter of the circle. (O is the centre of the circle)
  व्यास : वृत्त के केन्द्र से गुजरने वाली जीवा को ही व्यास कहा जाता है। व्यास की लंबाई त्रिज्या से दुगुनी होती है। आकृति में PQ, व्यास और O केन्द्र है।



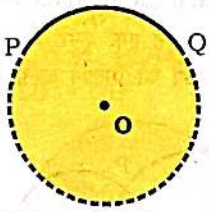
@Baka_260

Arc: Any two points on the circle divides the circle into two parts the smaller part is called as minor arc and the larger part is called as major arc.

It is denoted as $\frown$ In the given diagram $\overset{\frown}{PQ}$ is arc.

चाप: वृत्त की परिधि पर स्थित कोई भी दो बिंदु वृत्त को दो भागों में बांटते है। छोटे भाग को लघु चाप व बड़े भाग को दीर्घ चाप कहते हैं।

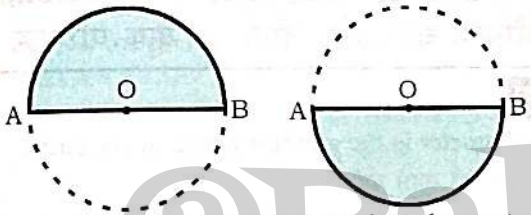
चाप को $\frown$ से दर्शाया जाता है। दिए गए चित्र में $\overset{\frown}{PQ}$ चाप है।



PQ ⟶ Minor Arc

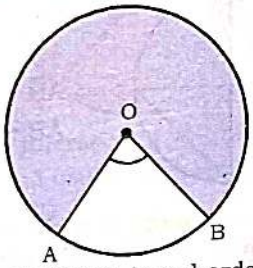
Semicircle: The diameter of the circle divides the circle into two equal parts. Each part is called as semicircle.

अर्धवृत्त: वृत्त का व्यास वृत्त को दो समान भागों में बांटता है। प्रत्येक भाग को अर्धवृत्त कहते हैं।



Central angle: An angle formed at the centre of the circle, is called the central angle. In the given diagram, ∠AOB is the central angle.

केन्द्रीय कोण: वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण केन्द्रीय कोण कहलाता है। दी गई आकृति में, ∠AOB केन्द्रीय कोण है।

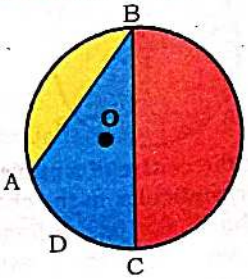


Inscribed angle: When two chords have one common end point, then the angle included between these two chords at the common point is called the inscribed angle.

∠ABC is the inscribed angle by the arc $\overset{\frown}{ADC}$.

अंत: वृत्त कोण: जब वृत्त की दो जीवाओं का अंत बिंदु एक ही हो, तो उन जीवाओं के बीच का कोण अंत: कोण कहलाता है।

$\overset{\frown}{ADC}$ द्वारा बनाया गया अंत: कोण ∠ABC है।



Measure of an arc: Basically it is the central angle formed by an arc. e.g.,

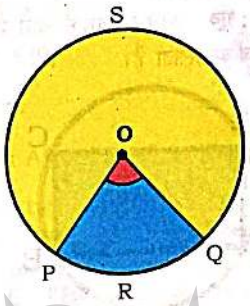
चाप का माप : चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण ही चाप का माप होता है।

(a) Measure of angle at the centre of circle = 360°
वृत्त के केंद्र पर कोण का माप = 360°

(b) Measure of angle at the centre of semicircle =180°
अर्धवृत्त के केंद्र पर कोण की माप =180°

(c) Measure of a minor arc = ∠POQ
लघु चाप की माप = ∠POQ

(d) Measure of a major arc = 360 - ∠POQ
दीर्घ चाप की माप = 360 - ∠POQ



m (arc PRQ) = m ∠POQ

m (चाप PRQ) = m ∠POQ

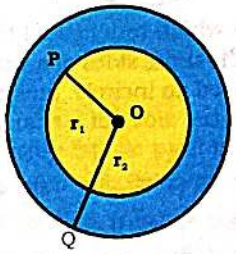
m (arc PSQ) = 360° - m (arc PRQ)

m (चाप PSQ) = 360° - m (चाप PRQ)

Concentric circles: Circles having the same centre at a plane are called the concentric circles.

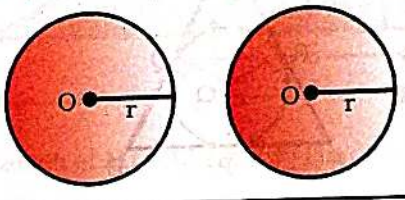
In the given diagram there are two circles with radii r_1 and r_2 having the common (or same) centre. These are called as concentric circles.

संकेन्द्रीय वृत्त: एक ही केन्द्र वाले वृत्तों को संकेन्द्रीय वृत्त कहा जाता है। आकृति में r_1 और r_2 त्रिज्या वाले दो वृत्त दिखाए गए है। जिनका केन्द्र एक ही है। अत: ये संकेन्द्रीय वृत्त है।



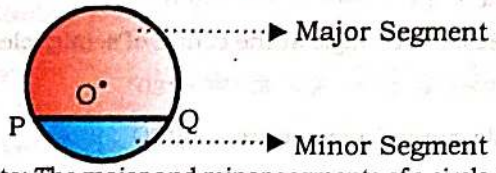
Congruent circles: Circles with equal radii are called as congruent circles.

सर्वांगसम वृत्त: समान त्रिज्या वाले वृत्तों को सर्वांगसम वृत्त कहा जाता है।



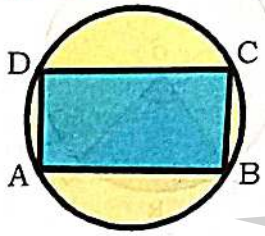
@BeKa_260

- **Segment of a circle:** A chord divides a circle into two regions. These two regions are called the segments of a circle.
  वृत्तखंड : जीवा वृत्त को दो भागों में बांटती है इन्हें वृत्तखंड कहा जाता है।
  (a) major segment/दीर्घखंड
  (b) minor segment/लघुखंड

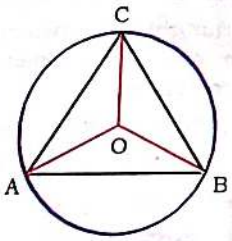


Note: The major and minor segments of a circle are called the alternate segments of each other.
वृत्त के बड़े और छोटे खंड एक दूसरे के वैकल्पिक खंड कहलाते हैं।

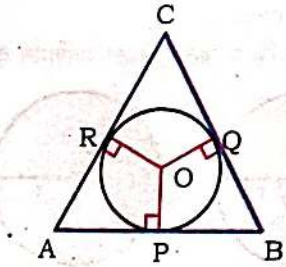
- **Cyclic quadrilateral:** A quadrilateral whose all the four vertices lie on the circle.
  एकवृत्तीय चतुर्भुज : एक चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित है एक वृत्तीय चतुर्भुज कहलाता है।



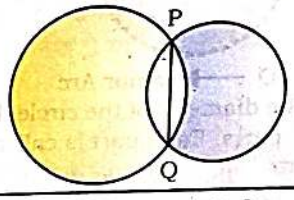
- **Circum-circle:** A circle which passes through all the three vertices of a triangle. Thus the circumcentre is always equidistant from the vertices of the triangle.
  परिवृत्त : एक वृत्त जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों से होकर गुजरता है, परिवृत्त कहलाता है। इस प्रकार परिकेन्द्र हमेशा त्रिभुज के तीनों शीर्षों से समान दूरी पर स्थित होता है।
  Circumradius/परित्रिज्या, OA = OB = OC = R



- **Incircle:** A circle which touches all the three sides of a triangle i.e., all the three sides of a triangle are tangents to the circle is called an incircle. Incircle centre is always equidistant from the sides of a triangle.
  अंत: वृत्त : एक वृत्त जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करे, अंत: वृत्त कहलाता है। इस प्रकार त्रिभुज की तीनों भुजाएं वृत्त पर स्पर्श रेखाएं होती है। इस प्रकार अंत: केन्द्र भुजाओं से समान दूरी पर स्थित होता है।
  Inradius/अंत: त्रिज्या, OP = OQ = OR = r



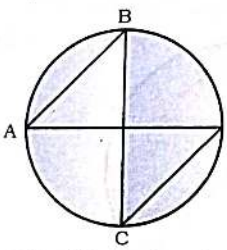
- Two arcs of a circle (or of congruent circles) are congruent if their degree measures are equal.
  एक वृत्त की दो चापें बराबर होती हैं अगर दोनों चापें केन्द्र पर समान कोण बनाएं।
- There is one and only one circle which passes through three non-collinear points.
  तीन असरेख बिंदुओं से केवल एक ही वृत्त गुजरता है।
- **Common Chord:** If two circles intersect at two points, the line segment is called a common chord.
  उभयनिष्ठ जीवा : यदि दो वृत्त एक-दूसरे को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो उन दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड उभयनिष्ठ जीवा कहलाता है।



Some Results on Congruent Arcs and Chords
सर्वांगसम चाप और जीवा पर कुछ परिणाम

Result-01

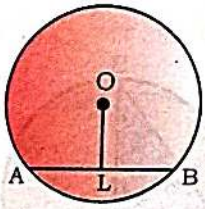
- The diameter is the greatest chord in the circle.
  व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा है।
- If two arcs of a circle (or of congruent circles) are congruent, then corresponding chords are equal.
  यदि एक वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों के) के दो चाप सर्वांगसम हैं, तो संगत जीवाएँ बराबर होती हैं।



$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
$\therefore$ AB = CD

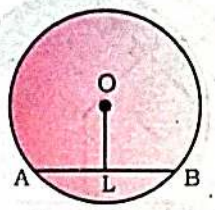
Conversely, if two chords of a circle (or of congruent circles) are equal, then their corresponding arcs (minor, major or semi-circular) are congruent
इसके विपरीत, यदि किसी वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों की) की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप (लघु, दीर्घ या अर्धवृत्ताकार) सर्वांगसम होते हैं।

- A perpendicular from the centre of a circle to a chord bisects the chord.
  वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।
  If OL $\perp$ AB, then AL = LB.



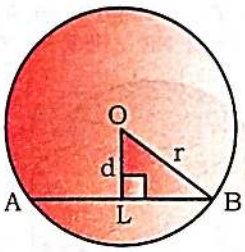
- The line joining the centre of a circle to the mid-point of a chord is perpendicular to the chord.
  वृत्त के केन्द्र को जीवा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

If AL = LB, then OL ⊥ AB.



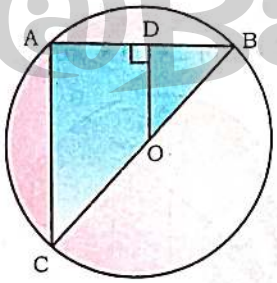
If OL ⊥ AB, then AL = LB and ΔOLB is a right-angled triangle, i.e. $OL^2 + LB^2 = OB^2$.

यदि OL ⊥ AB है, तो AL = LB और ΔOLB एक समकोण त्रिभुज है, अर्थात् $OL^2 + LB^2 = OB^2$



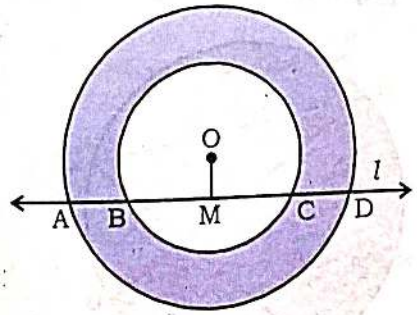
If in a circle, OD is perpendicular to the chord AB, O is centre of the circle and BC is a diameter as shown below, then CA = 2 × OD.

यदि एक वृत्त में, OD जीवा AB पर लंबवत है, O वृत्त का केंद्र है और BC एक व्यास है जैसा कि नीचे दिखाया गया है, तो CA = 2 × OD होगा।



If l is a line intersecting the two concentric circles, whose common centre is O, at the points A, B, C and D, then AB = CD.

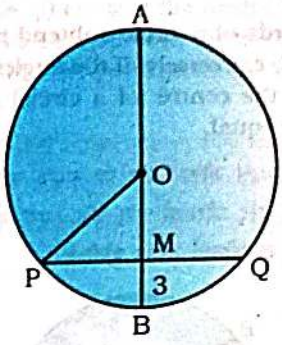
यदि l दो संकेंद्रित वृत्तों को, जिनका उभयनिष्ठ केंद्र O है, बिंदुओं A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करने वाली एक रेखा है, तो AB = CD होगा।



Ex. In a given circle, the chord PQ is of length 18 cm. AB is the perpendicular bisector of PQ at M. If MB = 3 cm, then the length of AB = ?

दिये गये वृत्त में जीवा PQ की लंबाई 18 सेमी, AB जीवा PQ के बिन्दु M पर लम्ब समद्विभाजक हैं। यदि MB = 3 सेमी है तो AB की लंबाई है।

HINTS:



OM = OB – MB = $x - 3$

In ΔOMP, using Pythagoras Theorem

$(OP)^2 = (OM)^2 + (MP)^2$

$(x)^2 = (x-3)^2 + (9)^2$

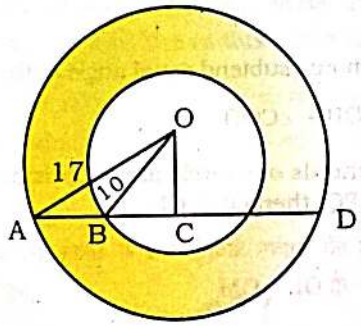
$\Rightarrow x = 15$ cm

$\therefore$ Diameter AB = 15 × 2 = 30 cm.

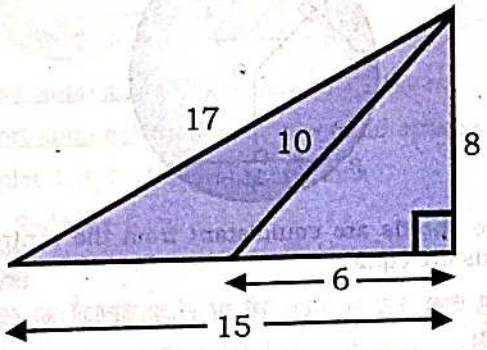
Ex. The radius of two concentric circles are 17 cm and 10 cm. A straight line ABCD is intersects the larger circle at point A and D and intersects the smaller circle at point B and C. If BC = 12 cm then the length of AD =?

दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्या 17 सेमी और 10 सेमी है। एक सीधी रेखा ABCD बड़े वृत्त को बिन्दु A तथा D और छोटे वृत्त को बिन्दु B तथा C पर प्रतिच्छेद करती है। यदि BC = 12 सेमी है, तो AD की लंबाई क्या है?

HINTS:



Apply the concept of triplets.



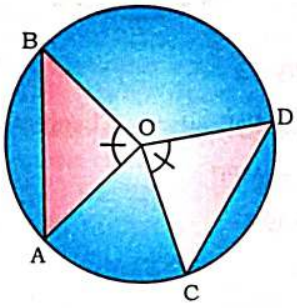
$\therefore$ Length of AD = 15 × 2 = 30 cm.

@Baka_260

Result-02

- Equal chords of a circle subtend equal angles at the centre and, conversely, if the angles subtended by the chords at the centre (of a circle) are equal, the the chords are equal.

  एक वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं और, इसके विपरीत, यदि जीवाओं द्वारा केंद्र (एक वृत्त के) पर अंतरित कोण समान होते हैं, तो जीवाएँ समान होती हैं।



If AB = CD, then ∠AOB = ∠COD

यदि AB = CD है, तो ∠AOB = ∠COD

Conversely, if ∠AOB = ∠COD, then AB = CD.

इसके विपरीत, यदि ∠AOB = ∠COD, तो AB = CD

Ex. AB and CD are two chords of a circle such that AB = CD = 5 cm and r = 4 cm. If O is the centre of the circle, then (∠AOB – ∠COD) is:

AB और CD एक वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं कि AB = CD = 5 सेमी और r = 4 सेमी है। यदि O वृत्त का केन्द्र हों तो (∠AOB – ∠COD) का मान है :

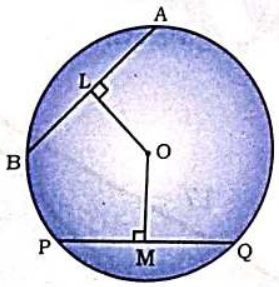
HINTS:

Equal chords subtend equal angle at the center

∴ ∠AOB = ∠COD

- Equal chords of a circle are equidistance from centre. If AB = PQ, then OL = OM

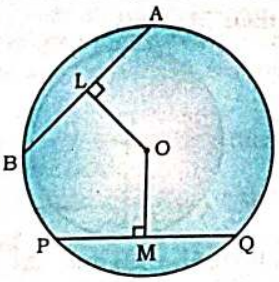
  किसी वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं। यदि AB = PQ हो, तो OL = OM



- If two chords are equidistant from the centre, then chords are equal.

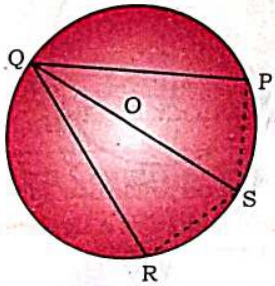
  यदि दो जीवा केन्द्र से बराबर दूरी पर हों तो जीवाओं की लंबाई समान होती है।

If/यदि OL = OM, then/तो AB = PQ



- If PQ and QR are chords of a circle equidistant from the centre, then the diameter passing through Q bisects ∠PQR and ∠PSR.

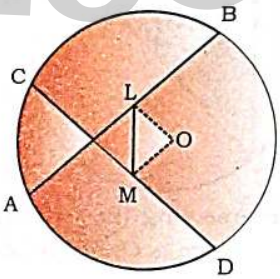
  यदि PQ और QR केंद्र से समदूरस्थ वृत्त की जीवाएँ हैं, तो Q से गुजरने वाला व्यास ∠PQR और ∠PSR को समद्विभाजित करता है।



- If L and M are mid-points of two equal chords AB and CD of a circle with centre O, then

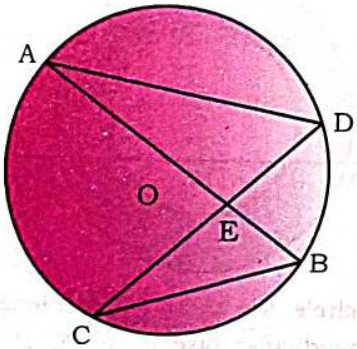
  यदि L और M केंद्र O वाले वृत्त की दो समान जीवाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं, तो

  (a) ∠OLM = ∠OML (b) ∠ALM = ∠CML



- If two equal chords AB and CD of a circle with centre O intersect each other at E, then AD = CB.

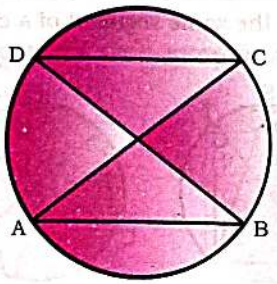
  यदि O केंद्र वाले एक वृत्त की दो समान जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को E पर काटती हैं, तो AD = CB है।



- If A, B, C, D are four consecutive points on a circle and AB = CD, then AC = BD.

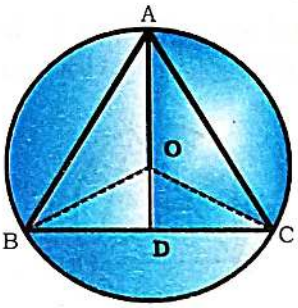
  यदि A, B, C, D एक वृत्त पर चार क्रमागत बिंदु हैं और AB = CD, तो AC = BD है।

@Raka_260



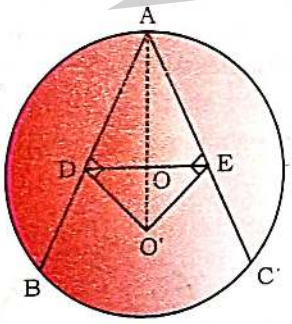
If bisector AD of ∠BAC of ΔABC passes through the centre O of the circumcircle of ΔABC, then AB = AC.

यदि ΔABC के ∠BAC का समद्विभाजक AD, ΔABC के परिवृत्त के केंद्र O से होकर गुजरता है, तो AB = AC।



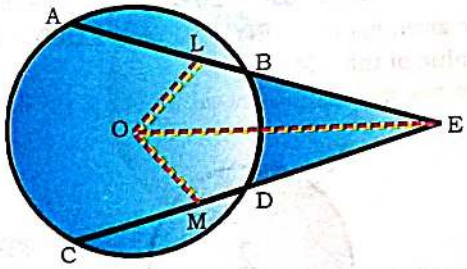
If AB and AC are two equal chords of circle whose centre is O and if OD ⊥ AB and OE ⊥ AC, then ΔADE is an isosceles triangle.

यदि AB और AC वृत्त की दो समान जीवाएँ हैं जिनका केंद्र O है और यदि OD ⊥ AB और OE ⊥ AC है, तो ΔADE एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



If two equal chords AB and CD of a circle with centre O, when produced to meet at a point E, as shown in the given figure, then BE = DE and AE = CE.

यदि केंद्र O वाले एक वृत्त की दो समान जीवाएँ AB और CD, जब एक बिंदु E पर मिलने के लिए बढ़ाई जाती हैं, जैसा कि दिए गए चित्र में दिखाया गया है, तो BE = DE और AE = CE।



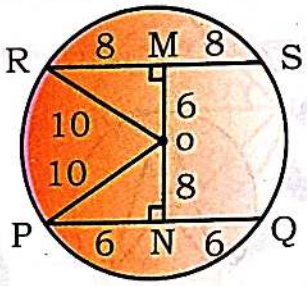
If two chords of a circle bisect one another they must be diameters.

यदि एक वृत्त की दो जीवाएँ एक दूसरे को समद्विभाजित करती हैं तो वे व्यास होती है।

Ex. PQ and RS are the two parallels chords of a circle whose redius is 10 cm and the centre is O. If PQ = 12 cm and RS = 16 cm and both lie on the oppsite sides of the centre, find the perpendicular distance between PQ and RS.

PQ तथा RS, 10 सेमी त्रिज्या और O केन्द्र वाले किसी वृत्त की दो समानांतर जीवाएँ हैं। यदि PQ = 12 सेमी और RS = 16 सेमी तथा दोनों केन्द्र के विपरीत ओर स्थित हैं। PQ तथा RS के बीच की लंबवत दूरी ज्ञात कीजिए।

HINTS:



In ΔOMR and ΔONP by using Pythagorus theorem

$(OM)^2 = (OR)^2 - (MR)^2 = (10)^2 - (8)^2$

$(ON)^2 = (OP)^2 - (NP)^2 = (10)^2 - (6)^2$

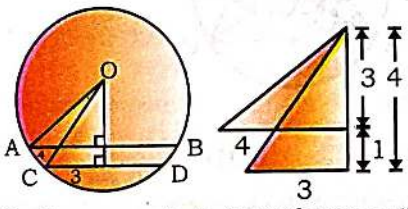
$\therefore$ OM = 6 and ON = 8

Perpendicular distance between two chord = OM + ON = 8 + 6 = 14 cm

Ex. AB = 8 cm and CD = 6 cm are two parallel chords on the same side of the centre of a circle. The distance between them is 1 cm. The radius of the circle is :

AB = 8 सेमी और CD = 6 सेमी, वृत्त के केन्द्र की एक ही ओर स्थित दो समांतर जीवाएँ हैं। उनके बीच की दूरी 1 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या है :

HINTS:



Basic approach go by Pythagorus theorem

Short approach work on triplets and options.

Triplet 3, 4, 5 satisfy all conditions

$\therefore$ Radius = 5 cm

Result-03

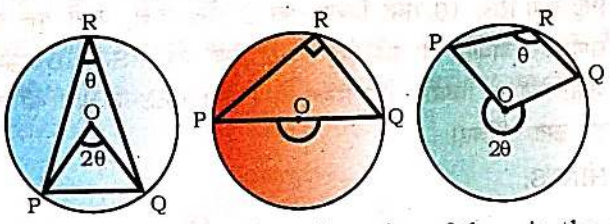
The angle subtended by an arc of a circle at the centre is double the angle sutended on it at any point on the remaining part of the circle on the same side in which the centre lies.

@BaKa_260

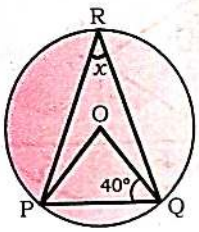
किसी वृत्त के चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण वृत्त के उसी ओर शेष भाग में किसी बिन्दु पर बनाए गए कोण का दोगुना होता है।

In each of the below figures/नीचे दी गई सभी आकृति में

$\angle POQ = 2\angle PRQ$.



Ex. If O be the centre, then the value of the x in the given figure is :
यदि O वृत्त का केन्द्र हो तो दिये गये चित्र में x का मान है:



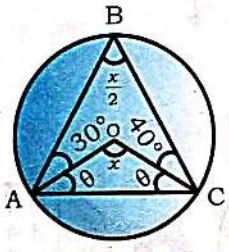
HINTS:

In ΔPOQ, $\angle POR = 180° - (40° + 40°) = 100°$

$\therefore \quad \angle PRQ = \frac{100}{2} = 50°$

Ex. O is the centre of the circle passing through the points A, B and C such that $\angle BAO = 30°$, $\angle BCO = 40°$ and $\angle AOC = x°$. What is the value of x ?
A, B तथा C से होकर गुजरने वाले वृत्त का केन्द्र O इस प्रकार है कि $\angle BAO = 30°$, $\angle BCO = 40°$ और $\angle AOC = x°$ है। x का मान क्या है?

HINTS:



In ΔAOC,

$2\theta + x = 180°$ ...(1)

In ΔABC,

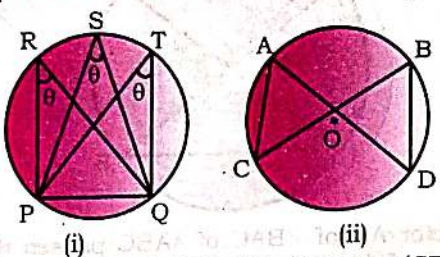
$\theta + 30° + \theta + 40° + \frac{x}{2} = 180°$

$2\theta + 70° + \frac{x}{2} = 180°$

$180° - x + 70° + \frac{x}{2} = 180°$

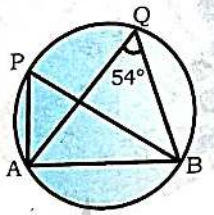
$\frac{x}{2} = 70° \Rightarrow x = 140°$

The angles in the same segment of a circle are equal i.e.
किसी वृत्त के एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।



$\angle PRQ = \angle PSQ = \angle PTQ$ in (i), $\angle CAD = \angle CBD$ in (ii)

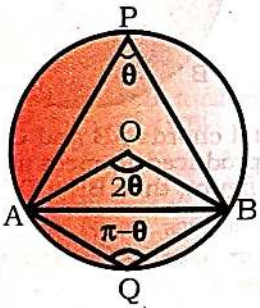
Ex. In the given figure, AB is a chord and P and Q are two points on the circle such that $\angle AQB = 54°$, then $\angle APB$ is :
दिये गये चित्र में O केन्द्र और AB जीवा है। यदि P और Q वृत्त पर दो बिन्दु इस प्रकार हों कि $\angle AQB = 54°$, तो $\angle APB$ है:



HINTS:

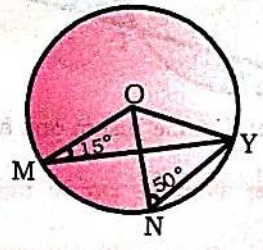
$\angle APB = \angle AQB = 54°$, as the angles in the same segment of circle are equal

If AB is a chord, O is the centre and P and Q are any points in the major and the minor segments of the circle respectively, then
The angles in the major segment and the minor segment are supplementary.
यदि AB जीवा, O केन्द्र और P तथा Q क्रमशः दीर्घ वृत्तखंड और लघु वृत्तखंड में दो बिन्दु हैं, तो दीर्घ वृत्तखंड और लघु वृत्तखंड में कोण अनुपूरक होते हैं।



If $\angle APB = \theta$, then $\angle AOB = 2\theta$ & $\angle AQB = \pi - \theta$.

Ex. In the given figure, $\angle ONY = 50°$ and $\angle OMY = 15°$, then the value of the $\angle MON$ is :
दिये गये चित्र में $\angle ONY = 50°$ और $\angle OMY = 15°$ है, तो $\angle MON$ का मान है :



@Baka_260

HINTS:

$\angle MON = \angle MYN = \theta$

OM = OY = Radius

$\angle OMY = \angle OYM = 15°$

ON = OY = radius

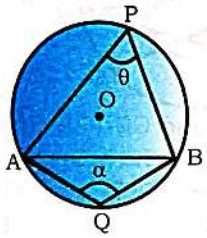
$\angle ONY = \angle OYN = 50°$

$\angle NYM = 50° - 15° = 35°$

$\angle MON = 2 \times 35° = 70°$

- The angle subended by an arc in the major segment is acute and that in the minor segment is obtuse.

किसी चाप द्वारा दीर्घ वृत्तखंड में बनाया गया कोण न्यून कोण और लघु वृत्तखंड में बनाया गया अधिक कोण होता है।



Let $\overset{\frown}{AB}$ is an arc and P and Q are the points on the circumference, then

यदि $\overset{\frown}{AB}$ एक चाप है और P तथा Q परिधि पर दो बिन्दु हैं, तो

$\angle APB < 90°$ and $\angle AQB > 90°$

- **The diameter of a circle subtends**

वृत्त का व्यास आंतरित करता है-

(a) An obtuse angle at a point in the interior of the circle./वृत के अंदर किसी बिन्दु पर अधिक कोण।

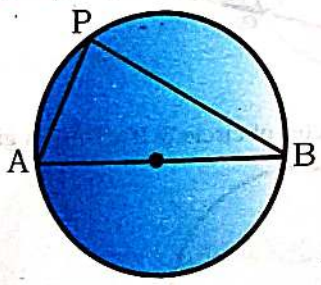
(b) An acute angle at a point in the exterior of the circle./वृत के बाहर किसी बिंदु पर न्यून कोण।

(c) A right angle at a point on the circle.

वृत्त के किसी बिंदु पर समकोण।

Ex. In the given figure, the centre of the circle lies on AB and P is any point on the circle and $\angle ABP = 35°$, then $\angle PAB$ is :

दिये गये चित्र में वृत्त का केन्द्र AB पर स्थित है और P वृत्त पर कोई बिन्दु है, $\angle ABP = 35°$ है, तो $\angle PAB$ है :



HINTS:

$\angle APB = 90°$

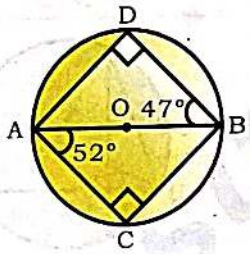
$\angle BAP = 90° - \angle ABP$

$\angle BAP = 90° - 35° = 55°$

Ex. AB is the diameter of a circle with centre O. C and D are two points on the circle on either side of AB, such that $\angle CAB = 52°$ and $\angle ABD = 47°$. What is the difference (in degrees) between the measures of $\angle CAD$ and $\angle CBD$?

केन्द्र O वाले एक वृत्त का व्यास AB है। AB के किसी भी ओर वृत्त पर दो बिन्दु C और D इस प्रकार है कि $\angle CAB = 52°$ और $\angle ABD = 47°$ है। $\angle CAD$ और $\angle CBD$ के मापों में क्या अंतर (डिग्री में) क्या है?

HINTS:



$\angle BAD = 90° - 47° = 43°$

$\angle CBA = 90° - 52° = 38°$

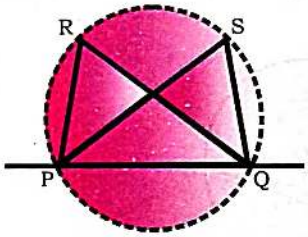
$\angle CAD = 52° + 43° = 95°$

$\angle CBD = 47° + 38° = 85°$

$\angle CAD - \angle CBD = 95° - 85° = 10°$

- If a line segment joining two points subtends equal angles at two other points lying on the same side of the line segment, the four points lie on the same circle, is they are concyclic.

यदि दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा, रेखाखंड के एक ही तरफ स्थित दो अन्य बिंदुओं पर समान कोण आंतरित करती है, तो वृत्त पर स्थित चारों बिंदु चक्रीय हैं।



It is given that $\angle PRQ = \angle PSQ$.

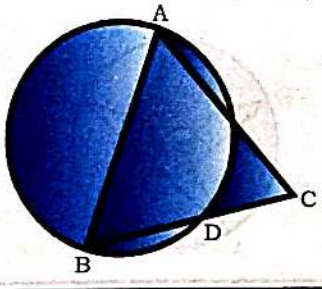
यह दिया गया है कि $\angle PRQ = \angle PSQ$।

Hence the points P, Q, R and S are concyclic.

इसलिए बिंदु P, Q, R और S चक्रीय हैं।

- The circle drawn on any one of the equal side of an isosceles triangle as diameter bisects the base.

एक समद्विबाहु त्रिभुज की किसी एक समान भुजा पर व्यास के रूप में खींचा गया वृत्त आधार को समद्विभाजित करता है।



@Baka_260

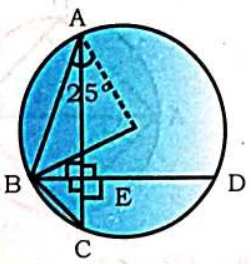
If in a ΔABC in which AB = AC and a circle is drawn by taking AB as diameter which intersects the side BC of triangle at D, then BD = DC.

यदि किसी ΔABC में जिसमें AB = AC है और AB को व्यास मानकर एक वृत्त खींचा गया है जो त्रिभुज की भुजा BC को D पर प्रतिच्छेद करता है, तो BD = DC होता है।

Ex. Chords AC and BD of a circle with centre O intersect at right angles at E. If ∠OAB = 25°, then the value of ∠EBC is:

O केंद्र वाले वृत्त की जीवाएँ AC और BD, E पर समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि ∠OAB = 25° तो ∠EBC का मान है:

HINTS:



OA = OB (Radius)

∠OBA = ∠OAB = 25°

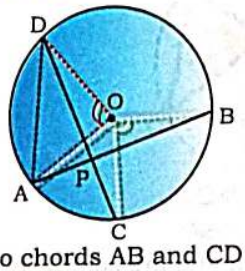
∠AOB = 180° – 50° = 130°

$\angle ACB = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$

∠EBC = 90° – 65° = 25°

Two chords AB and CD of a circle with centre O, intersect each other at P. If ∠AOD = x°. and ∠BOC = y°. Then the value of ∠APC is:

O केंद्र वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को P पर काटती हैं। यदि ∠AOD = x° और ∠BOC = y° है तब ∠APC का मान है:

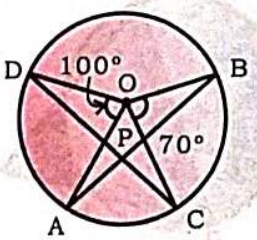


$\angle APC = 180^\circ - \frac{(x+y)}{2}$

Ex. Two chords AB and CD of a circle with centre O, intersect each other at P. If ∠AOD = 100° and ∠BOC = 70°, then the value of ∠APC is :

O केंद्र वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को P पर काटती हैं। यदि ∠AOD = 100° और ∠BOC = 70° है, तो ∠APC का मान है:

HINTS:

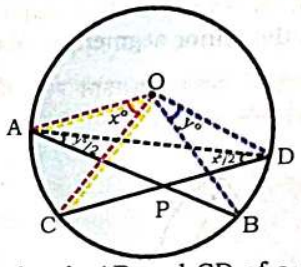


$\angle APC = 180^\circ - \left(\frac{100^\circ+70^\circ}{2}\right)$

∠APC = 180° – 85° = 95°

Two chords AB and CD of a circle with centre O, intersect each other at P. If ∠AOC = x° and ∠BOD = y°. Then the value of ∠BPD is:

O केंद्र वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को P पर काटती हैं। यदि ∠AOC = x° और ∠BOD = y° है तब ∠BPD का मान है:

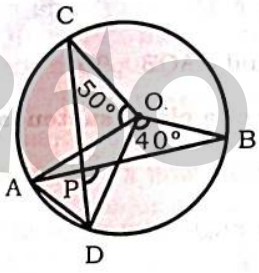


$\angle BPD = \frac{(x+y)}{2}$

Ex. Two chords AB and CD of a circle whose centre is O meet each other at the point P and ∠AOC = 50° and ∠BOD = 40°, then ∠BPD is equal to:

एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD जिसका केंद्र O है, एक दूसरे को बिंदु P पर मिलती है और ∠AOC = 50° और ∠BOD = 40°, तो ∠BPD बराबर है:

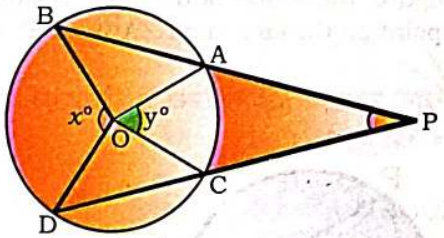
HINTS:



$\angle BPD = \frac{(x+y)}{2} = \frac{50+40}{2} = 45^\circ$

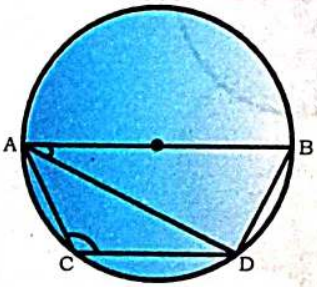
When chords are intersecting at an external point.

जब जीवाएं एक बाहरी बिंदु पर प्रतिच्छेद कर रही हो।



$\angle BPD = \frac{(x-y)}{2}$

AB is diameter of circle & If ∠BAC is given



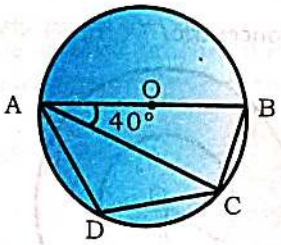
∠DAC = 90° – 2 ∠BAC

@Baka_200

Ex. In a circle with centre O, AB is the diameter and CD is a chord such that ABCD is a trapezium. If ∠BAC = 40°, then ∠CAD is equal to :

केन्द्र O वाले एक वृत्त में AB व्यास है और CD एक ऐसी जीवा है कि ABCD समलम्ब है। यदि ∠BAC = 40° है, तो ∠CAD ज्ञात करें।

HINTS:



∠ACB = 90°

∠ABC = 90° – 40° = 50°

∠ADC = 180° – 50° = 130°

∠BAC = ∠DCA = 40° (AB || CD)

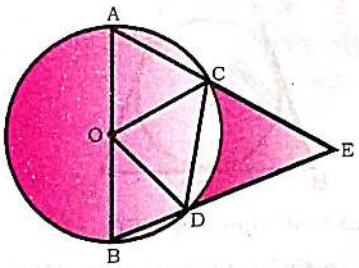
In ΔADC,

∠CAD = 180° – (40° + 130°) = 10°

- In a circle with centre O, AC and BD are two chords. AC and BD meet at E when produced. If AB is diameter and ∠AEB = $x°$, then the measure of ∠DOC is:

O केन्द्र वाले किसी वृत में AC तथा BD दो जीवा है। AC तथा BD को बढ़ाने पर वे विंदु E पर मिलती है। यदि AB व्यास तथा ∠AEB = $x°$ हो तो ∠DOC कि माप-

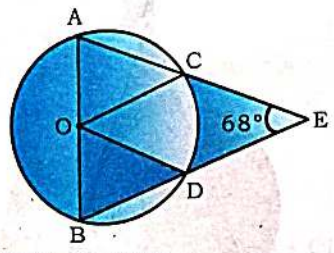
∠DOC = 180° – 2 ∠AEB.



Ex. In a circle with centre O, AC and BD are two chords. AC and BD meet at E when produced. If AB is the diameter and ∠AEB = 68°, then the measure of ∠DOC is :

केन्द्र O वाले एक वृत्त में, AC और BD दो जीवाएँ हैं। AC और BD बढ़ाए जाने पर E पर मिलती है। यदि AB व्यास है तथा ∠AEB = 68° है, तो ∠DOC का मान ज्ञात करें।

HINTS:



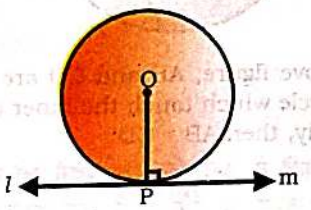
∠DOC = 180° – 2∠AEB

= 180° – 2 × 68° = 44°

Result-04

- The tangent at any point on a circle is perpendicular to the radius drawn through the point of contact.

वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर खींची गई त्रिज्या पर लम्ब होती है।

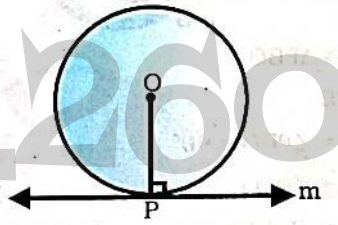


If the $\overleftrightarrow{lm}$ is a tangent, O is the centre and P is the point of contact, then OP ⊥ *lm*.

यदि $\overleftrightarrow{lm}$ एक स्पर्श रेखा है, O केन्द्र है और P स्पर्श बिन्दु है, तो OP ⊥ *lm*.

- A line drawn through the end-point of a radius and it is perpendicular to the radius. It is the tangent to the circle.

त्रिज्या के अंत बिन्दु से होकर और इस पर लम्बवत खींची गई कोई रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

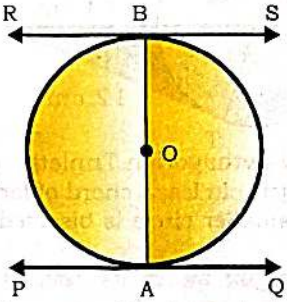


If O is the centre, P is the point of contact and OP ⊥ *lm*, then $\overleftrightarrow{lm}$ is the tangent.

यदि O केन्द्र है, P स्पर्श बिन्दु है और OP ⊥ *lm* तो $\overleftrightarrow{lm}$ एक स्पर्श रेखा है।

- The tangent lines at the end points of a diameter of a circle are parallel.

एक वृत्त के व्यास के अंत बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ समानांतर होती हैं।



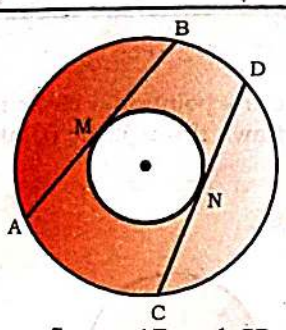
If AB is a diameter of a given circle, and PQ and RS are the tangents drawn to the circle at points A and B respectively, then PQ || RS.

यदि AB किसी दिए गए वृत्त का व्यास है, और PQ और RS क्रमशः बिंदु A और B पर वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं, तो PQ || RS

- In two concentric circles, all chords of the outer circle which touch the inner circle are of equal length.

दो संकेंद्रित वृत्तों में, बाहरी वृत्त की सभी जीवाएँ जो आंतरिक वृत्त को स्पर्श करती हैं, समान लंबाई की होती हैं।

@BaKa_260

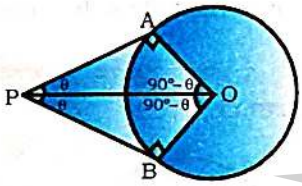


If in the above figure, AB and CD are two chords of the outer circle which touch the inner circle at M and N respectively, then AB = CD.

यदि उपरोक्त आकृति में, AB और CD बाहरी वृत्त की दो जीवाएँ हैं जो आंतरिक वृत्त को क्रमश: M और N पर स्पर्श करती हैं, तो AB = CD।

- Two tangent PA and PB are drawn from an external point P on a circle, whose centre is O, then

O केन्द्र वाले किसी वृत्त में वाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB खींची गई है, तो



(a) $\Delta PAO \cong \Delta PBO$

(b) PA = PB

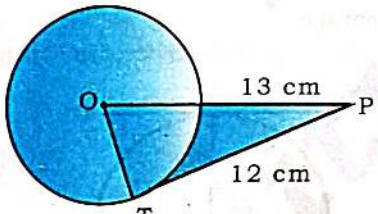
(c) $\angle PAO = \angle PBO = 90°$

(d) $\angle APO = \angle BPO$

Ex. From a point P, 13 cm away from the centre, a tangent PT of length 12 cm is drawn. Find the radius of the circle.

केन्द्र से 13 सेमी दूर स्थित किसी बिन्दु P से 12 सेमी लम्बी एक स्पर्श रेखा PT खींची गई है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

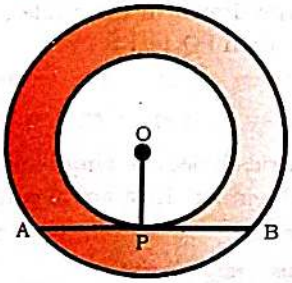
HINTS:



OT = 5 cm (by Pythagorian Triplet)

- In two concentric circles, a chord of larger circle which is tangent to smaller circle is bisected at the point of contact.

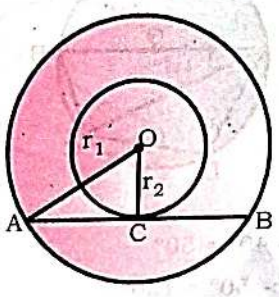
दो संकेंद्रित वृत्तों में, बड़े वृत्त की एक जीवा जो छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है, स्पर्श बिंदु पर समद्विभाजित होती है।



In the above figure, if O is the common centre of two concentric circles and AB is a chord of the larger circle touching the smaller circle at P, then AP = BP. Therefore, AB is bisected at point P.

उपरोक्त आकृति में, यदि O दो संकेंद्रित वृत्तों का उभयनिष्ठ केंद्र है और AB छोटे वृत्त को P पर स्पर्श करने वाले बड़े वृत्त की जीवा है, तो AP = BP अत: AB बिंदु P पर समद्विभाजित है।

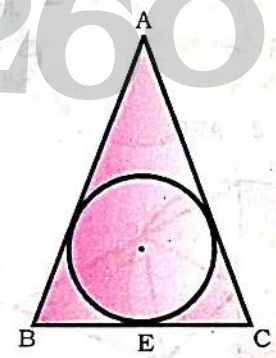
- If circles are concentric/यदि वृत्त सकेन्द्रीय हों



Lenght of AB = 2AC = $2\sqrt{r_1^2 - r_2^2}$

- If ΔABC is an isosceles triangle in which AB = AC, circumscribed about a circle, then the base is bisected by the point of contact.

यदि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC, एक वृत्त के चारों ओर परिबद्ध है, तो आधार संपर्क बिंदु से द्विभाजित होता है।

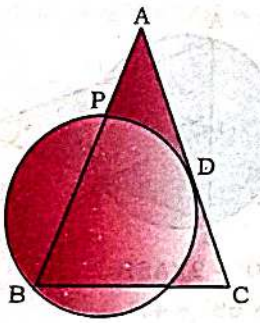


In ΔABC, AB = AC then BE = EC.

Ex. ABC is an isosceles triangle with AB = AC. A circle through B touching AC at the middle point and intersects AB at P. Then AP : AB is-

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। B से होकर जाने वाला एक वृत्त AC को मध्य बिंदु पर स्पर्श करता है और AB को P पर प्रतिच्छेद करता है। तब AP : AB है-

HINTS:



@Baka_260

Since D is the midpoint AC

$AD = \frac{AC}{2} = \frac{AB}{2}$ ($\because AB = AC$)

$AP \times AB = AD^2$

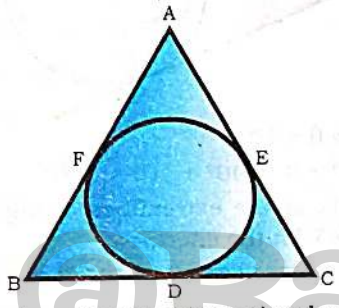
$AP \times AB = \frac{AB^2}{4}$

$\frac{AP}{AB} = \frac{1}{4}$

- If the incircle of ΔABC touches the sides BC, CA and AB at D, E and F respectively, then

$AF + BD + CE = AE + BF + CD = \frac{1}{2}$ (Perimeter of ΔABC)

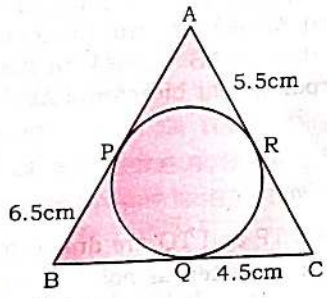
यदि ΔABC का अंत: वृत्त क्रमश: D, E और F पर भुजाओं BC, CA और AB को स्पर्श करता है, तो $AF + BD + CE = AE + BF + CD = \frac{1}{2}$ (ΔABC का परिमाप)



Ex. A circle is inscribed inside a triangle ABC. It touches sides AB, BC and AC at the points P, Q and R respectively. If BP = 6.5 cm, CQ = 4.5 cm and AR = 5.5 cm, then the perimeter (in cm) of the triangle ABC is

एक वृत्त किसी त्रिभुज ABC के भीतर स्थित है। यह भुजाओं AB, BC और AC को क्रमश: बिन्दु P, Q और R पर स्पर्श करता है। यदि BP = 6.5 सेमी, CQ = 4.5 सेमी और AR = 5.5 सेमी है, तो त्रिभुज ABC का परिमाप (सेमी में) क्या होगा?

HINTS:



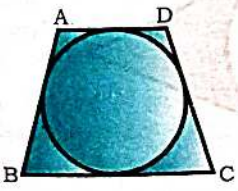
Perimeter of ΔABC

= 2(AR + BP + QC)

= 2(16.5) = 33 cm

- If a quadrilateral ABCD circumscribe a circle then

यदि चतुर्भुज ABCD के अंदर एक वृत्त बना हो, तो



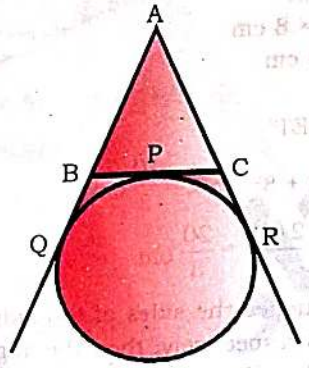
AB + CD = BC + AD

- If a circle is touching the side BC of ΔABC at P and touching AB and AC produced at Q and R respectively, then

$AQ = \frac{1}{2}$ (Perimeter of ΔABC)

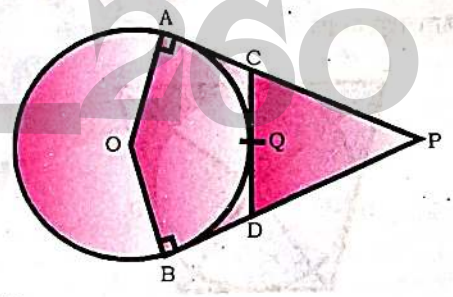
यदि एक वृत्त ΔABC की भुजा BC को P पर स्पर्श कर रहा है और क्रमश: Q और R पर बढ़ी हुई AB और AC को स्पर्श कर रहा है, तो

$AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC का परिमाप)



Ex. In the given figure, circle with centre O have two tangents PA, PB. CD is also tangents, then 2PB is.

दी गई आकृति में, O केंद्र वाले वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB हैं। CD भी स्पर्शरेखा है, तो 2PB है।



HINTS:

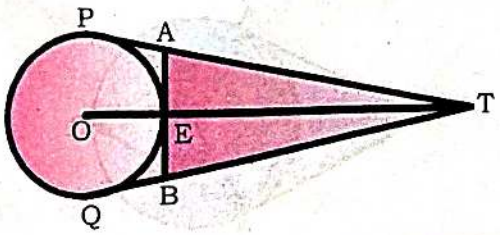
$PB = \frac{1}{2}$ (Perimeter of ΔPDC)

$PB = \frac{1}{2}$ (PD + DC + PC)

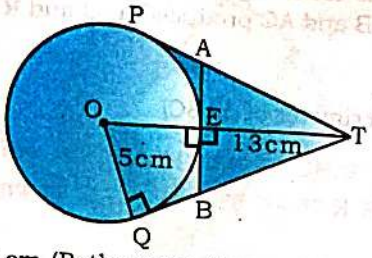
2PB = PD + DC + PC

Ex. In the given figure, from a point T, 13 cm away from the center O of a circle of radius 5 cm, the two tangents PT and QT are drawn. What is the length of AB?

दिये गये चित्र में 5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त में केन्द्र O से 13 सेमी दूर बिन्दु T से दो स्पर्श रेखाएँ PT तथा QT खींची गई है। AB की लंबाई क्या है?



HINTS:



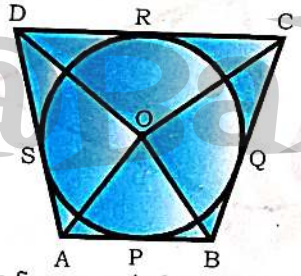
QT = 12 cm (Pythagoras theorem)
Let QB = x cm
ET = 13 – 5 = 8 cm
BT = (12 – x) cm
In ΔBET,
$BT^2 = BE^2 + ET^2$

$$(12 - x)^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow x = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

$$AB = 2BE = \frac{2\times10}{3} = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

If a circle touches the sides of a quadrilateral ABCD at P, Q, R, S respectively, then the angles subtended at the centre by a pair of opposite sides are supplementary.

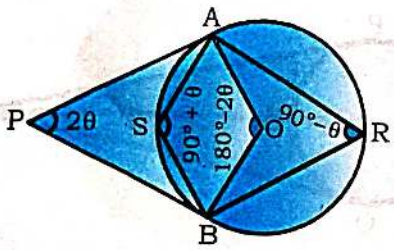
यदि एक वृत्त चतुर्भुज ABCD की भुजाओं को क्रमशः P, Q, R, S पर स्पर्श करता है, तो विपरीत भुजाओं के एक युग्म द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण संपूरक होते हैं।



In the above figure, a circle with centre O touches the sides AB, BC, CD and DA of a quadrilateral ABCD at the points P, Q, R and S respectively, then
∠AOB + ∠COD = 180° and ∠AOD + ∠BOC = 180°
उपरोक्त आकृति में, केंद्र O वाला एक वृत्त एक चतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB, BC, CD और DA को क्रमशः बिंदुओं P, Q, R और S पर स्पर्श करता है, फिर
∠AOB + ∠COD = 180° और ∠AOD + ∠BOC = 180°

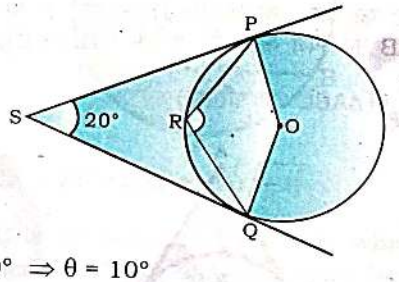
Result-05

PA and PB are two tangents, O is the center of the circle and R and S are the points on the circle, then
O केन्द्र वाले किसी वृत्त में वाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB खींची गई है और R तथा S वृत्त पर दो बिन्दु हैं:



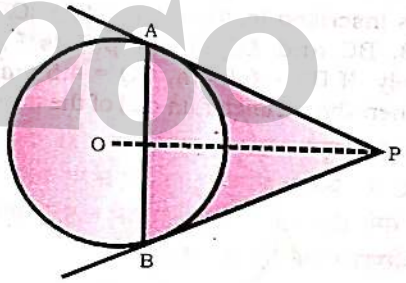
Let ∠APB = 2θ, then
∠AOB = 180° – 2θ
∠ARB = 90° – θ
∠ASB = 90° + θ

Ex. P and Q are two points on a circle with centre at O. R is a point on the minor arc at the circle between the points P and Q. The tangents to the circle at the point P and Q meet each other at the point S. If ∠PSQ = 20°, then ∠PRQ = ?
O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर दो बिन्दु P तथा Q है। R बिन्दुओं P तथा Q के बीच लघु चाप पर स्थित कोई बिन्दु है। वृत्त के बिन्दु P तथा Q पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ एक-दूसरे से बिन्दु S पर मिलती हैं। यदि ∠PSQ = 20° हो, तो ∠PRQ का मान है :
HINTS:



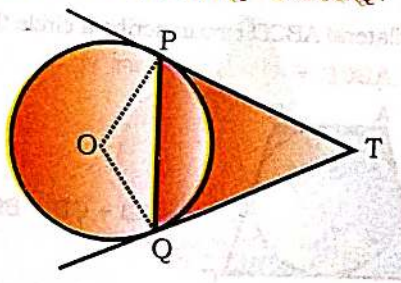
2θ = 20° ⇒ θ = 10°
∠PRQ = 90° + θ = 90° + 10° = 100°

The tangents at the extremities of any chord make equal angles with the chord.
किसी भी जीवा के सिरों पर स्पर्श रेखाएँ जीवा से समान कोण बनाती हैं।



If in the above figure, AB is a chord of the circle with centre O, and AP, BP are the tangents at A and B respectively, then ∠PAB = ∠PBA. In the above figure, OP is the perpendicular bisector of AB.
यदि उपरोक्त आकृति में, AB केंद्र O वाले वृत्त की जीवा है, और AP, BP क्रमशः A और B पर स्पर्श रेखाएँ हैं, तो, ∠PAB = ∠PBA उपरोक्त आकृति में, OP, AB का लम्ब समद्विभाजक है।

If two tangents TP and TQ are drawn to a circle with centre O from an external point T, then ∠PTQ = 2 ∠OPQ.
यदि किसी बाहरी बिंदु T से O केंद्र वाले वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ TP और TQ खींची जाती हैं, तो ∠PTQ = 2 ∠OPQ।

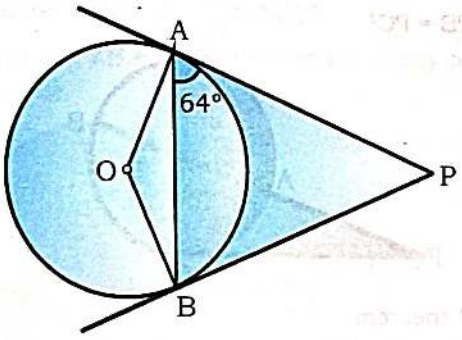


@Baka_2do

Ex. Two tangents from a point P are drawn to a circle which touch the circle at points A and B, respectively. If O is the centre of the circle and ∠PAB = 64°, then ∠APB is :

O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ खींची गई है। यदि दोनों स्पर्श रेखाएँ वृत्त को बिन्दु A तथा B पर स्पर्श करती हों और ∠PAB = 64° हो, तो ∠APB की माप क्या है?

HINTS:



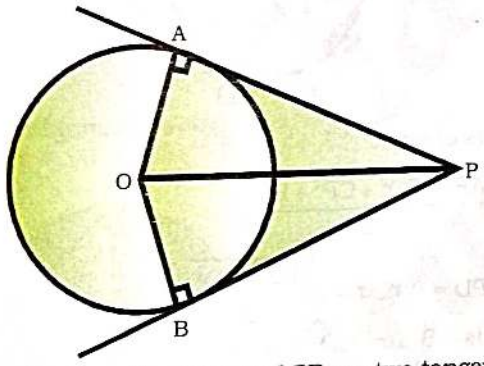
∠OAB = 90° – 64° = 26°

∠APB = 2∠OAB

∠APB = 2 × 26° = 52°

✍ The angle between two tangents drawn from an external point to a circle is supplementary to the angle subtended by the line-segments joining the points of contact at the centre.

किसी बाहरी बिंदु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण, केंद्र पर संपर्क बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंडों द्वारा अंतरित कोण का संपूरक होता है.



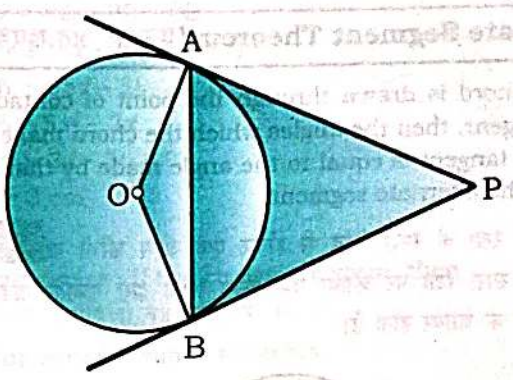
If in the above figure PA and PB are two tangents drawn from an external point P to a circle with centre O, then the angles ∠AOB and ∠APB are supplementary, ie ∠AOB + ∠APB = 180°. From the above, it can also be concluded that quadrilateral AOBP is cyclic.

यदि उपरोक्त आकृति में PA और PB बाहरी बिंदु P से केंद्र O वाले वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ हैं, तो कोण ∠AOB और ∠APB पूरक हैं, अर्थात ∠AOB + ∠APB = 180° उपरोक्त से, यह भी निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि चतुर्भुज AOBP चक्रीय है।

Ex. The tangents at two points A and B on the circle with the centre O intersects at P. If in quadrilateral PAOB, ∠AOB : ∠APB = 5 : 1, the measure of ∠APB is :

O केन्द्र वाले वृत्त के दो बिन्दुओं A तथा B पर स्पर्श रेखाएँ P पर प्रतिच्छेदित करती हैं। यदि चतुर्भुज PAOB में ∠AOB : ∠APB = 5 : 1 है, तो ∠APB की माप है :

HINTS:



Let ∠AOB = 5x and ∠APB = x

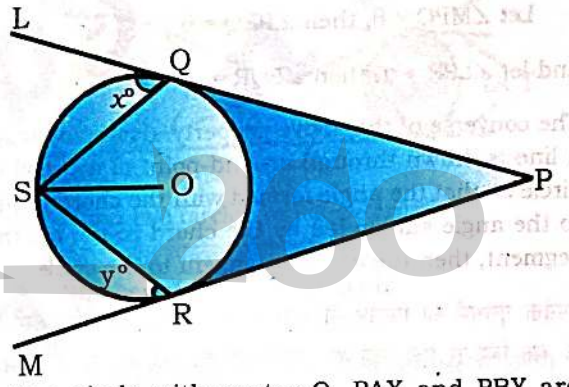
∠APB + ∠AOB = 180°

6x = 180°

x = 30°

∴ ∠APB = 30°

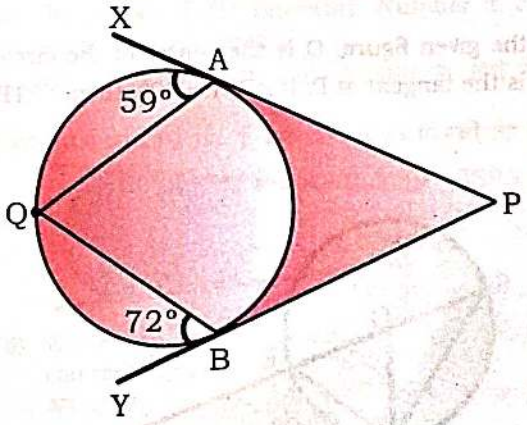
✍ If x° & y° is given. then ∠QSR = 180 – (x + y)



Ex. In a circle with centre O, PAX and PBY are the tangents to the circle at points A and B, from an external point P. Q is any point on the circle such that ∠QAX = 59° and ∠QBY = 72°. What is the measure of ∠AQB?

O केन्द्र वाले वृत्त में, PAX और PBY एक बाह्य बिन्दु P से बिन्दु A और B पर वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। वृत्त पर एक बिन्दु O इस प्रकार है कि ∠QAX = 59° और ∠QBY = 72° है। ∠AQB का माप ज्ञात करें।

HINTS:



∠AQB = 180° – (59° + 72°) = 49°

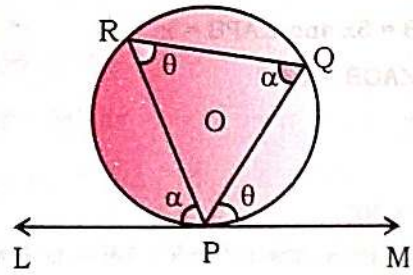
@Baka_260

Result-06

Alternate Segment Theorem/एकांतर अंत:खण्ड प्रमेय

- A chord is drawn through the point of contact of a tangent, then the angles which the chord makes with the tangent is equal to the angle made by that chord in the alternate segment.

  स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से होकर एक जीवा खींची गई है तो जीवा द्वारा स्पर्श रेखा पर बनाया गया कोण जीवा द्वारा एकांतर खंड में बने कोण के बराबर होता है।



Let $\angle MPQ = \theta$, then $\angle PRQ = \theta$

and let $\angle LPR = \alpha$, then $\angle PQR = \alpha$

The converse of the above property also holds true. If a line is drawn through an end-point of a chord of a circle so that the angle formed with the chord is equal to the angle subtended by the chord in the alternate segment, then the line is a tangent to the circle.

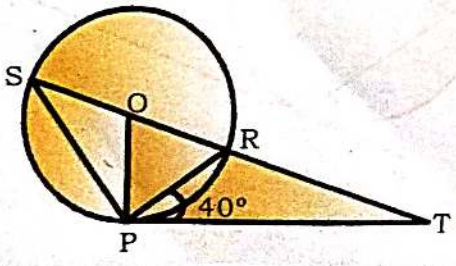
उपरोक्त गुणधर्म का विलोम भी सत्य है। यदि किसी वृत्त की किसी जीवा के अंत-बिंदु से एक रेखा इस प्रकार खींची जाती है कि जीवा से बना कोण एकांतर खण्ड में जीवा द्वारा अंतरित कोण के बराबर हो, तो वह रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

Note : Whenever you see the terms Chord and Tangent together in a question and you have to find angle then you must check the applicability of alternate segment theorem.

नोट : जब भी आप किसी प्रश्न में जीवा और स्पर्शरेखा को एक साथ देखते हैं और आपको कोण ज्ञात करना होता है तो आपको एकांतर अंत:खंड प्रमेय की प्रयोज्यता की जांच करनी चाहिए।

Ex. In the given figure, O is the center of the circle and PT is the tangent at P. If $\angle RPT = 40°$, then $\angle RTP$ is :

दिये गये चित्र में O वृत्त का केन्द्र है और PT बिन्दु P पर स्पर्श रेखा है। यदि $\angle RPT = 40°$ है, तो $\angle RTP$ है :

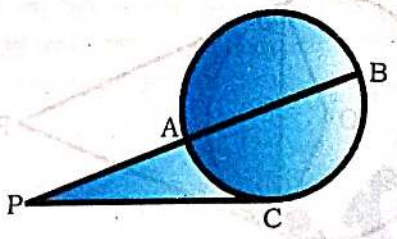


HINTS:
$\angle TPR = \angle PSR = 40°$
(Alternate segment theorem)
$\angle SPT = 90° + 40° = 130°$
$\angle RTP = 180° - (130° + 40°) = 10°$

Result-07

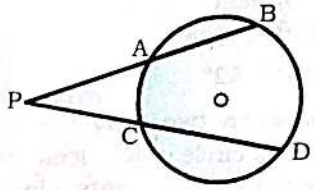
- Secant-tangent theorem

  $PA \times PB = PC^2$

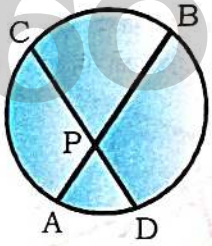


- Secant theorem

  $PA \times PB = PC \times PD$



- $PA \times PB = PC \times PD$



Radius of circle (वृत्त की त्रिज्या)

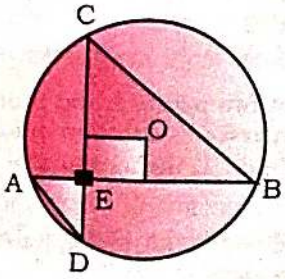
$$r = \sqrt{\frac{AP^2 + PD^2 + CP^2 + BP^2}{2}}$$

If $\angle APD = 90°$, $r = \sqrt{\frac{BC^2 + AD^2}{2}}$

Ex. Chords AB and CD of a circle intersect at E and are perpendicular to each other. Segments AE, EB and ED are of lengths 2cm., 6cm., and 3cm. respectively. Then the length of the diameter of the circle (in cm.) is

एक वृत्त की जीवाएँ AB और CD, E पर प्रतिच्छेद करती हैं और एक-दूसरे पर लंबवत हैं। खंड AE, EB और ED की लंबाई क्रमश: 2 सेमी, 6 सेमी, और 3 सेमी है। तब वृत्त के व्यास की लंबाई (से.मी. में) है।

HINTS:



$AE \times BE = CE \times ED$

$2 \times 6 = CE \times 3$

$CE = 4cm$

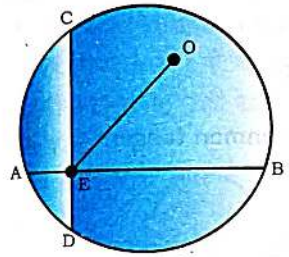
$AD = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$BC = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

$$r = \frac{\sqrt{BC^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{52+13}}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

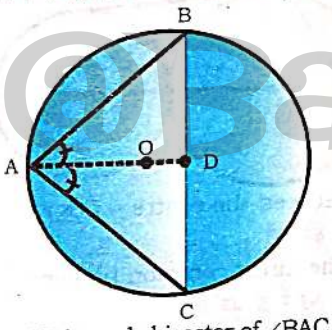
$$\text{Diameter} = 2r = 2 \times \frac{\sqrt{65}}{2} = \sqrt{65}$$

- If CD = 2b, AB = 2a, EO = c and O is any point inside the circle.

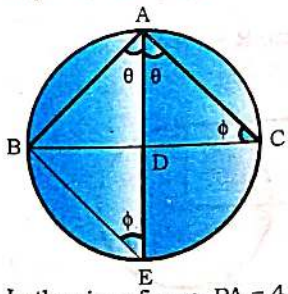


$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

- When two chords AB and AC of a circle are equal. Then the centre of the circle lies on the angle bisector of ∠BAC.
जब एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC बराबर हो, तो वृत्त का केंद्र ∠BAC के कोण समद्विभाजक पर स्थित होता है।

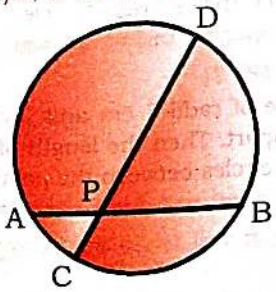


- In the figure, AE is angle bisector of ∠BAC then
आकृति में, AE, ∠BAC का कोण समद्विभाजक है तो



$AB.AC + DE.AE = AE^2$

Ex. In the given figure, PA = 4 cm, PB = 9 cm, PC = x cm and CD = $6x - 3$, then the value of x is :
दिये गये चित्र में PA = 4 सेमी, PB = 9 सेमी और PC = x सेमी और CD = $(6x - 3)$ है, तो x का मान है :



HINTS:

$AP \times PB = PC \times PD$

$4 \times 9 = x \times (6x - 3 - x)$

$36 = x(5x - 3)$

$36 = 5x^2 - 3x$

$5x^2 - 3x - 36 = 0$

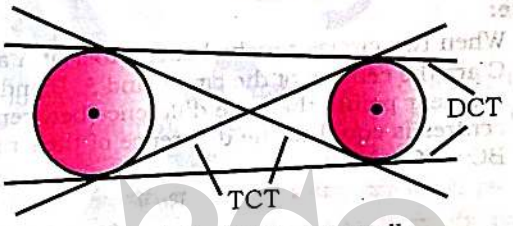
$x = 3$ cm

Result-08

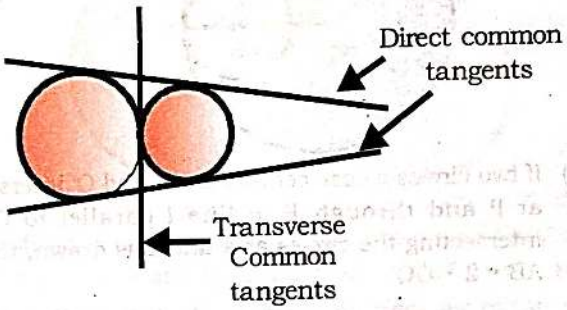
Two circles : If two circles are given, then
दो वृत्त : यदि दो वृत्त दिया गया हो, तो

- Number of common tangents
उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या

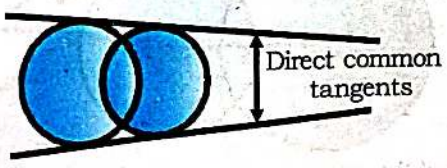
(a) When two circles are separated
जब दो वृत्त अलग-अलग हों
Number of common tangents
उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या
= 4 (2 Direct/अनुस्पर्श + 2 Transverse/अनुप्रस्थ)



(b) When two circles touch externally
जब दो वृत्त वाह्यत: स्पर्श करते हों
Number of common tangents
उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या
= 3 (2 Direct/अनुस्पर्श + 1 Transverse/अनुप्रस्थ)

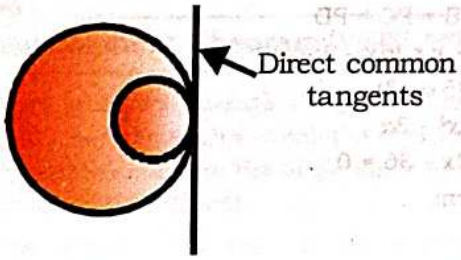


(c) When two circle intersect, Number of common tangents = 2(2 Directs)
जब दो वृत्त प्रतिच्छेद करते हों, तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 2 (2 Direct/अनुस्पर्श)

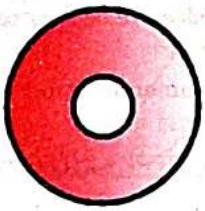


(d) When two circles touch internally, Number of common tangents = 1(1 Direct)
जब दो वृत्त अंत: स्पर्श करते हों, तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 1 (1 Direct/अनुस्पर्श)

@Baka_260

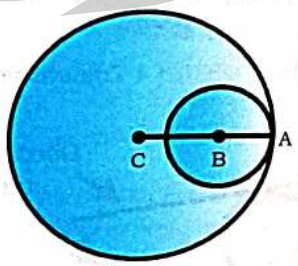


(e) When one circle is inside the other
Number of common tangents = 0
जब एक वृत्त दूसरे के अंदर हो, तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 0

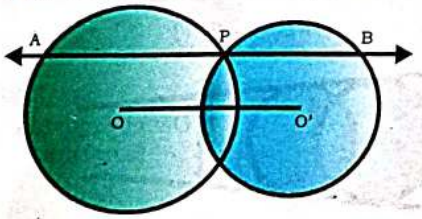


Note:

(a) When two circles touched each other at A and B, C are the centres of the circle; and A, B and C are collinear points then the difference between their centres is equal to the difference of their radii, ie BC = AC – AB
जब दो वृत्त एक दूसरे को A पर स्पर्श करते हैं, और B, C वृत्त के केंद्र होते हैं; और A, B और C सरेख बिंदु हैं तो उनके केंद्रों के बीच का अंतर उनकी त्रिज्या के अंतर के बराबर है, यानी BC = AC – AB

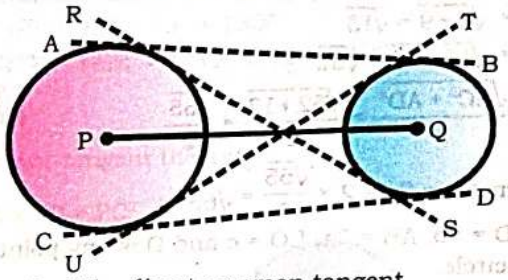


(b) If two circles whose centres are O and O' intersect at P and through P, a line l parallel to OO' intersecting the circles at A and B is drawn, then AB = 2 × OO'.
यदि दो वृत्त जिनके केंद्र O और O' हैं, P पर प्रतिच्छेद करते हैं और P से होकर OO' के समानांतर एक रेखा l खींची जाती है जो वृत्तों को A और B पर काटती है, तो AB = 2 × OO'



Length of the common tangent :
उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई

(a) When two circles of radii R and r are separated such that the distance between their centrers is d, then
जब R तथा r त्रिज्या के दो वृत्त उनके केन्द्रों के बीच की दूरी d द्वारा अलग किये गये हों, तो



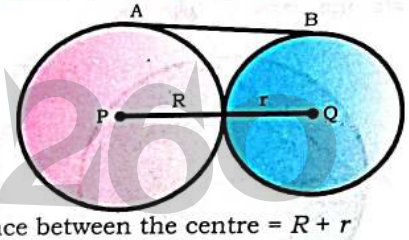
Length of the direct common tangent
अनुस्पर्श उभयनिष्ठ रेखा की लंबाई

AB and CD = $\sqrt{d^2-(R-r)^2}$

Length of the Transverse common tangent
अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ रेखा की लंबाई

RS and TU = $\sqrt{d^2-(R+r)^2}$

Case-01:
When two circles of radii R and r touch each other extrenally, then
जब R तथा r त्रिज्या के दो वृत्त एक-दूसरे को वाह्यतः स्पर्श करते हों, तो

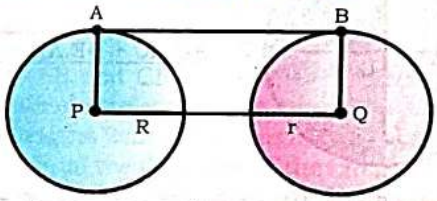


Distance between the centre = $R + r$
केन्द्रों के बीच की दूरी

Length of the direct common tangent
अनुस्पर्श उभयनिष्ठ रेखा की लंबाई

DCT = $\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$

Case-02:
If radius of circles are same R = r = R'
यदि वृत्तों की त्रिज्या समान हो तो R = r = R'



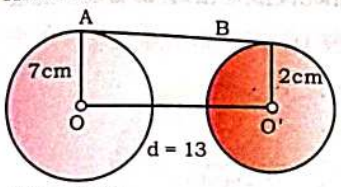
DCT = $\sqrt{(PQ)^2-(R'-R')}$

AB = $\sqrt{(PQ)^2}$

AB = PQ i.e. length of direct common tangent equal to distance between the centres of circle.
AB = PQ अर्थात् उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा की लंबाई वृत्त के केंद्रों के बीच की दूरी के बराबर होती है।

Ex. Two circles are of radii 7 cm and 2 cm their centers being 13 cm apart. Then the length of direct common tangent to the circles between the points of contact is :
दो वृत्तों की त्रिज्या 7 सेमी तथा 2 सेमी और उनके केन्द्र 13 सेमी की दूरी पर हैं। तो वृत्त पर स्पर्श बिन्दुओं के बीच अनुस्पर्श उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई है:

HINTS:



AB = DCT

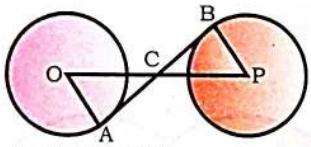
$DCT = \sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2} = \sqrt{169-(7-2)^2}$

$= \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$ cm

Ex. The distance between the centre of two equal circles each of radius 3 cm, is 10 cm, the length of the transverse common tangent is:

समान त्रिज्या 3 सेमी के दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 10 सेमी है, अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई है:

HINTS:



d = 10 cm r = 3 cm = R

$TCT = \sqrt{d^2-(R+r)^2}$

$= \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$ cm

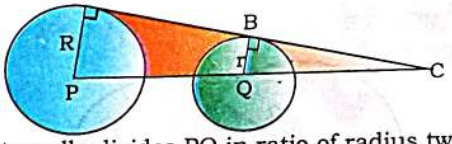
Ex. Two circles having radii 12 cm and 8 cm, respectively, touch each other externally. A common tangent is drawn to these circles which touch the circles at M and N, respectively. What is the length (in cm) of MN?

दो वृत्त, जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 12 cm और 8 cm हैं, एक दूसरे को बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं। इन वृत्तों पर एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा खींची जाती है, जो वृत्तों को क्रमशः M और N पर स्पर्श करती है। MN की लंबाई (cm में) क्या होगी?

HINTS: $MN = 2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{12\times8} = 8\sqrt{6}$

If DCTs and line joning of centre of circle are extended and meet each other.

यदि वृत्त के केंद्र को जोड़ने वाली रेखा तथा उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा को बढ़ाने पर एक दूसरे से मिलती है तो-



C externally divides PQ in ratio of radius two circles.

C बाह्य रूप से PQ को वृत्तों की त्रिज्या के अनुपात में विभाजित करता है।

$\frac{CP}{CQ} = \frac{R}{r}$ (by similerty)

$\frac{CP}{CP-CQ} = \frac{R}{R-r}$

$CP = \left(\frac{R}{R-r}\right)\times PQ$

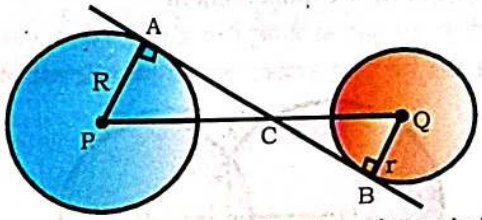
$\frac{CQ}{CP} = \frac{r}{R}$

$\frac{CP}{CP-CQ} = \frac{R}{R-r}$

$CQ = \left(\frac{r}{R-r}\right)\times PQ$

TCT and line joining of centre meet at a point.

केंद्र को जोड़ने वाली रेखा तथा अनुप्रस्थ स्पर्शरेखा किसी बिंदु पर मिलती है तो-



C divides PQ is the ratio of radius of two circles i.e.

C भुजा PQ को वृत्तों की त्रिज्या के अनुपात में विभाजित करता है।

$\frac{CP}{CQ} = \frac{R}{r}$ (by similerty)

$CP = \frac{R}{R+r}\times PQ$

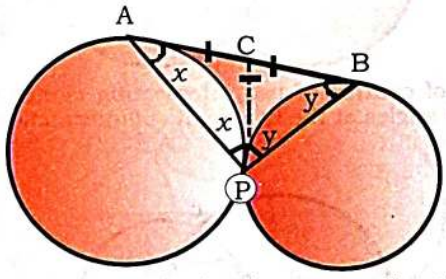
$CQ = \frac{r}{R+r}\times PQ$

Two circles externally touch each other at P. AB is direct common tangent (DCT) of the circles. Then, ∠APB is always right angle.

If ∠BAP = $x°$, then ∠ABP = $(90 - x)°$.

दो वृत्त बाह्य रूप से एक दूसरे को P पर स्पर्श करते हैं। AB वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा (DCT) है, तो ∠APB हमेशा समकोण होता है।

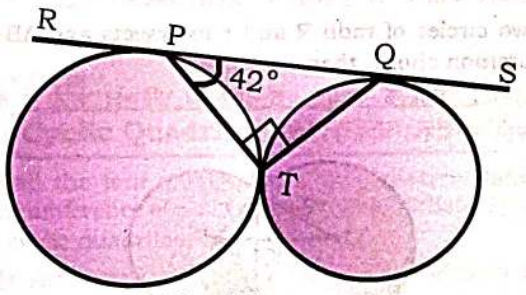
यदि ∠BAP = $x°$, तो ∠ABP = $(90 - x)°$.



Ex. Two circles touch each other externally at T. RS is a direct common tangent to the two circles touching the circles at P and Q. ∠TPQ = 42°, ∠PQT (in degrees) is:

दो वृत्त एक-दूसरे को T पर बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं। RS एक ऐसी प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है जो वृत्तों को बिंदुओं P और Q पर स्पर्श करती है। ∠TPQ = 42° है। ∠PQT का माप (डिग्री में) क्या है?

HINTS:

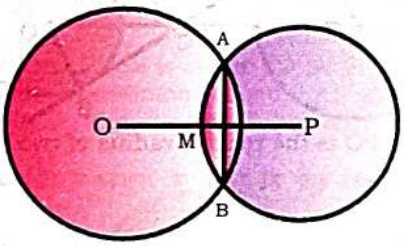


∠PQT = 90° – 42° = 48°

Common Chord/उभयनिष्ठ जीवा

- If two circles intersect each other at two points then the line joining their centres is the perpendicular bisector of their common chord.

  यदि दो वृत्त एक दूसरे को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तो उनके केंद्रों को मिलाने वाली रेखा उनकी उभयनिष्ठ जीवा का लंब समद्विभाजक होती है।

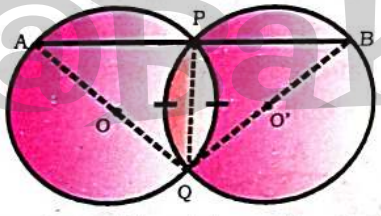


In the above figure, the line joining their centres, ie OP, is the perpendicular bisector of the common chord AB.

उपरोक्त आकृति में, उनके केंद्रों को मिलाने वाली रेखा, अर्थात OP, उभयनिष्ठ जीवा AB का लंब समद्विभाजक है।

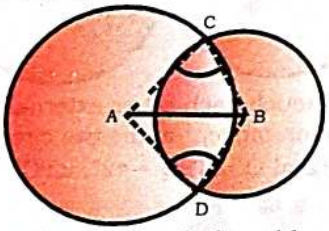
- If two equal circles intersect at P and Q and a straight line through P meets the circles at A and B, then QA = QB.

  यदि दो समान वृत्त बिंदु P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं और P से जाने वाली एक सीधी रेखा वृतों में A और B पर मिलती है, तो QA = QB।



- Line of centres of two intersecting circles subtends equal angles at the two points of intersection.

  दो प्रतिच्छेदी वृत्तों के केंद्रों की रेखा प्रतिच्छेदन के दो बिंदुओं पर समान कोण अंतरित करती है।

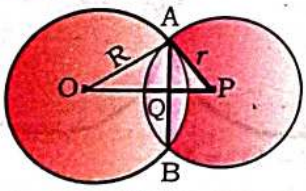


In the above figure, two circles with centres A and B intersect at C and D. Then ∠ACB = ∠ADB.

उपरोक्त आकृति में, A और B केंद्रों वाले दो वृत्त C और D पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो ∠ACB = ∠ADB होता है।

(a) Two circles of radii R and r intersects and AB is the common chord, then

R तथा r त्रिज्या के दो वृत्त एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करते हों तथा AB उनकी उभयनिष्ठ जीवा हो, तो



O and P are the centers of circle and AB is common chord

O तथा P वृत्त का केन्द्र और AB उभयनिष्ठ जीवा है

$$AQ = BQ = \frac{AB}{2}$$

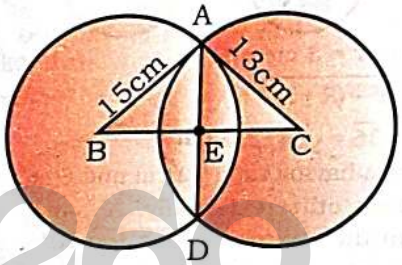
$$OP = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AB^2}{2}\right)} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{AB^2}{2}\right)}$$

$\angle AQO = \angle AQP = 90°$

Ex. The length of the common chord of two intersecting circles is 24 cm. If the diameters of the circles are 30 cm and 26 cm, the distance between the centres (in cm) is :

दो प्रतिच्छेदी वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा की लंबाई 24 सेमी है। यदि वृत्तों के व्यास 30 सेमी तथा 26 सेमी हो, तो उनके केन्द्रों के बीच की दूरी (सेमी में) है :

HINTS:



$$AE = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}$$

$$BE = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9\text{cm}$$

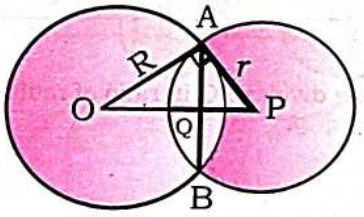
$$CE = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5\text{cm}$$

BC = 9 + 5 = 14 cm

(b) When/जब ∠OAP = 90° i.e.

The tangent of a circle at point A or B pass through the centre of the other circle.

बिंदु A अथवा B पर वृत्त की स्पर्श रेखा दूसरे वृत्त के केन्द्र से होकर जाएगी



$$OP = \sqrt{R^2 + r^2}$$

$$OQ = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

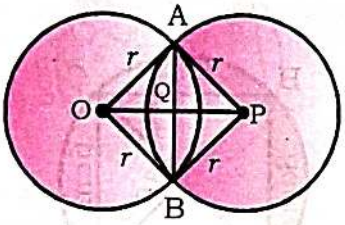
$$QP = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

$$AB = \frac{2Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

adda 247

(c) When radii of both the circles are equal, then $R = r$.

जब दोनों वृत्त की त्रिज्या समान हो, तो $R = r$



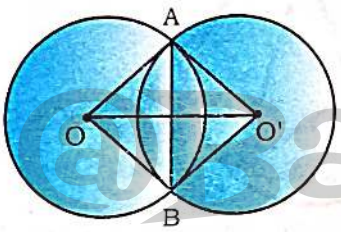
$OP = \sqrt{4R^2 - AB^2}$

$OQ = PQ = \frac{OP}{2}$

Ex. Two equal circles whose centres are O and O' intersect each other at the points A and B. OO' = 12 cm and AB = 16 cm, the radius of the circle is :

दो समान वृत्त जिनके केन्द्र O तथा O' हैं, बिन्दुओं A तथा B पर प्रतिच्छेद करते हैं। OO' = 12 सेमी और AB = 16 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

HINTS:



$OO' = \sqrt{4R^2 - AB^2}$

$12^2 = 4R^2 - 16^2$

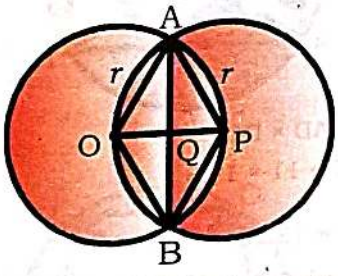
$144 + 256 = 4R^2$

$4R^2 = 400$

$R = 10$ cm

(d) When radii of both the circles are equal and the both the circles pass through the centres of the other circle, *i.e.* $R = r$

जब दो वृत्तों की त्रिज्या बराबर हो तथा दोनों वृत्त एक-दूसरे के केन्द्र से होकर गुजरते हों अर्थात् R = r



ΔOPA is an equilateral triangle.

ΔOPA एक समबाहु त्रिभुज है।

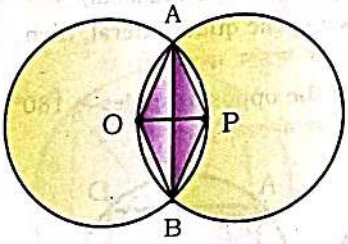
$OP = r, \quad AB = \sqrt{3}r$

∴ OBPA is a rhombus.

Ex. Two equal circles of radius 4 cm intersect each other such that each passes through the centre of the other. The length of the common chord is :

4 सेमी त्रिज्या के दो समान वृत्त एक-दूसरे के केन्द्र से गुजरते हुए एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं। उभयनिष्ठ जीवा की लंबाई है :

HINTS:



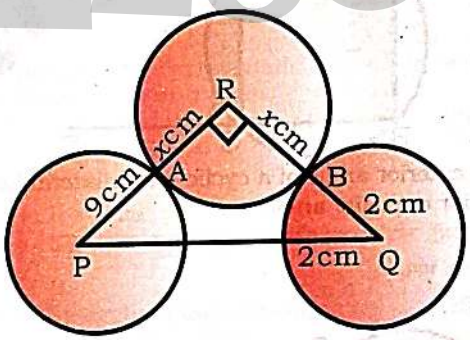
r = 4cm

$AB = \sqrt{3}\, r = 4\sqrt{3}$ cm

Ex. P and Q are centre of two circles with radii 9 cm and 2 cm respectively where PQ = 17 cm. R is the center of another circle of radius x cm, which touches each of the above two circles externally. If $\angle PRQ = 90°$, then the value of x is :

P तथा Q क्रमशः 9 सेमी तथा 2 सेमी त्रिज्या के दो वृत्तों के केन्द्र हैं जहाँ PQ = 17 सेमी है। R, x सेमी त्रिज्या के एक अन्य वृत्त का केन्द्र है जो उपर्युक्त दोनों वृत्तों को वाह्यतः स्पर्श करता है। यदि $\angle PRQ = 90°$ है, तो x का मान ज्ञात करें।

HINTS:



PQ = 17 cm

In ΔPRQ,

$PQ^2 = PR^2 + QR^2$

$17^2 = (9 + x)^2 + (x + 2)^2$

$289 = 81 + x^2 + 18x + x^2 + 4 + 8x$

$2x^2 + 22x - 204 = 0$

$x^2 + 11x - 102 = 0$

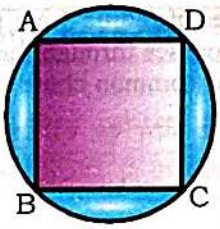
$x = 6$ cm

Cyclic Quadrilateral/चक्रीय चतुर्भुज

If all the four vertices of a quadrilateral lie on the circumference of a circle, then the quadrilateral is called a cyclic quadrilateral.

यदि किसी चतुर्भुज की चारों शीर्ष किसी वृत्त की परिधि पर स्थित हों तो चतुर्भुज, चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है।

adda247 260

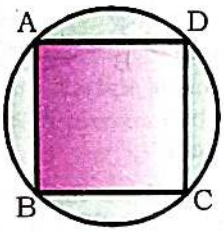


Properties of a Cyclic Quadrilateral/ चक्रीय चतुर्भुज की विशेषताएँ

If ABCD is a cyclic quadrilateral, then

यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज हो, तो

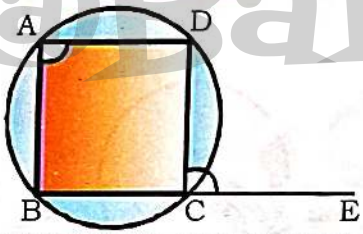
- The sum of the opposite angles is 180°.
  विपरीत कोणों का योगफल 180° होता है।



$\angle A + \angle C = 180°$

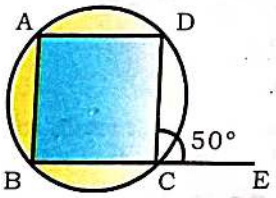
$\angle B + \angle D = 180°$

- Exterior angle at a vertex = opposite interior angle. If BC is extended to E, then $\angle A = \angle DCE$.
  किसी शीर्ष का वाह्य कोण = विपरीत अंत: कोण। यदि BC को E तक बढ़ाया जाए तो $\angle A = \angle DCE$



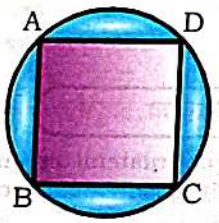
Ex. If an exterior angle of a cyclic quadrilateral be 50°, the interior opposite angle is :
यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज का एक वाह्य कोण 50° है, तब विपरीत कोण का मान है:

HINTS:



$\angle DCE = \angle A = 50°$

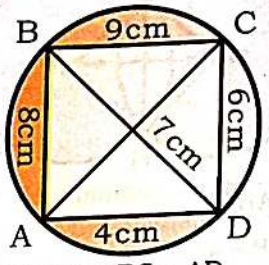
- Ptolemy's Theorem : If ABCD is a cyclic quadrilateral, then
  टॉलमी का प्रमेय : यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, तो



$$AB \times DC + BC \times AD = AC \times BD$$

Ex. In a cyclic quadrilateral ABCD, AB = 8 cm, BC = 9 cm, CD = 6 cm and DA = 4 cm. If the value of BD is 7 cm, the value fo AC is :
एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD में AB = 8 सेमी, BC = 9 सेमी, CD = 6 सेमी और DA = 4 सेमी है। यदि BD का मान 7 सेमी है तो AC का मान है ::

HINTS:



$AC \times BD = AB \times DC + BC \times AD$

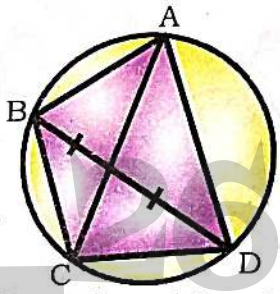
$AC \times 7 = 8 \times 6 + 9 \times 4$

$7AC = 48 + 36$

$7AC = 84$

$AC = 12cm$

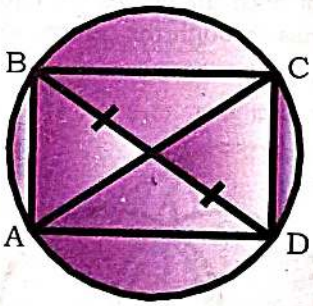
- If one diagonal of cyclic quadrilateral bisects other diagonal then
  यदि चक्रीय चतुर्भुज का एक विकर्ण दूसरे विकर्ण को समद्विभाजित करे तो



$$AB \times BC = CD \times AD$$

Ex. In a cyclic quadrilateral ABCD, diagonal AC bisects the diagonal BD. If AB = 16.5 cm, CD = 19.8 cm and AD = 11 cm. Find BC.
किसी चक्रीय चतुर्भुज ABCD में विकर्ण AC दूसरे विकर्ण BD को समद्विभाजित करता है। यदि AB = 16.5 सेमी, CD = 19.8 सेमी और AD = 11 सेमी है। BC का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:



$AB \times BC = AD \times DC$

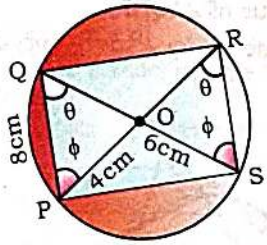
$16.5 \times BC = 11 \times 19.8$

$$BC = \frac{198}{15} = 13.2cm$$

Ex. In a cyclic quadrilateral PQRS, diagonal QS bisects PR at point O. If PQ = 8 cm, PO = 4 cm and OS = 6 cm, then what is the value of RS?
किसी चक्रीय चतुर्भुज PQRS में विकर्ण QS, PR को बिन्दु O पर समद्विभाजित करता है। यदि PQ = 8 सेमी, PO = 4 सेमी और OS = 6 सेमी है, तो RS का मान ज्ञात कीजिए।

@Baka_Bot

HINTS:



OP = OR = 4cm

ΔQOP ~ ΔROS (By AA)

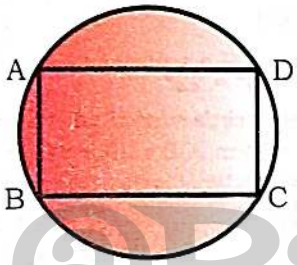
$\frac{OP}{OS} = \frac{QP}{RS}$

$\frac{4}{6} = \frac{8}{RS}$

RS = 12cm

The cyclic quadraliteral ABCD is a parallelogram too.

चक्रीय चतुर्भुज ABCD समांतर चतुर्भुज भी होता है।



ABCD will be rectangle i.e.

ABCD एक आयत होगा।

∠A = ∠B = ∠C = ∠D = 90°

AB = CD and BC = AD

Ex. If ABCD is a cyclic quadrilateral in which ∠A = $4x^\circ$, ∠B = $7x^\circ$, ∠C = $5y^\circ$, ∠D = y°, then $x : y$ is:

ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें ∠A = $4x^\circ$, ∠B = $7x^\circ$, ∠C = $5y^\circ$, ∠D = y° है, तो $x : y$ का मान है :

HINTS:

∠A + ∠C = ∠B + ∠D

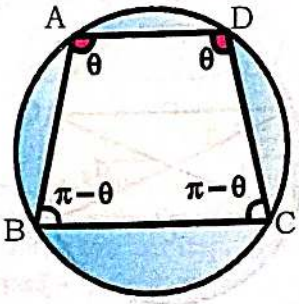
$4x + 5y = 7x + y$

$3x = 4y$

$\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

If the cyclic quadrilateral ABCD is a trapezium, then ABCD will be an isosceles trapezium

यदि चक्रीय चतुर्भुज ABCD एक समलंब चतुर्भुज हो, तो ABCD एक सम समलंब चतुर्भुज होगा।



If AD||BC, then

(a) AB = CD

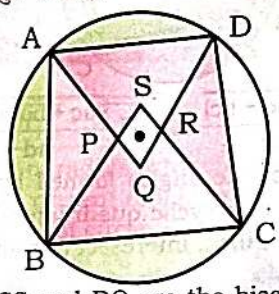
(b) AC = BD (Diagonals are equal)

(c) If AD||BC and ∠BAD = θ, then

∠BAD = ∠ADC = θ and ∠ABC = ∠DCB = π − θ

The quadrilateral formed by the bisectors of all the four angles of a cyclic quadrilateral is also a cyclic quadrilateral.

किसी चक्रीय चतुर्भुज की चारों कोणों के समद्विभाजकों द्वारा बना चतुर्भुज भी चक्रीय चतुर्भुज होता है।



If AQ, BS, CS and DQ are the bisector of the angles ∠A, ∠B, ∠C and ∠D respectively, then the quadrilateral PQRS is a cyclic.

यदि AQ, BS, CS तथा DQ क्रमशः कोणों ∠A, ∠B, ∠C और ∠D के कोण समद्विभाजक हों, तो चतुर्भुज PQRS चक्रीय होगा।

If the sides of a cyclic quadrilateral is *a, b, c* and *d*, then

यदि चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ *a, b, c* तथा *d* हों तो,

Area of the cyclic quadrila teral

चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

where/जहाँ, $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

Ex. Find the area of a cyclic quadrilateral whose sides are 5 cm, 2 cm, 5 cm and 8 cm.

उस चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 5 सेमी, 2 सेमी, 5 सेमी और 8 सेमी हो।

HINTS:

a = 5cm b = 2cm c = 5cm d = 8cm

$s = \frac{5+2+5+8}{2} = \frac{20}{2} = 10\,cm$

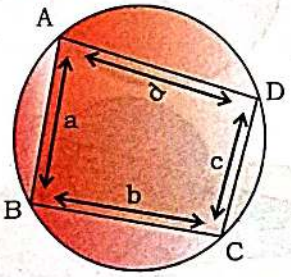
Area of the cyclic quadrilateral

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sqrt{10\times5\times8\times5\times2}$

$= 5 \times 2 \times 2\sqrt{10} = 20\sqrt{10}cm^2$

If a, b, c and d are the successive sides of a cyclic quadrilateral, and s is the semi-perimeter, then the radius is-

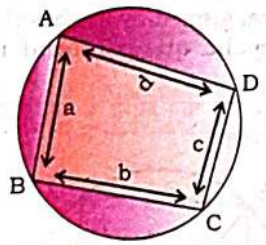
यदि a, b, c और d एक चक्रीय चतुर्भुज की क्रमिक भुजाएँ हैं, और s अर्ध-परिमाप है, तो त्रिज्या-



$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$

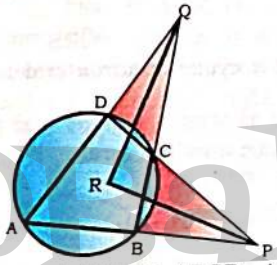
@Baka_260

- If a, b, c and d are the sides of a cyclic quadrilateral and p & q are the diagonals, then
  यदि a, b, c और d एक चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ हैं और p और q विकर्ण हैं, तो



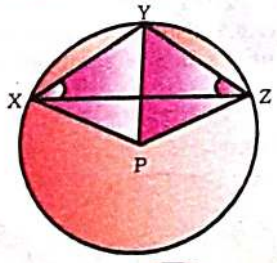
$$p = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \text{ \& } q = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

- The bisectors of the angles formed by producing the opposite sides of a cyclic quadrilateral (provided that they are not parallel), interesect at right angle.
  किसी चक्रीय चतुर्भुज की विपरीत भुजाओं (बशर्ते कि वे समानांतर न हों) को बढ़ाने से बनने वाले कोणों के समद्विभाजक, समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

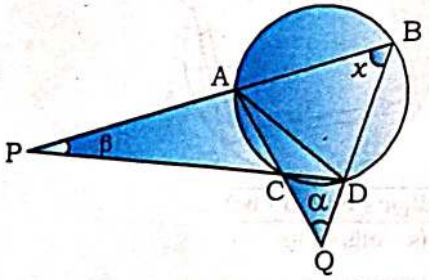


In a cyclic quadrilateral ABCD, AB and DC when produced meet at P and AD and BC when produced meet at Q. Bisectors of ∠P and ∠Q meet at a point R. Then ∠PRQ = 90°.
एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD में, AB तथा DC को बढ़ाने पर P और AD तथा BC को बढ़ाने पर Q पर मिलते हैं। ∠P और ∠Q के समद्विभाजक बिंदु R पर मिलते हैं। तब ∠PRQ = 90°

- In the given figure, if P is the centre of the circle, then ∠XPZ = 2 (∠XZY + ∠YXZ)
  दी गई आकृति में, यदि P वृत्त का केंद्र है, तो
  ∠XPZ = 2 (∠XZY + ∠YXZ)

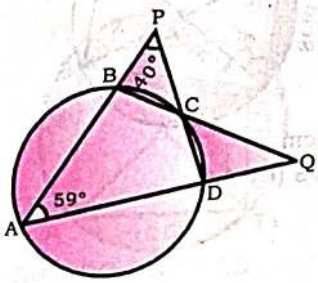


-



$$x = 90 - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Ex. In the given figure, if ∠PAQ = 59°, ∠APD = 40° then what is the value of ∠AQB?
दी गई आकृति में, यदि ∠PAQ = 59°, ∠APD = 40° है, तो ∠AQB क्या है?



HINTS:

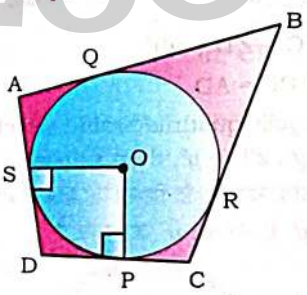
$$\angle PAD = 90 - \left(\frac{\angle APD + \angle BQA}{2}\right)$$

$$59° = 90° - \left(\frac{40° + \angle AQB}{2}\right)$$

$$31 = \frac{40° + \angle AQB}{2}$$

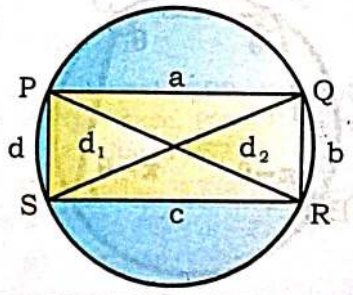
$$\angle AQB = 62° - 40° = 22°$$

Ex. In the figure given, a circle is inscribed in a quadrilateral ABCD. Given that, BC = 38cm., QB = 27cm., DC = 25cm. and AD is perpendicular to DC. What is the radius of the circle.
दी गई आकृति में, एक चतुर्भुज ABCD में एक वृत्त अंकित है। दिया गया है, BC = 38cm., QB = 27cm., DC = 25cm और AD, DC के लंबवत है। वृत्त की त्रिज्या क्या है।



HINTS:
BC = 38cm, QB = 27cm
DC = 25 cm
BQ = BR = 27cm (tangents from an exterm point are equal)
CR = 38 – 27 = 11 cm
CR = CP = 11 cm
DP = 25 – 11 = 14 cm
DPOS is a square
DP = OS = r = 14 cm

- In a cyclic quadrilateral/एक चक्रीय चतुर्भुज में-



@Jeka_260

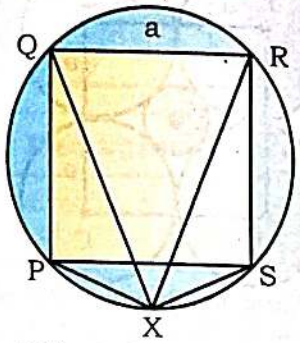
$PR \times QS = (PQ \times SR) + (PS \times QR)$

'OR'

$d_1 \times d_2 = (a \times c) + (b \times d)$

- ABCD is a square (cyclic) of side 'a' and X is point on the circle, then

ABCD भुजा 'a' का एक वर्ग (चक्रीय) है तथा X वृत्त पर बिंदु है, तो



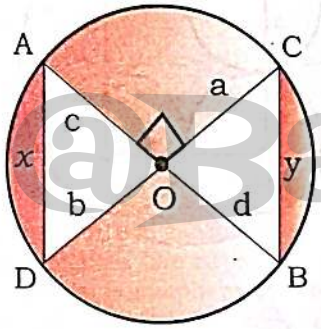
$PX^2 + QX^2 + RX^2 + SX^2 = 4a^2$

- If $CD \perp AB$

$AD = x$, $CB = y$

$OC = a$, $OD = b$

$OA = c$, $OB = d$ and radius $= R$



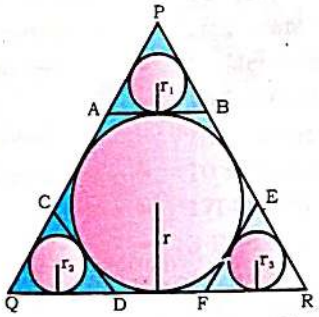
then, $x^2 + y^2 = 4R^2$

'OR'

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$

- PQR is a triangle with inradius r. AB, CD & EF are 3 tangents to the circle of PQR the inradii of PAB, QCD, REF are r_1, r_2 & r_3, then-

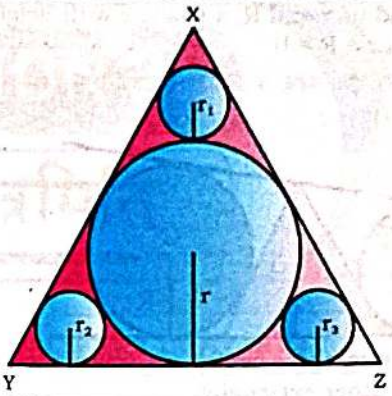
PQR अंत:त्रिज्या r वाला एक त्रिभुज है। AB, CD और EF, PQR के वृत्त की 3 स्पर्शरेखाएँ हैं, PAB, QCD, REF की अंत:त्रिज्या r_1, r_2, r_3 हैं, तो-



$$r = r_1 + r_2 + r_3$$

- PQR is a triangle with inradius r. The radius of circle drawn as shown in the figure are r_1, r_2, r_3. Then-

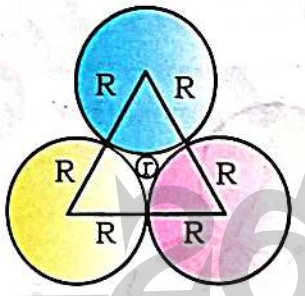
PQR अंत: त्रिज्या r वाला एक त्रिभुज है। चित्र में दर्शाए अनुसार खींचे गए वृत्त की त्रिज्याएँ r_1, r_2, r_3 हैं, तो-



$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}$$

- 3 circles are of radius R touching each other. A small circle is also present touching the circles. The radius (r) of the smallest circle.

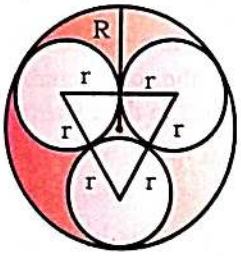
3 वृत्त R त्रिज्या के हैं जो एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। वृत्तों को छूता हुआ एक छोटा वृत्त भी मौजूद है। सबसे छोटे वृत्त की त्रिज्या (r)



$$(r) = R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)$$

- 3 circles are of radius r touching each other. A large circle is also present touching the circles. The radius of the largest circle

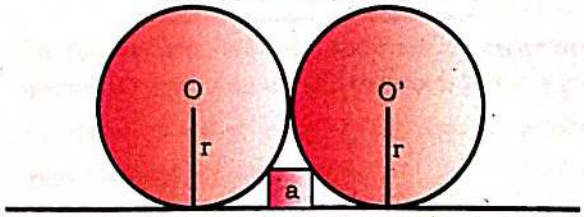
3 वृत्त r त्रिज्या के हैं जो एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। वृत्तों को छूता हुआ एक बड़ा वृत्त भी मौजूद है। सबसे बड़े वृत्त की त्रिज्या



$$(R) = r\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)$$

- Two circles are of equal radius (r) and touching each other externally, and a square having side x is also touching the circles. then side of square $(x) = \frac{2}{5}r$

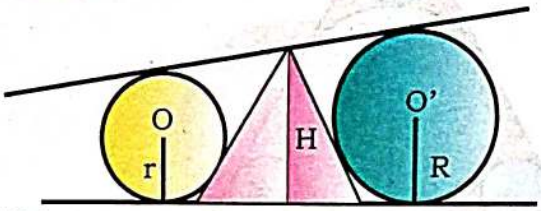
दो वृत्त समान त्रिज्या (r) के हैं और एक दूसरे को बाह्य रूप से स्पर्श कर रहे हैं, और x भुजा वाला एक वर्ग भी वृत्तों को स्पर्श कर रहा है। फिर वर्ग की भुजा $(x) = \frac{2}{5}r$



@Baka_260

- Two circles of radius r and R, a triangle with height H in between, then r + R = H

  त्रिज्या r और R के दो वृत्त, बीच में ऊँचाई H वाला एक त्रिभुज, तो r + R = H

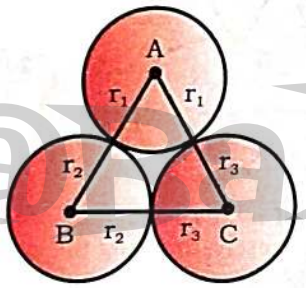


- With A, B, C centres, three circles are drawn such that they touch each other externally.

  The sides of triangle ΔABC are x cm, y cm, z cm then sum of the radius of the circles

$$= r_1 + r_2 + r_3 = \frac{x+y+z}{2}$$

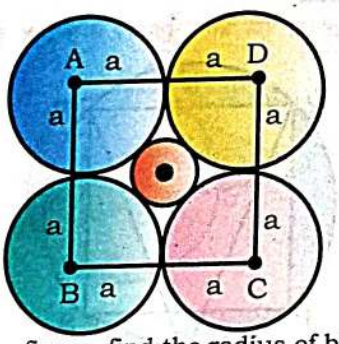
A, B, C केंद्रों के साथ, तीन वृत्त इस प्रकार खींचे जाते हैं कि वे एक दूसरे को बाहरी रूप से स्पर्श करते हैं। त्रिभुज ΔABC की भुजाएँ x सेमी, y सेमी, z सेमी हैं तो वृत्तों की त्रिज्या का योग $= r_1 + r_2 + r_3 = \frac{x+y+z}{2}$



- In the given figure, radius of smaller circle is

  दिए गए चित्र में, छोटे वृत्त की त्रिज्या है

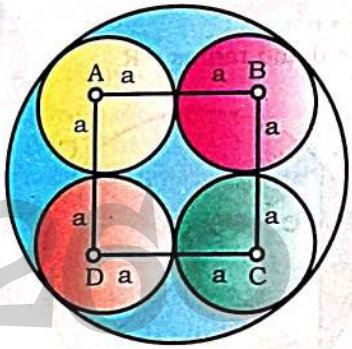
$$= \frac{1}{2} \times [2a(\sqrt{2}-1)] = (\sqrt{2}-1)a$$



- In the given figure, find the radius of bigger circle is

  दिए गए चित्र में, बड़े वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए

$$= \sqrt{2}a + a = (\sqrt{2}+1)a$$



★★★★★

@Rka_26

MENSURATION 2D

द्विविमीय क्षेत्रमिति

03

What is Mensuration?/क्षेत्रमिति क्या है?

The literal meaning of the word Mensuration is 'to measure'. It is a branch of mathematics that deals with the measurement of perimeter, area and volume of the different geometrical figures.

क्षेत्रमिति शब्द का शाब्दिक अर्थ है 'मापना'। यह गणित की एक शाखा है जो विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों की परिधि, क्षेत्रफल और आयतन के माप से संबंधित है।

The mensuration is divided in the following two parts :

क्षेत्रमिति को निम्नलिखित दो भागों में विभाजित किया गया है :

(i) Two-dimensional mensuration/द्वि-विमीय क्षेत्रमिति

(ii) Three-dimensional mensuration/त्रि-विमीय क्षेत्रमिति

In two-dimensional mensuration we will study the two-dimensional figures (plane figures), like triangle, quadrilateral, polygon, circle etc.

द्विविमीय क्षेत्रमिति में हम द्विविमीय आकृतियों (समतल आकृति) जैसे-त्रिभुज, चतुर्भुज, बहुभुज, वृत्त आदि का अध्ययन करते हैं।

In three-dimensional mensuration we will study the three-dimensional figures like cube, cuboid, cylinder, cone, frustum, sphere, hemisphere, Prism, Pyramid etc.

त्रिविमीय क्षेत्रमिति में हम त्रिविमीय आकृतियों जैसे- घन, घनाभ, बेलन, शंकु, छिन्नक, गोला, अर्द्धगोला, प्रिज्म, पिरामिड आदि का अध्ययन करते हैं।

In mensuration, We will use Pythagorean triplets and divisibility tricks.

क्षेत्रमिति में हम पाइथागोरियन ट्रिपलेट और विभाज्यता के नियमों का प्रयोग करेंगे।

Important Unit Conversion/महत्वपूर्ण इकाई रूपांतरण

1 Kilometer (km)	=	10 Hectometer
1 Hectometer	=	10 Decametre
1 Decametre	=	10 Metre (m)
1 metre	=	10 Decimetre (dm)
1 Decimetre	=	10 centimetre (cm)
1 centimetre	=	10 milimetre (mm)
1 Mile	=	1760 Yard
1 Yard	=	3 Feet
1 Feet	=	12 Inch
1 Inch	=	2.54 Centimetre (cm)
1 Feet	=	0.3048 Metre
5 Mile	=	8 Kilometre (km)
1 Hectare	=	10000 metre^2 (m^2)
1 Cubic metre (m^3)	=	1000 Litre
1 Litre	=	1000 cubic cm (cm^3)

What is Area?/क्षेत्रफल क्या है?

The area can be defined as the space occupied by a flat shape or the surface of an object.

The area of a figure is the number of unit squares that cover the surface of a closed figure. Area is measured in square units such as square centimeters, square meter, etc.

क्षेत्रफल को किसी एक चपटे आकार या किसी वस्तु की सतह द्वारा घेरे गये स्थान के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

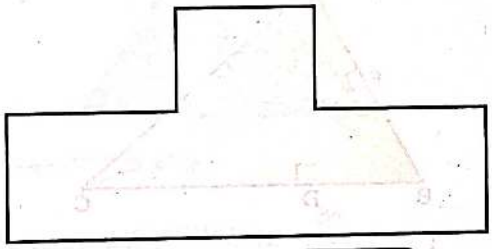
किसी आकृति का क्षेत्रफल उसकी बंद सतह द्वारा घेरे गए वर्ग मात्रकों की संख्या है। क्षेत्रफल को वर्ग मात्रकों में मापा जाता है जैसे की वर्ग सेंटीमीटर, वर्गमीटर आदि।



Perimeter / परिमाप

Perimeter can be defined as the path or the boundary that surrounds a figure . It can also be defined as the length of the outline of a shape.

परिमाप को किसी आकृति को घेरने वाले पथ या परिसीमा के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। इसे किसी आकृति की परिसीमा की लंबाई के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है।

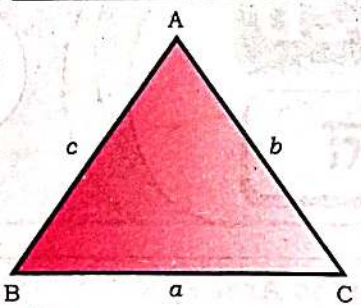


Mensuration 2D

In this section, We will study the measurements of perimeter and area of figures which lie on a plane.

इस भाग में हम एक ही समतल में स्थित आकृतियों के परिमाप एवं क्षेत्रफल की माप का अध्ययन करेंगे।

Triangle/त्रिभुज



(a) Perimeter/परिमाप = $a + b + c$

(b) Semi-perimeter (s)/अर्द्ध-परिमाप = $\frac{a+b+c}{2}$

It is denoted by s.

(c) Area : The area of a triangle is denoted by the symbol Δ and can be calculated by the following five methods:

क्षेत्रफल : त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है और निम्नलिखित पाँच विधियों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

(i) Area/क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Ex. The area (in m^2) of a triangular field, whose sides are 85 m, 85 m, and 154 m, is :

एक त्रिभुजाकार मैदान, जिसकी भुजाएँ 85 मीटर, 85 मीटर और 154 मीटर हैं, का क्षेत्रफल (मी² में) है:

HINTS:

Area of triangle = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

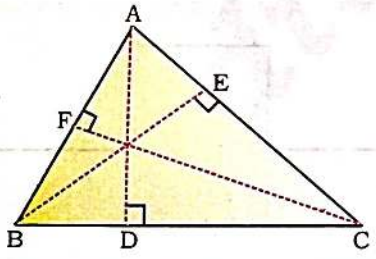
Where, $s = \frac{a+b+c}{2}$ and a, b and c are the sides of the triangle.

$s = \frac{85+85+154}{2} = \frac{324}{2} = 162$

Area of triangle = $\sqrt{162 \times 77 \times 77 \times 8}$

$= 4 \times 9 \times 77 = 2772\ m^2$

(ii)



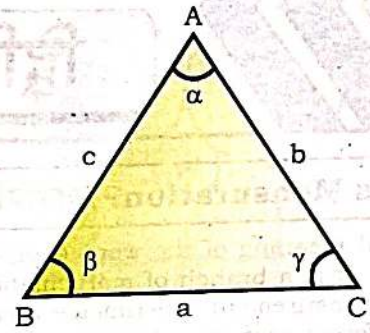
Area = $\frac{1}{2}$ × side × corresponding height

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × भुजा × संगत ऊँचाई

$\Delta = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times AC \times BE = \frac{1}{2} \times AB \times CF$

(iii) Area of triangle when two of its side and angle between them is given –

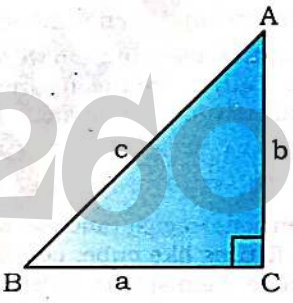
त्रिभुज का क्षेत्रफल जब उसकी दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया गया हो –



$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times bc\sin\alpha = \frac{1}{2} \times ca\sin\beta = \frac{1}{2} \times ab\sin\gamma$$

A triangle with two given sides has a maximum area if these two sides are placed at right angles to each other.

दो दी गई भुजाओं वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम होता है यदि ये दोनों भुजाएँ एक दूसरे से समकोण पर स्थित हों।



If a, b are two sides of a triangle

Max. Area = $\frac{1}{2}ab$

(iv) If perimeter and in-radius are given then the area of triangle.

यदि त्रिभुज का परिमाप और अंत:त्रिज्या दी गई हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल

= In-radius (अंत:त्रिज्या) × Semi-perimeter (अर्द्धपरिमाप)

Ex. The area of triangle is 15 sq cm and the radius of its incircle is 3 cm. Its perimeter is equal to:

त्रिभुज का क्षेत्रफल 15 वर्ग सेमी है और इसके अंत:वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है। इसकी परिधि कितनी है:

HINTS:

$15 = 3 \times s$

$s = 5cm$

$\therefore$ perimeter = $5 \times 2 = 10$ cm

(v) If three sides and Circumradius are given then the area of triangle.

यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ तथा परित्रिज्या दी गई हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{abc}{4 \times \text{Circum-radius (परित्रिज्या)}}$

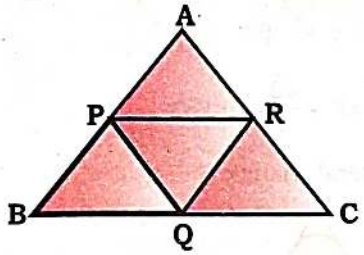
@Baka_260

✍ The perimeter and the area of a triangle made by joining the mid-points of the sides will be half of original perimeter and one-fourth of the original area respectively.

भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने से बने त्रिभुज का परिमाप और क्षेत्रफल क्रमशः मूल परिमाप का आधार और मूल क्षेत्रफल का एक-चौथाई होगा।

If P, Q and R be the mid-point of AB, BC and AC, respectively, then

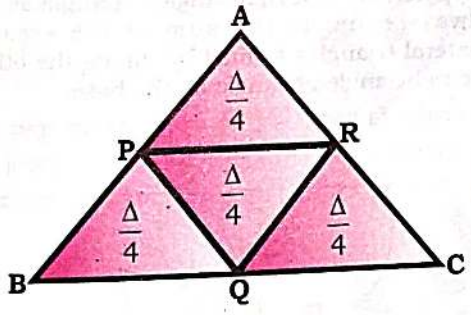
यदि P, Q और R क्रमशः भुजाओं AB, BC और AC के मध्य बिन्दु हो, तो



(a) The perimeter of $\Delta PQR = \frac{1}{2} \times$ Perimeter of ΔABC

ΔPQR का परिमाप $= \frac{1}{2} \times \Delta ABC$ का परिमाप

(b) If the area of ΔABC is Δ, then



(c) Let a triangle PQR is formed by joining the mid-points of the sides of ΔABC, then again a ΔXYZ is formed by joining the mid-points of the sides of ΔPQR, if this process continue till infinite, then

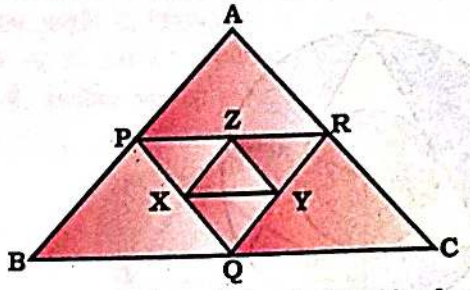
मान लीजिए कि ΔABC की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने से एक त्रिभुज PQR बनता है, फिर PQR की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर एक ΔXYZ बनता है, यदि यह प्रक्रिया अनंत तक चलती रहे, तो

(i) The area of all triangles/सभी त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$= \frac{4}{3} \times$ Area of ΔABC

(ii) The perimeter of all triangles/सभी त्रिभुजों का परिमाप

$= 2 \times$ Perimeter of ΔABC



Ex. Consider an equilateral triangle of a side of unit length. A new equilateral triangle is formed by joining the mid-points of one, then a third equilateral triangle is formed by joining the mid-point of seconds. The process is continued. The perimeter of all triangle, thus formed is:

इकाई लंबाई की भुजा के एक समबाहु त्रिभुज में मध्य-बिंदुओं को मिलाकर एक नया समबाहु त्रिभुज बनता है, फिर दूसरे के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर एक तीसरा समबाहु त्रिभुज बनता है। प्रक्रिया जारी रहती है। इस प्रकार बने सभी त्रिभुजों का परिमाप है:

HINTS:

Sum of all perimeter = 2 × perimeter of original triangle

$= 2 \times 3 \times 1 = 6$ unit

✍ If three medians of a triangle – m_a, m_b, m_c are given

यदि किसी त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ – m_a, m_b, m_c दी गई हैं

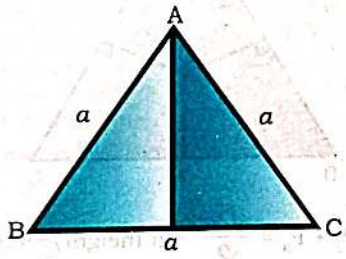
$$\text{Area } \Delta = \frac{4}{3}\sqrt{S_m(S_m - m_a)(S_m - m_b)(S_m - m_c)}$$

Where, $S_m = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$

If $m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$, then

$$\text{Area } \Delta = \frac{2}{3} m_b m_c$$

Equilateral Triangle/समबाहु त्रिभुज



(i) Perimeter/परिमाप = 3a

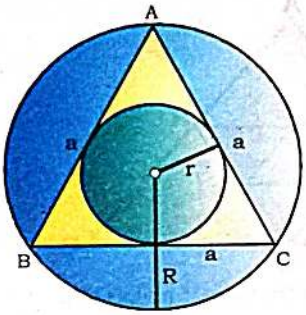
(ii) Semi-perimeter/अर्द्धपरिमाप (s) = $\frac{3a}{2}$

(iii) Height/ऊंचाई (h) = $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

(iv) Area/क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$

@Baka_260

(v)



(a) In-radius/अन्त: त्रिज्या (r) = $\frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{h}{3}$

(b) Area of the incircle/अन्त: वृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{\pi a^2}{12}$

(c) Circum-radius/परित्रिज्या (R) = $\frac{a}{\sqrt{3}}$

(d) Area of circum-circle/परिवृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{\pi a^2}{3}$

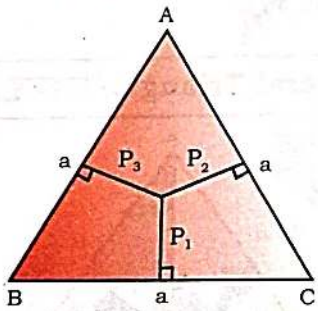
(e) $\frac{\text{Radius of in-circle (r)}}{\text{Radius of circum-circle (R)}} = \frac{1}{2}$

(f) $\frac{\text{Area of in-circle}}{\text{Area of circum-circle}} = \frac{1}{4}$

(g) The ratio of r : a : R = $1 : 2\sqrt{3} : 2$

(vi) If P_1, P_2 and P_3 are the lengths of the perpendiculars drawn from a point inside an equilateral triangle to its sides then,

यदि किसी समबाहु त्रिभुज के अंदर किसी बिन्दु से इसकी भुजाओं पर डाले गए लंबों की लंबाई P_1, P_2 और P_3 हो, तो



(a) $P_1 + P_2 + P_3 = \frac{\sqrt{3}a}{2} = h$ (height/ऊंचाई)

$a = \frac{2}{\sqrt{3}}(P_1 + P_2 + P_3)$

(b) Area of the equilateral triangle/समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{(P_1 + P_2 + P_3)^2}{\sqrt{3}}$

Ex. 'p' is point inside an equilateral triangle and if lengths of perpendiculars drawn on each side of triangle from 'p' are 2 cm, 3 cm and 4 cm. Find area of equilateral triangle.

'p' एक समबाहु त्रिभुज के अंदर का बिंदु है और यदि 'p' से त्रिभुज की प्रत्येक भुजा पर खींचे गए लंबों की लंबाई 2 सेमी, 3 सेमी और 4 सेमी है। समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

HINTS:

Area of equilateral triangle = $\frac{(p_1 + p_2 + p_3)^2}{\sqrt{3}}$

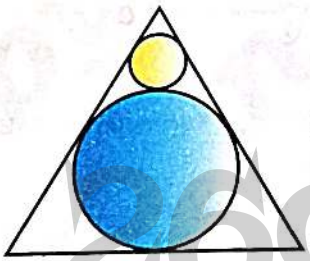
$= \frac{(9)^2}{\sqrt{3}} = 27\sqrt{3}$ cm²

If the length of each side of an equilateral triangle is increased by x then area is found to be increased by y.

यदि एक समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई x से बढ़ा दी जाए, तो क्षेत्रफल में y की वृद्धि पाई जाती है।

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}(a + x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + y$

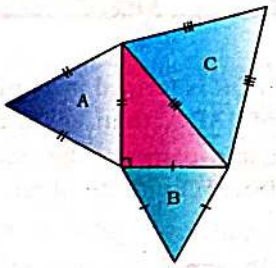
In equilateral triangle/समबाहु त्रिभुज में



$\frac{\text{Radius of smaller circle}}{\text{Radius of bigger circle}} = \frac{1}{3}$

The area of an equilateral triangle formed by taking the hypotenuse of a right-angled triangle as the base is always equal to the sum of the areas of the equilateral triangles formed by taking the other sides of the right-angled triangle as the base.

किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण को आधार मान कर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल समकोण त्रिभुज की अन्य दो भुजाओं को आधार मानकर बनाए गए समबाहु त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग हमेशा बराबर होगा।

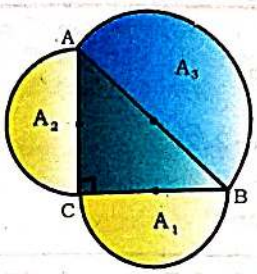


Area (ΔC) = Area (ΔA) + Area (ΔB)

The area of semi circles formed by taking the hypotenuse of a right-angled triangle as the diameter is always equal to the sum of the areas of semi circles formed by taking the other sides of the right-angled triangle as a diameter.

समकोण त्रिभुज के कर्ण को व्यास मानकर बनाए गए अर्धवृत्त का क्षेत्रफल सदैव समकोण त्रिभुज की अन्य भुजाओं को व्यास मानकर बनाए गए अर्धवृत्त के क्षेत्रफल के योग के बराबर होता है।

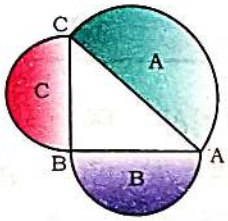
@Baka_200



Area of semi circle (A_3) = Area of semi circle (A_1) + Area semi circle (A_2)/A_3 व्यास वाले अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल = A_1 + A_2 व्यास वाले अर्द्धवृत्तों के क्षेत्रफलों का योग

Ex. Find the area of shaded region, where BC = 8 cm, AB = 6 cm and AC = 10 cm.

छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जहां BC = 8 सेमी, AB = 6 सेमी और AC = 10 सेमी है।

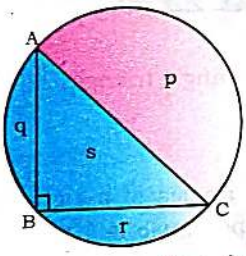


HINTS:

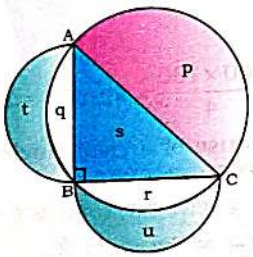
Total required area = Ar.(reg. A) + Ar. (reg. B) + Ar. (reg. C)

= 2 Ar. (reg. A) = $2 \times \pi \times \frac{25}{2} = 25\pi$

Area of shaded region (p)/छायांकित क्षेत्र (p) का क्षेत्रफल = sum of area of region (q), (r) and (s)/क्षेत्र (q), (r) और (s) के क्षेत्रफल का योग

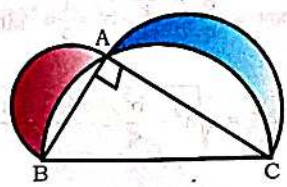


Area of shaded region (s)/छायांकित क्षेत्र (s) का क्षेत्रफल = sum of area of region (t) and (u)/क्षेत्र (t) और (u) के क्षेत्रफल का योग



Ex. In the given figure, 3 semicircles are drawn on three sides or triangle ABC. AB = 21 cm, AC = 28 cm and BC = 35 cm. What is the area (in cm^2) of the shaded part?

दी गयी आकृति में, त्रिभुज ABC की तीनो भुजाओं पर 3 अर्द्धवृत्त बनाये गए हैं। AB = 21 सेमी, AC = 28 सेमी तथा BC = 35 सेमी है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ($सेमी^2$) में क्या है?



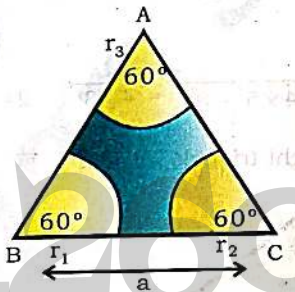
HINTS:

Area of shaded part = Ar. ΔABC

$= \frac{1}{2} \times 21 \times 28 = 294$

If 3 cows are tied to each corner of an equilateral triangular field of side 'a' cm with ropes of lengths r_1, r_2 and r_3 cm, then

'a' सेमी भुजा के समबाहु त्रिभुजाकार खेत के प्रत्येक कोने पर r_1, r_2 तथा r_3 सेमी लम्बाई की रस्सियों से 3 गायों को बांधा जाता है तो



The area of grazed by the cows:

गायों द्वारा चरे गये क्षेत्र का क्षेत्रफल:

$= \frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

The area ungrazed by the cows:

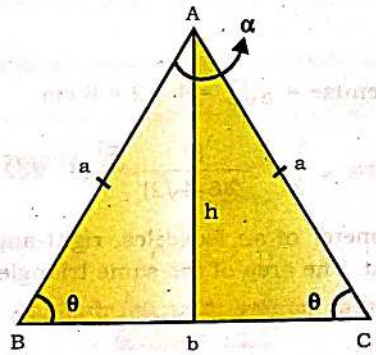
गायों द्वारा नहीं चरे गए क्षेत्र का क्षेत्रफल:

$= \frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

Isosceles Triangle/समद्विबाहु त्रिभुज

If ABC be an isosceles triangle such that AB = AC = *a* and BC = *b*, then

यदि ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हो कि AB = AC = *a* और BC = *b* है, तो



(i) Side/भुजा AB = AC = a

(ii) Perimeter/परिमाप = 2a + b

(iii) Area/क्षेत्रफल = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$

(iv) Height/ऊँचाई = $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}=\frac{a^2}{2R}$

(v) Circum radius/परित्रिज्या (R) = $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$

(vi) Base/आधार = $\frac{a}{R}\sqrt{(2R+a)(2R-a)}$

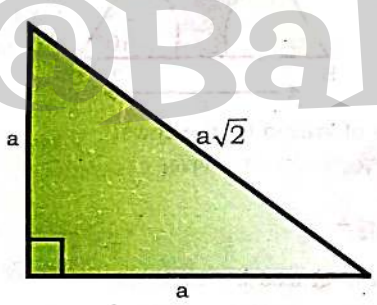
Ex. Find the area of an isosceles triangle whose sides are 8 cm, 5 cm and 5 cm.

समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जिसकी भुजाओं की लम्बाई क्रमशः 8 सेमी, 5 सेमी और 5 सेमी है।

HINTS:

Area = $\frac{8}{2}\sqrt{4\times5^2-8^2}$ = $4\sqrt{(36)}$ = 24 cm²

(vii) Isosceles-right triangle/समद्विबाहु समकोण त्रिभुज



(a) Perimeter/परिमाप (P) = a(2 + $\sqrt{2}$)

Ex. If the perimeter of an isosceles right triangle is $8\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm, then the length of the hypotenuse of the triangle is:

यदि समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की परिधि $8\left(\sqrt{2}+1\right)$ सेमी है, तो त्रिभुज के कर्ण की लंबाई है।

HINTS:

$8\left(\sqrt{2}+1\right)$ = $a\times\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

$a = 4\sqrt{2}$

∴ Hypotenuse = $a\sqrt{2}$ = 4 × 2 = 8 cm

(b) Area/क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}a^2=\frac{P^2}{2(6+4\sqrt{2})}=\frac{P^2}{4}(3-2\sqrt{2})$

Ex. The perimeter of an isosceles, right-angled triangle is 2p unit. The area of the same triangle is-

एक समकोणीय समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 2p इकाई है. इसका क्षेत्रफल होगा-

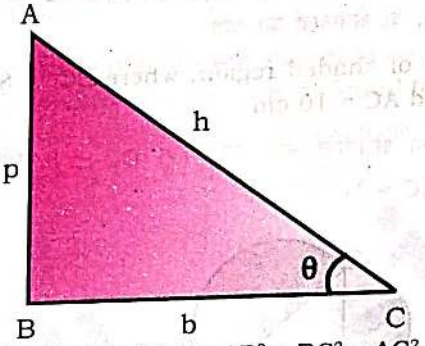
HINTS:

Perimeter = 2p

Area = $\frac{(2p)^2}{4}(3-2\sqrt{2})$

= $p^2\ (3-2\sqrt{2})$ unit²

Right-Angled Triangle/समकोण त्रिभुज



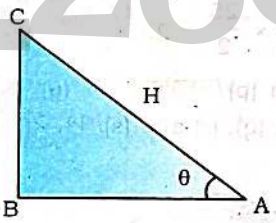
(i) $p^2 + b^2 = h^2$ i.e. $AB^2 + BC^2 = AC^2$

(ii) $p = \sqrt{h^2-b^2}, b = \sqrt{h^2-p^2}, h = \sqrt{p^2+b^2}$

(iii) Perimeter/परिमाप = p + b + h

(iv) Area of triangle/त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times p\times b$

(v)



Area of right angle triangle/समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

= $\frac{H^2}{4}\sin^2\theta$

Ex. One of the angles of a right-angled triangle is 15° and the hypotenuse is 1 m. The area of the triangle (in sq. cm.) is

समकोण त्रिभुज के कोणों में से एक कोण 15° तथा त्रिभुज का कर्ण 1 मी है। क्षेत्रफल कितना होगा (सेमी² में)

HINTS:

Area = $\frac{100\times100}{4}\times\sin30°$ = 1250 cm²

Ex. If hypotenuse of a right angle Δ is 10 cm. What can be its maximum area?

यदि किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण 10 सेमी है, तो उसका अधिकतम क्षेत्रफल क्या हो सकता है?

HINTS:

$Area_{max}$ = $\frac{10\times10}{4}$ = 25 cm²

@Baka_260

Pythagorean Triplets : A set of three integers a, b, c which satisfy Pythagoras Theorem ($a^2 + b^2 = c^2$) or the sides of a right-angled triangle is called Pythagorean triplets.

पायथागोरियन ट्रिपलेट : तीन पूर्णांकों a, b और c का समूह जो पायथागोरस प्रमेय ($a^2 + b^2 = c^2$) को संतुष्ट करे या किसी समकोण त्रिभुज की भुजा हो, पायथागोरियन ट्रिपलेट कहलाता है।

The smallest Pythagorean triplet is (3, 4, 5).

सबसे छोटी पायथागोरियन ट्रिपलेट (3, 4, 5) है।

Some important Pythagorean triplets

कुछ महत्वपूर्ण पायथागोरियन त्रिक

(3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20), (15, 20, 25)

(5, 12, 13), (10, 24, 26), (21, 72, 75), (8, 15, 17),

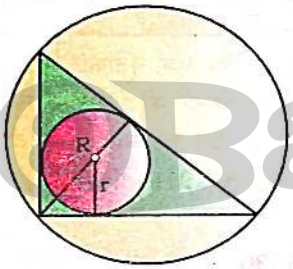
(7, 24, 25), (14, 48, 50), (3.5, 12, 12.5),

(9, 40, 41), (11, 60, 61), $(1, 1, \sqrt{2})$, $(1, \sqrt{3}, 2)$

$(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$, $\left(\frac{n^2+1}{2}, \frac{n^2-1}{2}, n\right)$

According to figure radius of circum circle and incircle

चित्रानुसार बाह्य वृत्त और अंत: वृत्त की त्रिज्याएं



(v) Inradius/अंत: त्रिज्या (r)

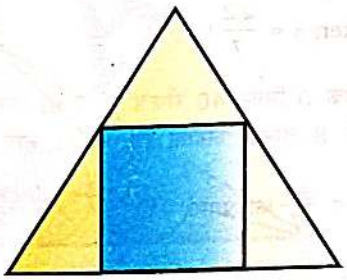
$= \frac{p + b - h}{2}$ 'or' $\left[\frac{\text{Perpendicular} + \text{Base} - \text{Hypotenuse}}{2}\right]$

(vi) Circumradius/बाह्य त्रिज्या (R)

$= \frac{h}{2}$ 'or' $\left[\frac{\text{Hypotenuse}}{2}\right]$

Side of largest square inside a triangle whose base is 'B' and height is 'H'

किसी त्रिभुज के अंदर सबसे बड़े वर्ग की भुजा, जिसका आधार B और ऊँचाई H हो

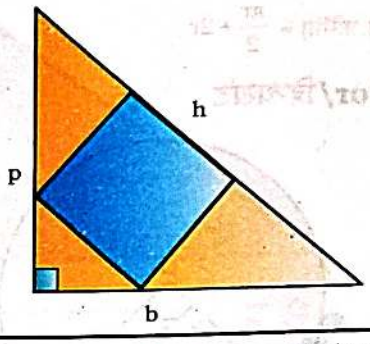


Side of square/वर्ग की भुजा $= \frac{B \times H}{B + H}$

Maximum possible square inscribed in right angled triangle / समकोण त्रिभुज में अंकित अधिकतम संभव वर्ग -

1. When side of square lies on hypotenuse

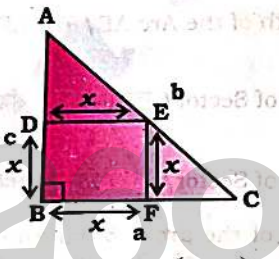
जब वर्ग की भुजा कर्ण पर स्थित हो



Side of square/वर्ग की भुजा $= \frac{p \times b \times h}{p^2 + b^2 + pb}$

2. When side of sqaure lies on other side

जब वर्ग की भुजा अन्य भुजा पर स्थित हो



Side of maximum square, $x = \left(\frac{ac}{a+c}\right)$

So, area of the square DEFB $= \left(\frac{ac}{a+c}\right)^2$

Circle/वृत्त



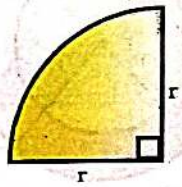
(i) Area of Circle (वृत्त का क्षेत्रफल) $= \pi r^2$

(ii) Circumference of circle (वृत्त की परिधि) $= 2\pi r$

(iii) Area of Semi-circle (अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल) $= \frac{\pi r^2}{2}$

(iv) Circumference of Semi-circle (अर्द्धवृत्त की परिधि) $= \pi r + 2r$

Quadrant/चतुर्थांश



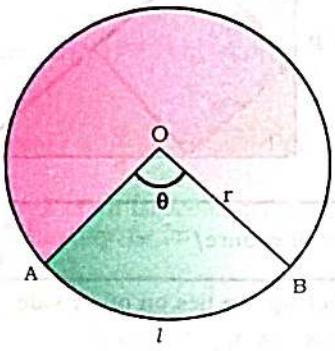
©Baka_200

(i) Area of quadrant of circle (वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल)

$= \frac{1}{4}\pi r^2$

(ii) Circumference of quadrant of circle (वृत्त के चतुर्थांश का परिधि) $= \frac{\pi r}{2} + 2r$

Sector/त्रिज्यखंड



(i) Length of the Arc AB/ चाप AB की लंबाई (l) $= \frac{2\pi r\theta}{360°}$

(ii) Area of Sector/ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}lr$

(iii) Area of Sector/ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta \times \pi r^2}{360°}$

Ex. If length of the arc = 6 cm and radius of circle = 5 cm. Find area of sector of a circle.

यदि चाप की लम्बाई = 6 सेमी और त्रिज्या = 5 सेमी हो। वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

HINTS:

Area $= \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15\ cm^2$

Ex. Find the area of the sector of a circle of radius 7 cm with a central angle of 90°.

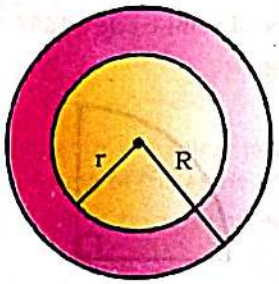
7 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका केंद्रीय कोण 90° का है।

HINTS:

Area $= \frac{\pi r^2}{360°} \times 90° = \frac{\pi \times 7 \times 7}{4} = \frac{77}{2} = 38.5\ cm^2$

Area enclosed by two concentric circle

(दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल)



If R and r are radii of two concentric circles, then

यदि R और r दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ हैं, तो

(i) Area enclosed by two circle

दो वृत्तों द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल $= \pi (R + r)(R - r)$

(ii) Width of path/रास्ते की चौड़ाई

$R - r = \frac{\text{outer circumference} - \text{inner circumference}}{2\pi}$

Ex. The area enclosed between the concentric circles is 770 cm^2 and the radius of the outer circle is 21 cm, then find the radius of the inner circle.

संकेंद्रित वृत्तों के बीच घिरा क्षेत्रफल 770 सेमी^{2} है और बाहरी वृत्त की त्रिज्या 21 सेमी है, तो आंतरिक वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करें।

HINTS:

Area enclosed between two circle $= \pi(R^2 - r^2)$

$\Rightarrow \frac{22}{7}(21^2 - r^2) = 770\ cm^2 \Rightarrow r = \sqrt{196} = 14$ cm

Ex. The area of a circular path enclosed by two concentric circles is 3080 m^2. If the difference between the radius of the outer edge and that of inner edge of the circular path is 10 m, what is the sum (in m) of the two radii? (Take $\pi = 22/7$)

दो संकेंद्रित वृत्तों से घिरे एक वृत्ताकार पथ का क्षेत्रफल 3080 वर्ग मीटर है। यदि बाहरी किनारे की त्रिज्या और वृत्ताकार पथ के भीतरी किनारे की त्रिज्या के बीच का अंतर 10 मीटर है, तो दोनों त्रिज्याओं का योग (मीटर में) क्या है?

HINTS:

$\pi(R^2 - r^2) = 3080$

$\frac{22}{7}(R + r)(R - r) = 3080$

$\Rightarrow R + r = 98$ cm

The number of revolutions completed by a rotating wheel in one minute.

एक घूमते हुए पहिये द्वारा एक मिनट में पूरे किये गये चक्करों की संख्या-

$= \frac{\text{Distance covered in one minute/ 1 मिनट में चली गई दूरी}}{\text{Circumference/ परिधि}}$

Ex. An athlete runs 8 times around a circular field of radius 7 m in 3 minutes 40 seconds. His speed (in km/h) is: (Taken $\pi = \frac{22}{7}$)

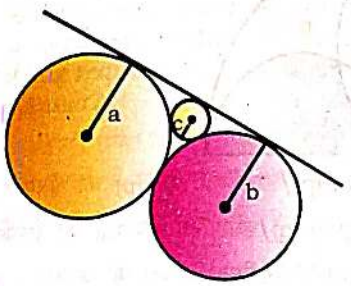
एक धावक 3 मिनट 40 सेकंड में 7 m त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार मैदान के 8 चक्कर लगाता है। उसकी चाल (km/h में) कितनी है? ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)

HINTS:

$S = \frac{44 \times 8}{220} \times \frac{18}{5} = \frac{144}{25}$

According to figure three circles which radius are a, b and c touch each other externally and all the three circles touch a line.

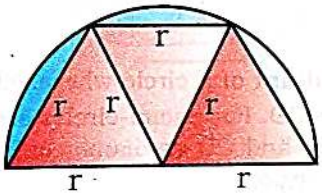
चित्रानुसार a, b, c त्रिज्या वाले तीन वृत्त एक दूसरे को वाह्य रूप से स्पर्श करते हैं और तीनों वृत्त एंक रेखा को स्पर्श करते हैं।



$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

What is the total area of three equilateral triangle inscribed in a semi-circle of radius 'r' cm?

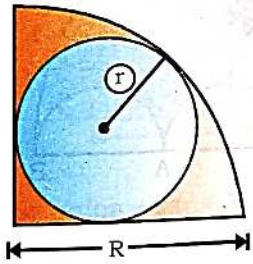
त्रिज्या 'r' सेमी वाले अर्धवृत्त में अंकित तीन समबाहु त्रिभुजों का कुल क्षेत्रफल कितना है?



$$\text{Area} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$$

When a circle is inscribed in a qudrant as shown in the figure. Then

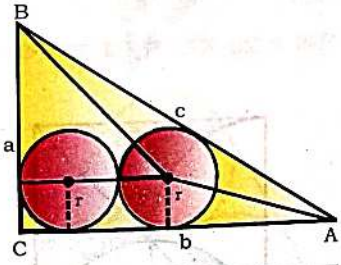
जब एक वृत्त, चतुर्थांश में अंकित हो, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। तो



$$r = (\sqrt{2} - 1)R$$

When two circles of equal radius is inscribed in a right angled triangle as shown in the figure

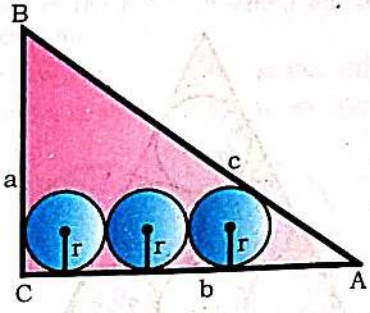
जब समान त्रिज्या के दो वृत्त एक समकोण त्रिभुज में अंकित होते हैं जैसा कि चित्र में दिखाया गया है



$$\text{Radius/त्रिज्या (r)} = \frac{ab}{3a + b + c}$$

When three circles of equal radius is inscribed in a right angled triangle as shown in the figure. Then –

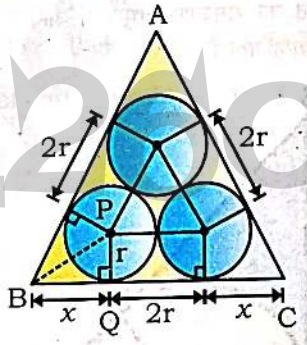
जब समान त्रिज्या के दो वृत्त एक समकोण त्रिभुज में अंकित होते हैं जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। तो-



$$\text{Radius/त्रिज्या (r)} = \frac{ab}{5a + b + c}$$

An equilateral triangle circumscribes all the three circles each of radius 'r'. What is the perimeter of the equilateral triangle?

एक समबाहु त्रिभुज 'r' त्रिज्या वाले सभी तीन वृत्तों को परिचालित करता है। समबाहु त्रिभुज का परिमाप क्या है?



In ΔBPQ, $\angle PBQ \frac{\angle ABC}{2} = 30°$

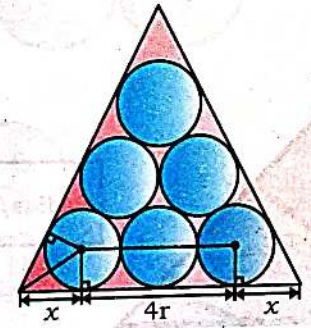
$$\tan 30° = \frac{PQ}{BQ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{x} \Rightarrow x = \sqrt{3}r$$

$\therefore$ Side = $2x + 2r = 2\sqrt{3}r + 2r = 2r(\sqrt{3} + 1)$

Perimeter of triangle = 3 × side = $6r(\sqrt{3} + 1)$

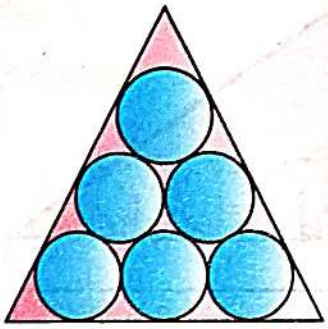
Note: In case of six circles



Side = $2x + 4r = 2\sqrt{3}r + 4r = 2r(\sqrt{3} + 2)$

@Baka_200

Ex. An equilateral triangle circumscribes all the circles, each with radius 10 cm. What is the perimeter of the equilateral triangle?
एक समबाहु त्रिभुज सभी वृत्तों, जिनकी त्रिज्या 10 सेमी है को परिगत करता है। समबाहु त्रिभुज का परिमाप होगा?

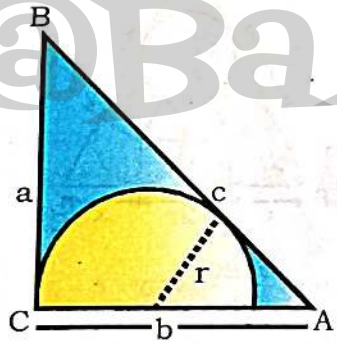


HINTS:

Perimeter = $3 \times 2 \times 10(\sqrt{3}+2)$

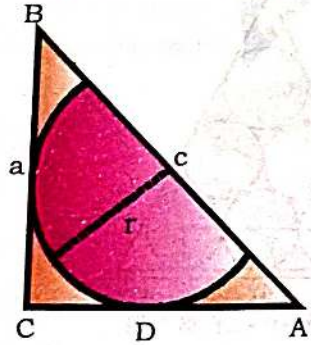
$= 60(\sqrt{3}+2)$ cm

- When a semicircle is inscribed in a right angled triangle, as shown in the figure. Then–
जब एक अर्धवृत्त को समकोण त्रिभुज में अंकित किया जाता है, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। तो -



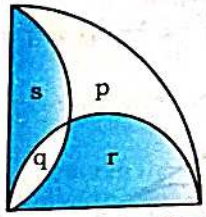
$$\text{Radius/त्रिज्या } (r) = \frac{ab}{a+c}$$

- When a semicircle of r-radius is inscribed in a right angled triangle lies on hypotenuse as shown in the figure. Then–
जब r-त्रिज्या का एक अर्द्धवृत्त एक समकोण त्रिभुज के कर्ण पर स्थित होता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। तो-



$$\text{Radius/त्रिज्या } (r) = \frac{ab}{a+b}$$

- According to the figure two semicircles are inscribed in a quadrant.
चित्रानुसार दो अर्द्धवृत्तों को एक चतुर्थांश के अंदर निर्मित किया गया है।

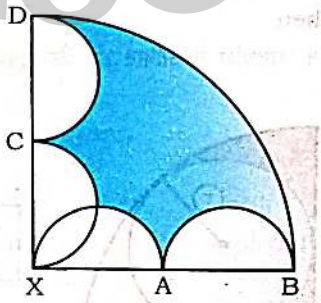


(i) Area of shaded region (p)/छायांकित क्षेत्र (p) का क्षेत्रफल
= Area of shaded region (q)/छायांकित क्षेत्र (q) का क्षेत्रफल

(ii) Area of shaded region (r)/छायांकित क्षेत्र (r) का क्षेत्रफल
= Area of shaded regions (s)/छायांकित क्षेत्र (s) का क्षेत्रफल

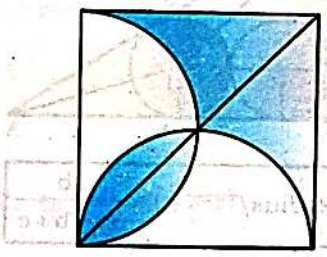
(iii) Ratio of the area of the region (p), (q), (r), (s) respectively/(p), (q), (r), (s) के क्षेत्रफलों का अनुपात
p : q : r : s
4 : 4 : 7 : 7

- XBD is quadrant of a circle where, XB = 4a cm, XA = AB = XC = CD. Four semi-circles are drawn taking XA , AB , XC and CD as diameter. Find the area of the shaded region.
XBD एक वृत्त का चतुर्थांश है, जहां XB = 4a सेमी, XA = AB = XC = CD, XA , AB , XC और CD को व्यास मानकर चार अर्धवृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



HINTS:
XB = 4a cm
Area of shaded region
= Area of quadrant of radius 4a – 4 × Area of Semicircle of radius a + Area of leaf of radius a

- If side of square = 2a cm, find the area of shaded region.
यदि वर्ग की भुजा = 2a सेमी हो, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



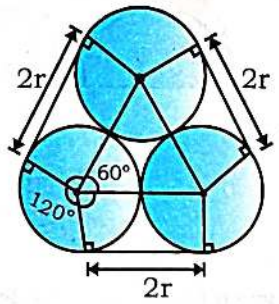
@Baka_260

HINTS:

Area of shaded region = Area of square of side 2a – 2 × Area of semicircle of radius a + Area of leaf of radius a

Three circular rings of equal radii of r cm each are touching each other. A string runs all around the set of rings very trightly. What is the minimum length of string required to bind all the three rings in the given manner?

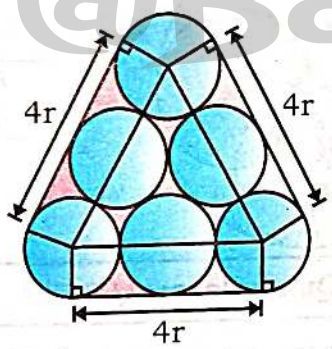
r सेमी की समान त्रिज्या के तीन गोलाकार छल्ले एक दूसरे को छू रहे हैं। एक डोरी छल्लों के समूह के चारों ओर बंधी हुई है। इस प्रकार से तीनों छल्लों को बांधने के लिए आवश्यक न्यूनतम डोरी की लंबाई क्या है?



Length of three arc = $3\times\left(\frac{2\pi r}{360}\times 120\right)=2\pi r$

$\therefore$ Length of string = $2\pi r + 3\times 2r = 2r(\pi+3)$

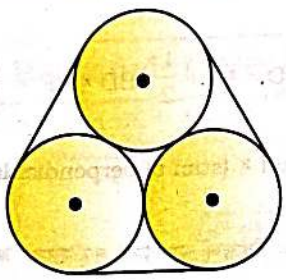
Note: In case of six rings



$\therefore$ Length of string = $2\pi r + 3\times 4r = 2r(\pi+6)$

Ex. Three circles of diameter 10 cm each, are bound together by a rubber band, as shown in the figure. The length of the rubber band (in cm) if it is stretched as shows, is

प्रत्येक 10 सेमी त्रिज्या तीन वृत्त किसी रबर बैंड द्वारा एक साथ बधें हुए हैं, जैसा कि नीचे दी गई आकृति में दिखाया गया है खिचे हुए रबर बैंड की लम्बाई (सेमी में) है।



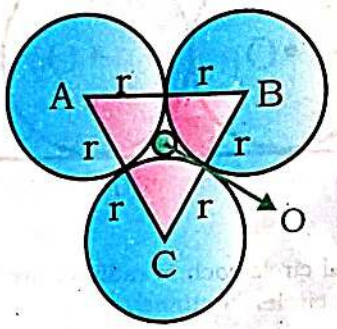
HINTS:

Length of string = $2\times 5(\pi+3)$

$=10\pi+30$

Three equal circles each of radius r touch one another. The radius of the circle touching all the three given circles externally is-

r त्रिज्या वाले तीन समान वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। दिए गए तीनों वृत्तों को वाह्य रूप से स्पर्श करने वाले वृत्त की त्रिज्या है-



ΔABC = equilateral Δ

चित्रानुसार A, B, C एक समबाहु त्रिभुज है।

OB = circumradius/परिवृत्त की त्रिज्या

Let radius of small circle/माना छोटे वृत की त्रिज्या = x

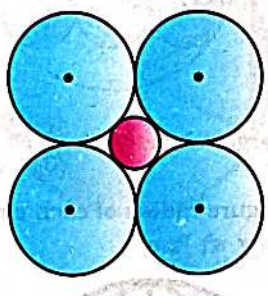
$$OB=\frac{\text{side of equilateral}\Delta}{\sqrt{3}}=\frac{2r}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ x=\frac{2r}{\sqrt{3}}-r$$

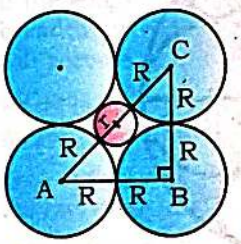
$$x=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\times r$$

In the given figure, when all the outer circles have radii 'R' then the radius of the inner circle will be

दिये गये चित्र में, प्रत्येक बाहरी वृत्त जिनकी त्रिज्या 'R' है तो आन्तरिक वृत्त की त्रिज्या होगी-



HINTS:



$AC=\sqrt{2}\times 2R$

$\Rightarrow 2R+2r=2\sqrt{2}R$

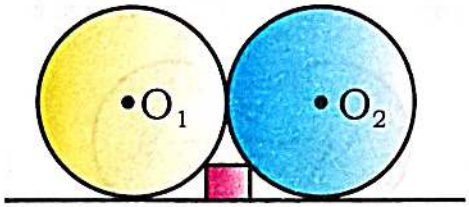
$2r=2\sqrt{2}R-2R$

$r=R(\sqrt{2}-1)$

@Baka_200

Two circle of equal radius are touch each other as shown in figure, a square of side 'a' is placed between two circle. On side of squre is on direct common tangent of both circle, find r/a?

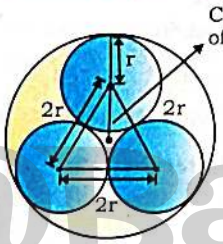
समान त्रिज्या r वाले दो वृत एक दूसरे को स्पर्श करते है। a भुजा वाला एक वर्ग इस प्रकार स्थित है कि वर्ग की एक भुजा दोनों वृतों के उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा पर स्थित है। तब r/a का मान होगा?



$$\frac{r}{a} = \frac{5}{2}$$

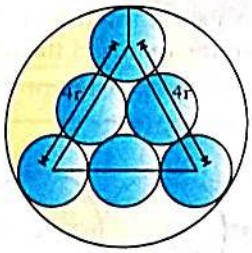
Three equal circle each of radius r are circumscribed by a larger circle.

त्रिज्या r वाले तीन समान वृत्त एक बड़े वृत्त से घिरे हुए हैं।



$$\text{Radius of larger circle} = r \times \left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$$

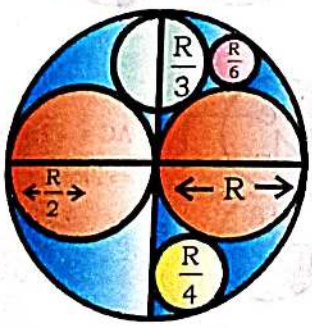
Note: In case of six circle



$$\therefore \text{ Radius of larger circle} = r + \frac{4r}{\sqrt{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}+4)$$

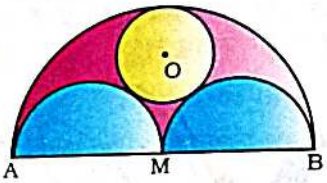
According to figure radius of each circle

चित्रानुसार प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या



Ex. In the figure given below, AB is line of length 2a, with M as mid-point. Semi-circles are drawn on one side with AM, MB and AB as diameters. A circle with centre O and radius r is drawn such that this circle touches all the three semi-circles. What is the value of r ?

नीचे दिये गये चित्र में AB भुजा की लम्बाई 2a है, M उसका मध्य बिन्दु है। AB, MB, AB भुजाओं को व्यास मान कर अर्द्धवृत्त बनाये जाते हैं। एक O केन्द्र वाला तथा r त्रिज्या वाला वृत्त इस प्रकार बनाया गया कि वह तीनों अर्द्धवृत्तों को स्पर्श करता है। r का मान ज्ञात करो-



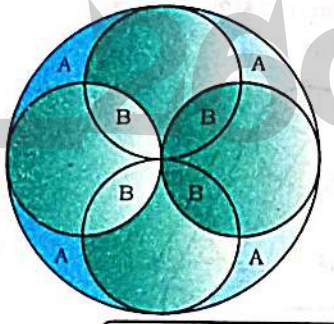
HINTS:

$2R = 2a$

$$r = \frac{R}{3} = \frac{a}{3}$$

As per the given figure, a big circle and 4 small circles are given inside it, then the ratio of their areas will 1:1.

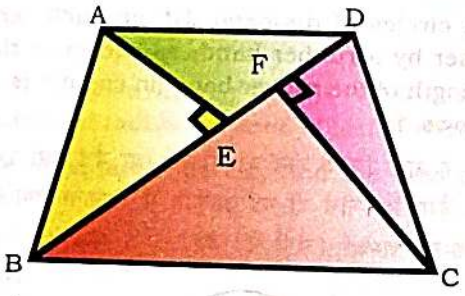
दिए गए चित्रानुसार एक बड़ा वृत्त और उसके अंदर 4 छोटे वृत्त दिए गए है तो इनके क्षेत्रफल का अनुपात 1:1 होगा।



$$A = B$$
$$A : B = 1 : 1$$

Quadrilateral/चतुर्भुज

Area of quadrilateral/चतुर्भुज का क्षेत्रफल



$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times BD \times AE + \frac{1}{2} \times BD \times CF = \frac{1}{2} \times BD\,(AE + CF)$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{diagonal} \times (\text{sum of perpendicular dropped on it})$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{विकर्ण} \times (\text{विकर्ण पर डाले गए लम्बों का योग})$$

Ex. In a quadrilateral ABCD, AC = 12 cm. If length of the perpendiculars drawn from B and D to line AC are 5 cm and 7 cm, the area of the quadrilateral ABCD is :

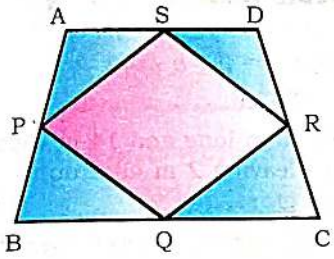
किसी चतुर्भुज ABCD में, AC = 12 सेमी है। यदि B तथा D से विकर्ण AC पर डाले गए लम्बों की लंबाइयां 5 सेमी और 7 सेमी हो, तो चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल है :

HINTS:

Area = $\frac{1}{2} \times 12 \times (7 + 5) = 72 \text{ cm}^2$

The quadrilateral formed by joining the mid-point of the adjacent side of the quadrilateral will be a parallelogram of half area.

चतुर्भुज की आसन्न भुजा के मध्य-बिंदु को मिलाने से बनने वाला चतुर्भुज आधे क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज होगा।



If P, Q , R , S are the mid-point of the side AB, BC, CD and DA respectively, then–

यदि P, Q , R , S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिंदु हो, तो–

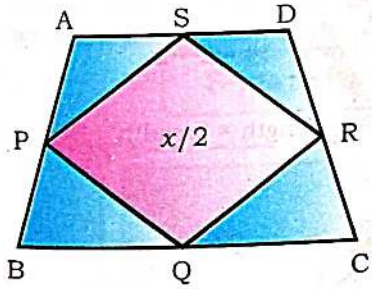
(a) PQRS is a parallelogram

PQRS एक समान्तर चतुर्भुज होगा

(b) If the area of the quadrilateral is x, then

Area of the parallelogram PQRS = $\frac{x}{2}$

यदि चतुर्भुज का क्षेत्रफल x हो तो समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल = $\frac{x}{2}$

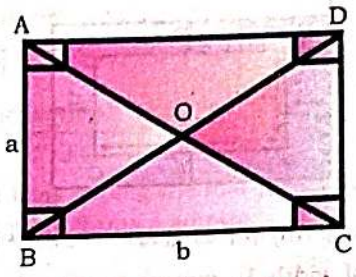


Rectangle/आयत

(i) AB = CD = a and BC = AD = b

(ii) AC = BD = $\sqrt{a^2 + b^2}$

(iii) AO = OC = OB = OD = $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$



(iv) Perimeter/परिमाप = 2(length/लम्बाई + breadth/चौड़ाई) = 2(a + b)

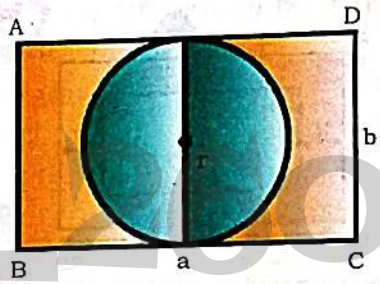
(v) Area/क्षेत्रफल = length/लम्बाई × breadth/चौड़ाई = ab

(vi) Area of ΔAOB/ΔAOB का क्षेत्रफल = Area of ΔDOC/ΔDOC का क्षेत्रफल

Area of ΔAOD/ΔAOD का क्षेत्रफल = Area of ΔBOC/ΔBOC का क्षेत्रफल = $\frac{ab}{4}$

(vii) Radius of the maximum large possible circle

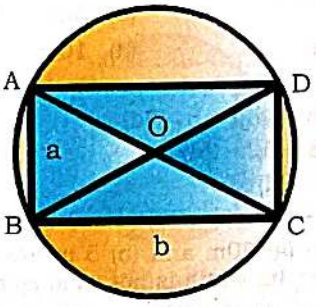
अधिकतम बड़े संभावित वृत्त की त्रिज्या



$r = \frac{\text{Breadth}}{2} = \frac{b}{2}$

Radius of the circle circumscribed the rectangle ABCD be R, then

आयत ABCD के परितः बने वृत्त की त्रिज्या R हो, तो



$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

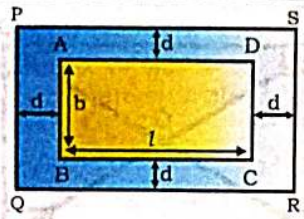
(i) If the length of the rectangle will become x times and breadth will become y times, then area of the rectangle will become xy times.

यदि आयत की लंबाई x गुनी और चौड़ाई y गुनी हो जाए, तो आयत का क्षेत्रफल xy गुना हो जाएगा।

(ii) Area of the path of uniform width d all around outside the rectangle ABCD

आयत ABCD के परितः एक समान चौड़ाई d वाले रास्ते का क्षेत्रफल

@Baka_Boo



Area of the path/रास्ते का क्षेत्रफल = $2d(l + b + 2d)$

Ex. A street of width 10 metres surrounds from outside a rectangular garden whose measurement is 200m × 180m. The area of the path (in square metres is)

एक आयताकार बगीचे के बाहर से 10 मीटर चौड़ी एक गली है जिसकी माप 200 मीटर × 180 मीटर है। पथ का क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में है) :

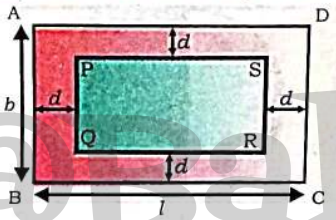
HINTS:

Area of the path

$= 2 \times 10 (200 + 180 + 20) = 20 (400) = 8000 \text{ m}^2$

(ii) Area of the path of uniform width 'd' all around inside the rectangle ABCD

आयत ABCD के अंदर एक समान चौड़ाई d वाले रास्ते का क्षेत्रफल



Area of the path/रास्ते का क्षेत्रफल = $2d(l + b - 2d)$

Ex. A path of uniform width runs round the inside of rectangular field 38 m long and 32 m wide. If the path occupies 600 m², then the width of the path is

समान चौड़ाई का एक पथ 38 मीटर लंबे और 32 मीटर चौड़े आयताकार मैदान के अंदर के चारों ओर है। यदि पथ का क्षेत्रफल 600 वर्ग मीटर है, तो पथ की चौड़ाई है

(a) 30m (b) 5m

(c) 18.75m (d) 10m

HINTS:

Area of path = $2d(l + b - 2d)$

$600 = 2d(38 + 32 - 2d)$

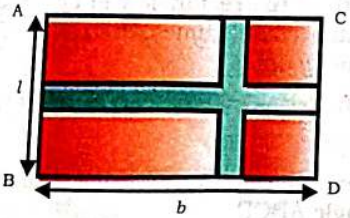
$300 = d(70 - 2d)$

$150 = d(35 - d) \Rightarrow (d - 30)(d - 5) = 0 \Rightarrow d = 30 \text{ & } 5$

From option (a) 30m and (b) 5 m are satisfied above equation but 3m width is not valid so answer is 5m.

(iii) Area of the path of uniform width d along the length and the breadth

लंबाई और चौड़ाई के अनुदिश एक समान चौड़ाई d के पथ का क्षेत्रफल

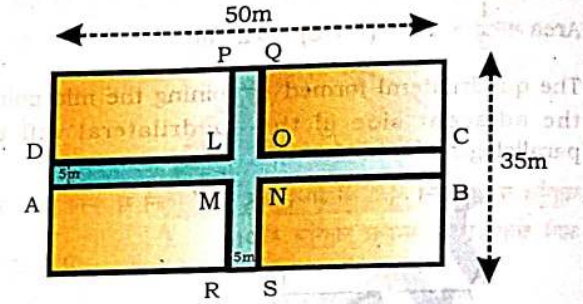


Area of the path/रास्ते का क्षेत्रफल = $(l + b - d)d$

Ex. The diagram given below shows two paths drawn inside a rectangular field 50 m long and 35 m wide. The width of each path is 5 metres. Find the area of the shaded portion.

नीचे दिया गया चित्र 50 मीटर लंबे और 35 मीटर चौड़े आयताकार मैदान के अंदर खींचे गए दो रास्तों को दर्शाता है। प्रत्येक पथ की चौड़ाई 5 मीटर है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS:



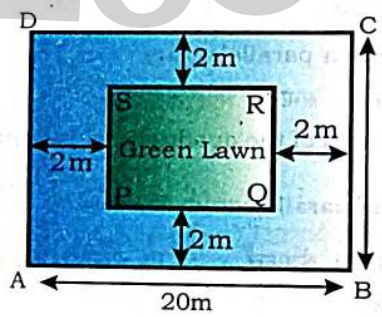
Area of shaded portion = $(l + b - d)d$

$= (50 + 35 - 5)5 = 400 \text{ m}^2$

Ex. A rectangular plot 20 m long and 14 m wide is to be covered with grass leaving 2 m all around. Find the area to be laid with grass.

20 मीटर लंबे और 14 मीटर चौड़े एक आयताकार भूखंड को चारों ओर 2 मीटर छोड़कर घास से ढक दिया जाना है। घास बिछाने के लिए क्षेत्र का पता लगाएं।

HINITS:



Length of grassy lawn = $20 - 2 \times 2$

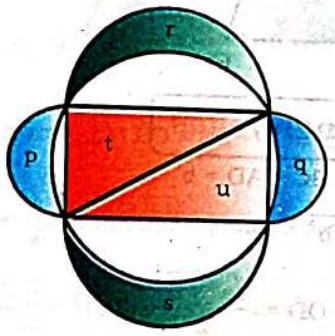
$L = 20 - 4 = 16 \text{ m}$

Breadth of grassy lawn = $14 - 2 \times 2$

$B = 14 - 4 = 10\text{m}$

Area of grassy lawn = length × breadth

$= 16 \times 10 = 160 \text{ m}^2$



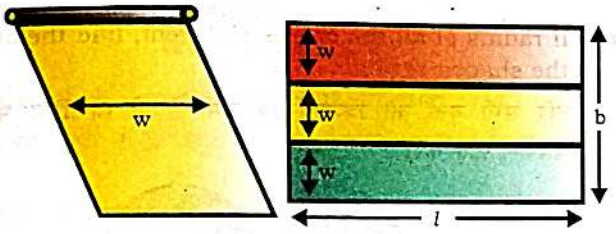
(i) Area of shaded region (p)/छायांकित क्षेत्र (p) का क्षेत्रफल
= Area of shaded region (q)/छायांकित क्षेत्र (q) का क्षेत्रफल

(ii) Area of shaded region (r)/छायांकित क्षेत्र (r) का क्षेत्रफल
= Area of shaded region (s)/छायांकित क्षेत्र (s) का क्षेत्रफल

(iii) Area of shaded region (t)/छायांकित क्षेत्र (t) का क्षेत्रफल
= Area of shaded region (u)/छायांकित क्षेत्र (u) का क्षेत्रफल

(iv) Area of shaded region (p), (q), (r), (s)/छायांकित क्षेत्र (p), (q), (r), (s) का क्षेत्रफल
= Area of rectangular region/ आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

A carpet has fix width
जब कारपेट की चौड़ाई निश्चित हो



(i) Let carpet of width w covers floor of dimension $l \times b$
माना w चौड़ाई का कारपेट $l \times b$ आयाम के फर्श को ढकता है।

∴ Area of carpet/कारपेट का क्षेत्रफल = Area of floor/फर्श का क्षेत्रफल $\Rightarrow l_c \times w = l \times b$

Length of carpet required/आवश्यक कारपेट की लम्बाई $l_c = \frac{lb}{w}$

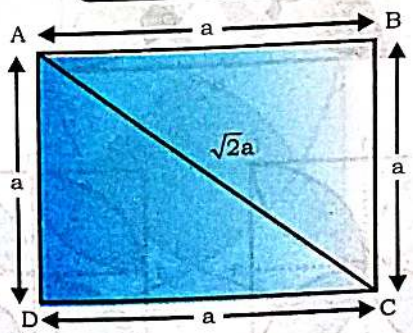
(ii) Let in rectangular tiles of dimension $(x \times y)$ cover the floor of dimension $(l \times b)$
माना $(x \times y)$ आयाम की आयताकार टाईल्स $(l \times b)$ आयाम की फर्श को ढकती है।

⇒ Area of n tiles/n टाईल्स का क्षेत्रफल = Area of floor/फर्श का क्षेत्रफल

$n \times x \times y = l \times b \Rightarrow n = \frac{lb}{xy}$

(iii) If the floor is covered by the minimum number of square tiles, then the side of square tile is HCF of the length and breadth of floor.
यदि फर्श को न्यूनतम संख्या की वर्गाकार टाईल्स द्वारा पूरी तरह से ढका गया है तो वर्गाकार टाईल की भुजा फर्श की लम्बाई तथा चौड़ाई का म.स.प. होती है।

Square/वर्ग



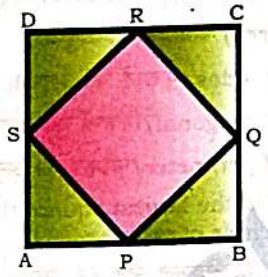
(i) Perimeter/परिमाप = 4 × Side = $4a$

(ii) Area = $(\text{Side})^2 = a^2$

(iii) When diagonal is given then,
जब विकर्ण दिया गया हो, तो

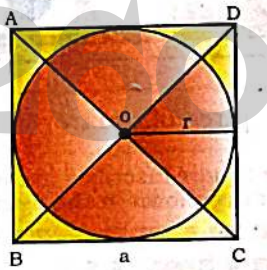
$\text{Area} = \frac{(\text{diagonal})^2}{2} = \frac{d^2}{2}$

(iv) Straight lines joining the mid points of adjacent sides of any square forms a square.
वर्ग की संगत भुजाओं के मध्य बिन्दु को मिलाने से बनने वाली आकृति वर्ग होती है।

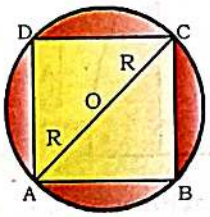


P, Q, R, and S are mid points and PQRS is a square.
P, Q, R और S मध्य-बिन्दु हैं तथा PQRS एक वर्ग है।

(v) Area of Δ AOB = Area of ΔBOC = Area of ΔCOD
= Area of $\Delta DOA = \frac{a^2}{4}$

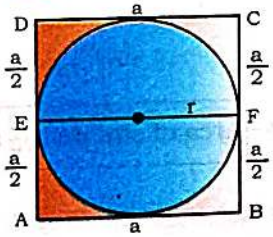


(vi) Radius of the largest circle drawn outside the square of side 'a'
'a' भुजा वाले वर्ग के बाहर खींचे गए बड़े से बड़े वृत्त की त्रिज्या



Radius of circumcircle (R) = $\frac{a}{\sqrt{2}}$

(vii) Radius of the largest circle inscribed inside the square of side 'a'
'a' भुजा वाले वर्ग के अंदर खींचे गए बड़े से बड़े वृत्त की त्रिज्या



Radius of incircle (r) = $\frac{a}{2}$

(viii) If one of the diagonal or the perimeter become x times then the area will become x^2 times or increases by $(x^2 - 1)$ times.

यदि कोई एक विकर्ण या परिमाप x गुना हो जाए तो क्षेत्रफल x^2 गुना हो जाएगा या $(x^2 - 1)$ गुना बढ़ जाएगा।

(ix) For two squares/दो वर्गों के लिए

(a) Ratio of sides/भुजाओं का अनुपात

= Ratio of diagonal (विकर्णों का अनुपात)

= Ratio of perimeter (परिमाप का अनुपात)

(b) Ratio of area/ क्षेत्रफल का अनुपात

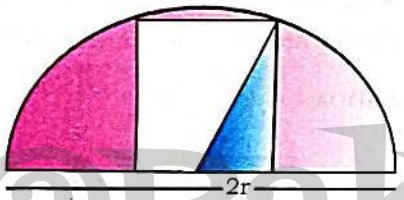
= (Ratio of sides/भुजाओं का अनुपात)^2

= (Ratio of diagonal/विकर्णों का अनुपात)^2

= (Ratio of perimeter/परिमाप का अनुपात)^2

(x) Find the area of the largest square that can be drawn inside a semi-circle of radius r.

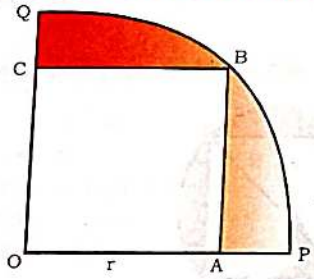
उस सबसे बड़े वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसे r त्रिज्या के अर्ध-वृत्त के अन्दर बनाया जा सकता है।



Area of square = $\frac{4}{5}r^2$

(xi) Area of the square inscribed in the quadrant of a circle of radius 'r'(As shown in the figure).

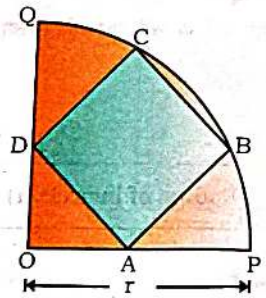
'r' त्रिज्या वाले वृत्त के चतुर्थांश के अंदर बनाए गए वर्ग का क्षेत्रफल (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है)।



Area of square = $\frac{r^2}{2}$

(xii) Area of the square inscribed in the quadrant of a circle of radius 'r'(As shown in the figure).

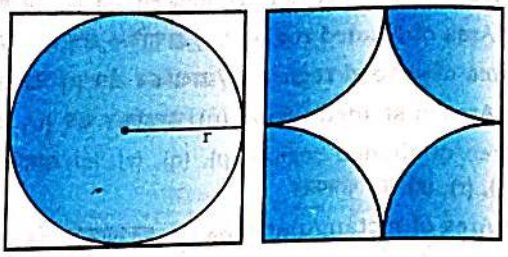
'r' त्रिज्या वाले वृत्त के चतुर्थांश के अंदर बनाए गए वर्ग का क्षेत्रफल (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है)।



Area of square = $\frac{2}{5}r^2$

For the follwing figure, Side of square is 'a'

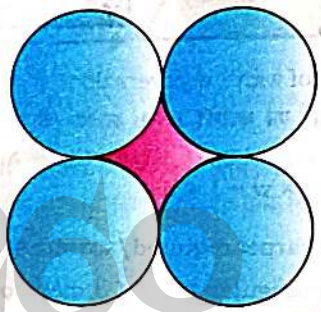
निम्नलिखित चित्र के लिए,वर्ग की भुजा 'a'



Area of non-shaded region/अछायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{3a^2}{14}$

Ex. If radius of all the circles is 14 cm, find the area of the shaded region

यदि सभी वृत्तों की त्रिज्याएँ 14 सेमी है तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

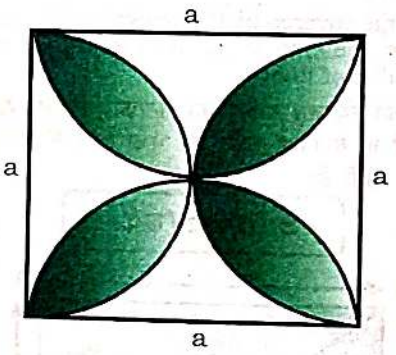


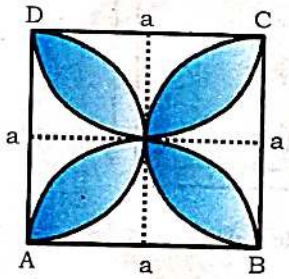
HINTS:

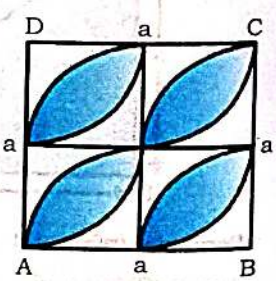
Area of red region = $\frac{3}{14} \times 28 \times 28 = 168$ cm^2

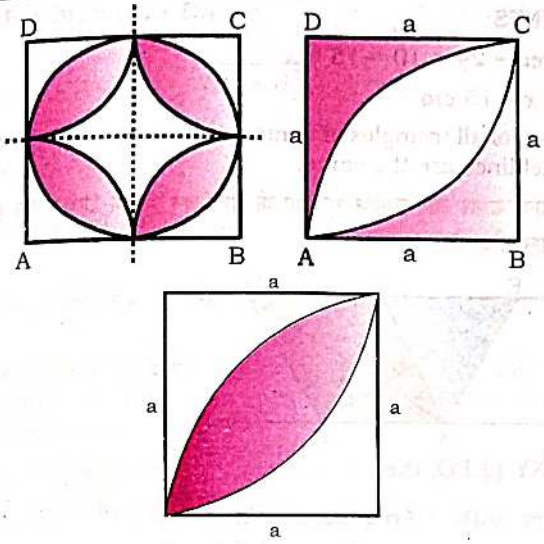
According to the figure area of shaded region

चित्रानुसार छायांकित भाग का क्षेत्रफल









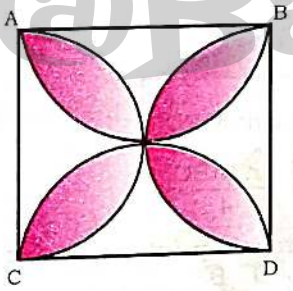
Area of shaded region is equal in each case.

प्रत्येक स्थिति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल आपस में बराबर होगा।

Area of shaded region in each case = $\frac{4}{7}a^2$

Ex. ABCD is a square whose side is 14 cm, find the area of the shaded region.

ABCD एक वर्ग है जिसकी भुजा 14 सेमी है, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



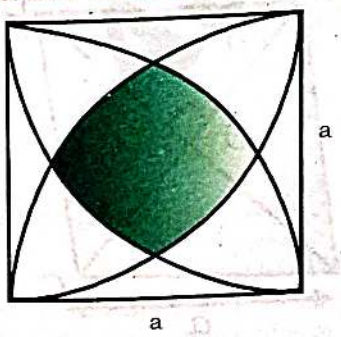
HINTS:

Area of shaded region = $\frac{4}{7}a^2$

$= \frac{4}{7} \times 14 \times 14 = 112 \text{ cm}^2$

According to the figure area of shaded region

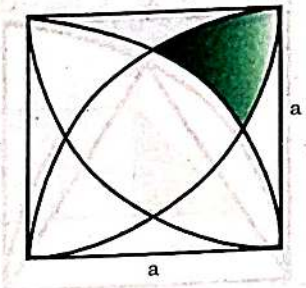
चित्रानुसार छायांकित भाग का क्षेत्रफल



Area of shaded region = $\frac{a^2}{3}\{3(1-\sqrt{3})+\pi\}$

According to the figure area of shaded region

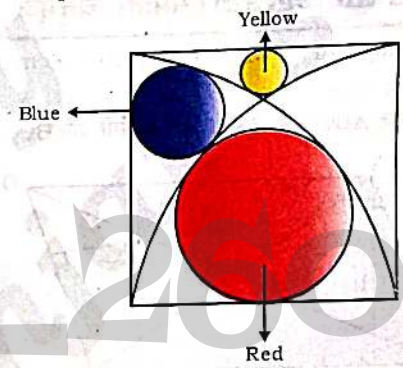
चित्रानुसार छायांकित भाग का क्षेत्रफल



Area shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{a^2}{12}[\pi - 12 + 6\sqrt{3}]$

If side of square/यदि वर्ग की भुजा = 'a'



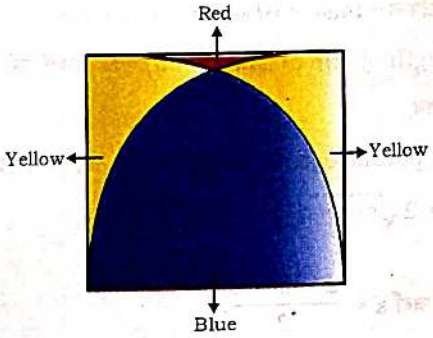
Radius of yellow circle/पीले वृत्त की त्रिज्या = $\frac{a}{16}$

Radius of blue circle / नीले वृत्त की त्रिज्या = $\frac{a}{6}$

Radius of red circle / लाल वृत्त की त्रिज्या = $\frac{3a}{8}$

For the following figure, side of square is 'a'.

निम्नलिखित आकृति के लिए, वर्ग की भुजा 'a' है।



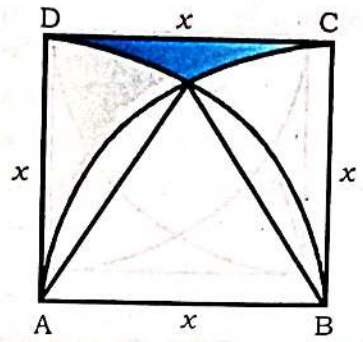
Area of blue Region/नीले क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{\pi a^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Area of yellow Region/पीले क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi a^2}{12}$

Area of red Region/लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल = $a^2 - \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

@Baka_200

For the following figure, side of square is 'x'.
निम्नलिखित आकृति के लिए, वर्ग की भुजा 'x' है।



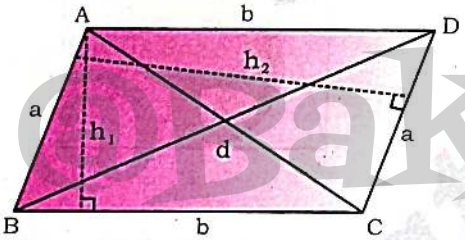
Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल:

$$=\frac{x^2}{12}\left(12-2x-3\sqrt{3}\right)$$

Parallelogram/समांतर चतुर्भुज

In Parallelogram ABCD, let side AB = a cm and BC = b cm, then

समांतर चतुर्भुज ABCD में, यदि AB = a सेमी और BC = b सेमी है, तो



(i) AB = CD and BC = AD

(ii) Each diagonal AC or BD divides the parallelogram in the congruent triangles.

प्रत्येक विकर्ण AC अथवा BD समांतर चतुर्भुज को सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

(iii) $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$

(iv) Perimeter/परिमाप = $2(a + b)$

(v) Area/क्षेत्रफल = Base × Height = $a \times h_1 = b \times h_2$

(vi) The length of one diagonal is d/एक विकर्ण की लंबाई d है।

Then/तब,

Area of parallelogram ABCD/समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = $2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$

where/जहाँ $s = \frac{a+b+d}{2}$

Ex. Side AB = 24 of a parallelogram ABCD is 24cm and side AD = 16 cm. The distance between AB and CD is 10 cm, then find the distance between AD and BC.

एक समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजा AB = 24 सेमी तथा भुजा AD = 16 सेमी है। AB तथा CD के मध की दूरी 10 सेमी है तब AD तथा BC के मध्य की दूरी ज्ञात करो-

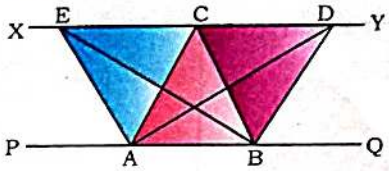
HINTS:

Area = $24 \times 10 = 16 \times x$

$\Rightarrow x = 15$ cm

(vii) Area of all triangles of same base and between the parallel lines are the same.

समान आधार और समांतर भुजाओं के मध्य बने प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल समान होता है।



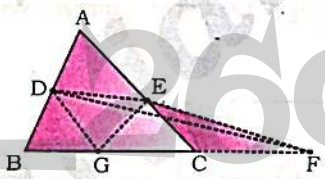
If XY || PQ, then

Area ΔABC = Area ΔABD = Area ΔABE

Ex. In ΔABC, D and E are mid points of sides AB and BC respectively BC is extend up to F such that CF = BC. Then what is relation between Ar.ΔDEF and Ar.ΔABC.

ΔABC में, D और E क्रमशः भुजाओं AB और BC के मध्य बिंदु हैं BC को F तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि CF = BC है। तो फिर Ar.ΔDEF और Ar.ΔABC के बीच क्या संबंध है?

HINTS:



Let G is mid point of BC

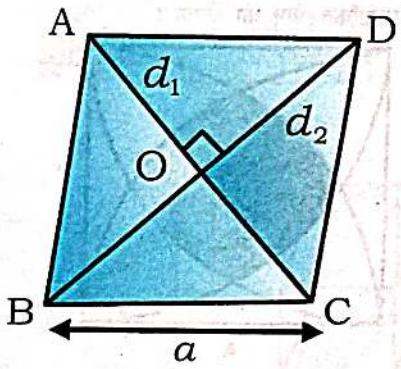
$\therefore$ Ar.ΔDEG = $\frac{\text{Ar.}\Delta ABC}{4}$

If D and E are mid points of AB and AC respectively then DE || BC || BF

Ar.ΔDEF = Ar.ΔDEG (triangles in between || lines with same base) = $\frac{\text{Ar.}\Delta ABC}{4}$

Rhombus/समचतुर्भुज

In rhombus ABCD,



Let the side BC = a, AC = d_1 and BD = d_2, then

(i) AB = BC = CD = DA = a

(ii) Side/भुजा = $a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

or, $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$

(iii) Perimeter/परिमाप = $4a$

(iv) Area/क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

(v) Perimeter of a rhombus is 2p unit and sum of the lengths of diagonals is m unit, then the area of the rhombus is-

एक समचतुर्भुज की परिमाप 2p मात्रक हैं, और विकर्णों का योग m मात्रक है। उसका क्षेत्रफल -

$= \frac{1}{4}(m^2 - p^2)$ sq.unit

Ex. Length of each side of a rhombus is 13 cm and one of the diagonal is 24 cm. What is the area (in cm²) of the rhombus?

एक समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 13 सेमी तथा इसके एक विकर्ण की लंबाई 24 सेमी है। समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (सेमी² में) ज्ञात करें।

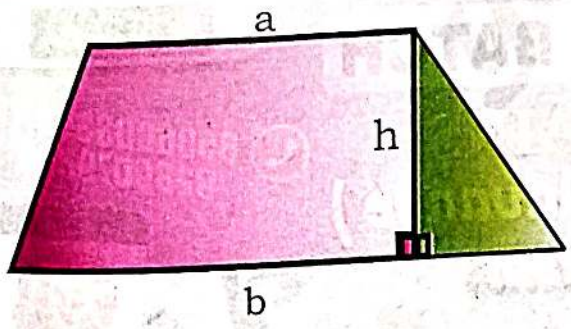
HINTS:

$4 \times 13 \times 13 = 24^2 + d_2^2$

$d_2 = 10$ cm

Area = $\frac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120$ cm²

Trapezium/समलम्ब चतुर्भुज



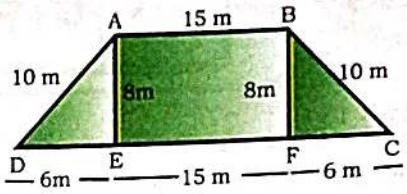
Area of trapezium/समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2}$ × sum of parallel sides/समांतर भुजाओं का योग × height/ऊँचाई

Ex. In a trapezium ABCD, AB and DC are parallel to each with a perpendicular distance of 8 m between them. Also, (AD) = (BC) = 10 m, and (AB) = 15m < (DC). What is the perimeter (in m) of the trapezium ABCD?

एक समलंब चतुर्भुज ABCD में, AB और DC प्रत्येक के समानांतर हैं और उनके बीच 8 मीटर की लंबवत दूरी है। साथ ही, (AD) = (BC) = 10 मीटर, और (AB) = 15m < (DC)। समलंब चतुर्भुज ABCD का परिमाप (मीटर में) क्या है?

HINTS:



Pythagorean theorem DE = $\sqrt{AD^2 - AE^2}$

DE = $\sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$m

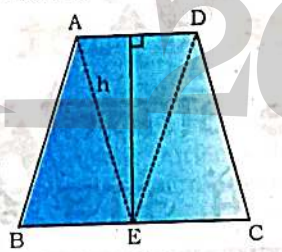
Perimeter of trapezium

= AD + DC + BC + AB=10 + 27 +10 + 15 = 62 m

Ex. ABCD is a trapezium with AD and BC parallel sides, E is a point on BC. The ratio of the area of ABCD to that of ΔAED is

ABCD, AD और BC समानांतर भुजाओं वाला एक समलंब है, E BC पर एक बिंदु है। ABCD के क्षेत्रफल का ΔAED के क्षेत्रफल से अनुपात है

HINTS:

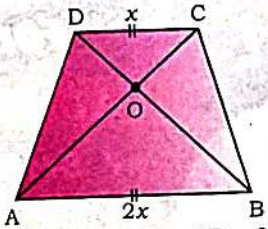


$$\frac{\text{Area of trapezium ABCD}}{\text{Area } \Delta AED} = \frac{\frac{1}{2}(AD + BC) \times h}{\frac{1}{2} AD \times h} = \frac{AD + BC}{AD}$$

Ex. ABCD is a trapezium in which AB || DC and AB = 2CD. The diagonals AC and BD meet at O. the ratio of area of triangle AOB and COD is

ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें AB || DC है और AB = 2CD। विकर्ण AC और BD बिंदु O पर मिलते हैं। त्रिभुज AOB और COD के क्षेत्रफल का अनुपात है

HINTS:



Let CD = x then AB = 2 CD = $2x$

ΔCOD ~ ΔAOB

$$\frac{\text{Area } \Delta AOB}{\text{Area } \Delta COD} = \frac{AB^2}{CD^2} = \frac{(2x)^2}{x^2} = 4$$

@Baka_260

Ex. The ratio of the length of the parallel sides of a trapezium is 3 : 2. The shortest distance between them is 15 cm. if the area of the trapezium is 450 cm², the sum of the length of the parallel sides is

एक समलंब चतुर्भुज की समानांतर भुजाओं की लंबाई का अनुपात 3 : 2 है। उनके बीच की न्यूनतम दूरी 15 सेमी है। यदि समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 450 सेमी² है, तो समानांतर भुजाओं की लंबाई का योग है

HINTS:

$450 = \frac{1}{2}(2x + 3x) \times 15$

$5x = 30 \times 2 \Rightarrow x = 12$

∴ Sum of the length of the parallel sides

$= 5x = 5 \times 12 = 60$ cm

Ex. A wall is of the form of a trapezium with height 4m and parallel sides being 3m and 5m. What is the cost of painting the wall, if the rate of painting is Rs. 25 per sq. m?

एक दीवार एक समलम्ब चतुर्भुज के आकार की है जिसकी ऊँचाई 4 मीटर और समानांतर भुजाएँ 3 मीटर और 5 मीटर हैं। दीवार को पेंट करने की लागत क्या है, यदि पेंटिंग की दर रु. 25 प्रति वर्ग मीटर?

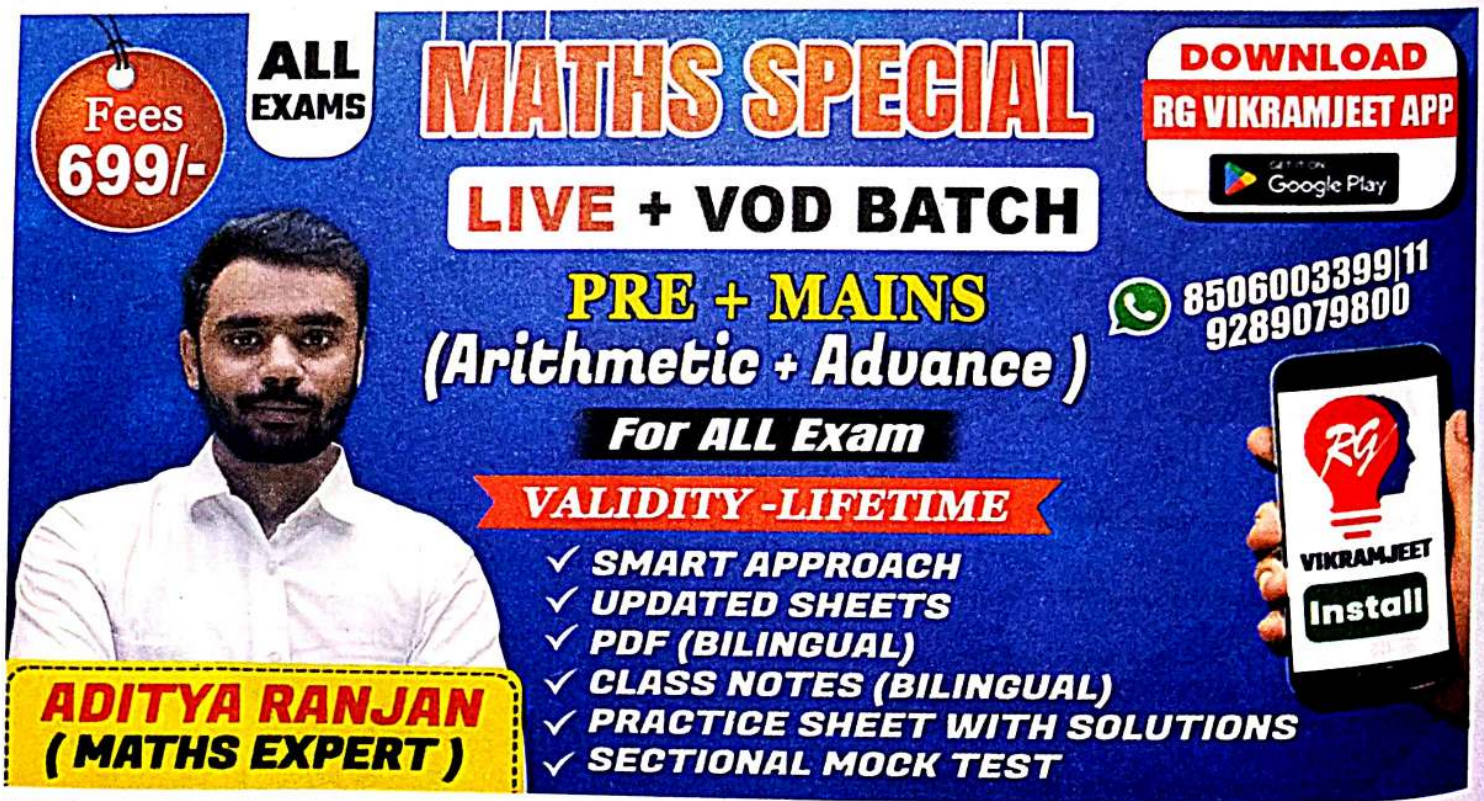
HINTS:

Area of trapezium = $\frac{1}{2}(3 + 5) \times 4 = 16$ m²

Total cost of painting = 16 × 25 = Rs. 400

★★★★★

भारत के किसी भी Competitive Exam (प्रतियोगी परीक्षा) में गणित (Maths) विषय में शत-प्रतिशत Score करने के लिए RG Vikramjeet App पर Students के Favourite आदित्य सर के Recorded Batch में आज ही enroll करें।



MENSURATION 3D

त्रिविमीय क्षेत्रमिति

04

Indroduction/परिचय

A 3-D solid is a figure that is not flat, it is three dimensional, namely length, breadth and height or thickness. The flat surface that binds it is called faces. The intersection of surfaces gives us a line known as edge. The intersection of edges gives point known as vertices.

त्रिविमीय ठोस वह आकृति है जो सपाट नहीं है, यह तीन आयामी है, अर्थात् लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई या मोटाई। वह सपाट सतह जो इसे बांधती है, फलक कहलाती है। फलकों का प्रतिच्छेदन हमें एक रेखा देता है जिसे किनारा कहा जाता है। किनारों के प्रतिच्छेदन से एक बिंदु मिलता है जिसे शीर्ष कहा जाता है।

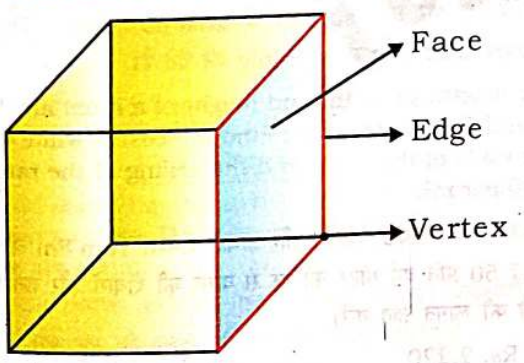
Euler derives a law to establish relationship between number of vertices, faces and edges. It states that number of vertices plus the number of faces in every 3-D solid will will always equal to number of edges plus two. If V, F and E denotes the number of vertices, faces and edges respectively then, by Euler's law

यूलर ने शीर्षों, फलकों और किनारों की संख्या के बीच संबंध स्थापित करने के लिए एक नियम निकाला। इसमें कहा गया है कि प्रत्येक त्रिविमीय ठोस में शीर्षों की संख्या और फलकों की संख्या हमेशा किनारों की संख्या में दो जोड़ने पर प्राप्त योगफल बराबर होगी। यदि V, F और E क्रमश: शीर्षों, फलकों और किनारों की संख्या दर्शाते हैं, तो यूलर के नियम के अनुसार

$$V + F = E + 2$$

Let us consider an example of cube:

इसे घन के उदाहरण के माध्यम से समझते है:



Clearly,

V= 8, F = 6 and E = 12

From Euler's Rule, V+F = 8+6 = E+2 = 12+2 = 14

In general a solid has two types of surface areas:

समान्यत किसी ठोस के सतह का क्षेत्रफल दो प्रकार का होता है।

Lateral Surface Area (LSA) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल

LSA of a solid is the sum of areas of all the surface excluding top and bottom surface.

किसी ठोस का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ऊपरी और निचली सतह को छोड़कर सभी सतहों के क्षेत्रफल का योग होता है।

Total Surface Area (TSA) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

TSA of a solid is the sum of the lateral surface area and the areas of the base amnd the top.

किसी ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल और आधार और शीर्ष के क्षेत्रफलों का योग है।

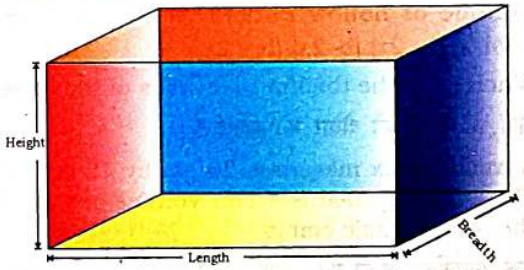
TSA = LSA + Area of top surface + Area of bottom surface

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + ऊपरी सतह का क्षेत्रफल + निचली सतह का क्षेत्रफल

Cuboid/घनाभ

A cuboid is a rectangular solid object having six rectangular surfaces. It is sometimes also called as rectangular parallelopiped.

घनाभ एक आयताकार ठोस है जिसमें छह आयताकार सतहें होती हैं। इसे कभी-कभी आयताकार समानान्तर चतुर्भुज भी कहा जाता है।



For a cuboid with base length (l), breadth (b) and height (h)

लंबाई (l), चौड़ाई (b) और ऊंचाई (h) वाले घनाभ के लिए

(i) Lateral Surface Area /पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(l + b)h$

(ii) Total Surface Area/कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(lb + bh + hl)$

(iii) Volume of Cuboid/घनाभ का आयतन

$= l \times b \times h$

(iv) Diagonal of Cuboid/घनाभ का विकर्ण

$= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

Note:- Length of longest rod that can be placed in the room/किसी कमरे में रखी जा सकने वाली सबसे बड़ी छड़ की लम्बाई = Diagonal विकर्ण

- Relation between area of faces and volume

फलकों के क्षेत्रफल और आयतन में सम्बंध

$$\text{Volume} = \sqrt{A_1 \times A_2 \times A_3}$$

Ex. The areas of three adjacent faces of a cuboid are 32 cm^2, 24cm^2 and 48cm^2. Find the volume of cuboid.

एक घनाभ के तीन आसन्न फलकों का क्षेत्रफल 32 सेमी², 24 सेमी² और 48 सेमी² है। घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए?

HINTS:

$$\text{Volume} = \sqrt{32 \times 24 \times 48} = 192 \text{ cm}^3$$

- Relation between diagonal and total surface area of a cuboid

घनाभ के विकर्ण और कुल पृष्टीय क्षेत्रफल में सम्बंध

$(l + b + h)^2 = l^2 + b^2 + h^2 + 2(lb + bh + hl)$

(Sum of dimensions)² = (Diagonal)² + Total Surface Area

(विमाओं का योगफल)² = (विकर्ण)² + (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)

Ex. The sum of length, breadth and height of a cuboid is 20 cm. If the length of the diagonal is 12 cm, then find the total surface area of the cuboid.

एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई का योग 20 सेमी है। यदि विकर्ण की लंबाई 12 सेमी है, तो घनाभ का कुल सतह क्षेत्रफल ज्ञात करें।

HINTS:

$(20)^2 = 12 \times 12 + 2(lb + bh + hl)$

Total Surface Area = 256 cm^2

- Volume of hollow cuboid/खोखले घनाभ का आयतन $= lbh - (l - 2x)(b - 2x)(h - 2x)$

Where, x is the thickness of walls of the cuboid

जहाँ, x घनाभ की दीवार की मोटाई है

Ex. A wooden box measures 20 cm by 12 cm by 10 cm. Thickness of wood is 1 cm. Volume of wood to make the box (in cubic cm) is

एक आयताकार बक्से की विमाएँ क्रमशः 20 सेमी × 12 सेमी × 10 सेमी है। लकड़ी की मोटाई 1 सेमी- है। बक्से को बनाने में लगी लकड़ी का आयतन ज्ञात करें।

HINTS:

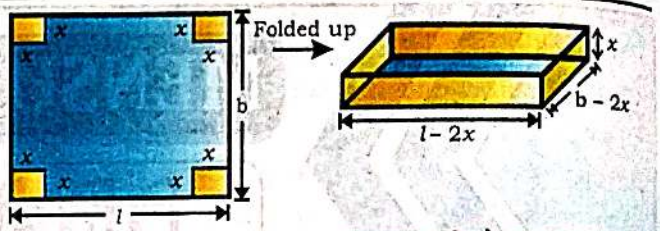
Volume of hollow cuboid/खोखले घनाभ का आयतन $= 20 \times 12 \times 10 - (20 - 2)(12 - 2)(10 - 2) = 960$

- Making a box from rectangular sheet

आयताकार शीट से खुला डिब्बा बनाना

We can make an open rectangular box by cutting off equal squares of side x unit at four corners and the remainder is folded up

चारों कोनों से बराबर भुजा x इकाई का वर्ग काटने के बाद शेष को मोड़कर हम एक खुला आयताकार डिब्बा बना सकते हैं



Volume of rectangular box/आयताकार डिब्बे का आयतन

$= (l - 2x)(b - 2x)x$

Ex. From the four corners of a rectangular sheet of dimensions 25 cm × 20 cm, square of side 2 cm is cut off from four corners and a box is made. The volume of the box is

25 सेमी × 20 सेमी आयाम वाली एक आयताकार शीट के चारों कोनों से 2 सेमी भुजा वाला वर्ग काट दिया जाता है और एक बॉक्स बनाया जाता है। बॉक्स का आयतन है

HINTS:

Volume of rectangular box

$= (25 - 2 \times 2)(20 - 2 \times 2) \times 2 = 672 \text{ cm}^3$

Ex. A square of side 3 cm is cut off from each corner of a rectangular sheet of length 24 cm and breadth 18 cm and the remaining sheet is folded to form an open rectangular box. The surface area of the box is

चारों कोनों से 3 सेमी भुजा वाला वर्ग एक 24 सेमी लंबे तथा 18 सेमी-चौड़े आयताकार शीट से काट दिया गया तथा शेष भाग को मोड़कर एक खुला बक्सा बनाया गया। बक्से का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

HINTS:

Surface area of the open box

$(l - 2x)(b - 2x) + 2(b - 2x)(x) + 2(x)(l - 2x)$

$= (24 - 2 \times 3)(18 - 2 \times 3) + 2(18 - 2 \times 3)(3) + 2(3)(24 - 2 \times 3)$

$= 18 \times 12 + 6 \times 12 + 6 \times 18$

$= 216 + 72 + 108 = 396 \text{ cm}^2$

Note: जिस प्रकार इस Question में Box open है तो upper surface का area (lb) छोड़ देते है, उसी प्रकार यदि किसी कमरे को paint कराने की लागत पूछा जाय तो फर्श (Floor) का area (lb) को छोड़ देते है और सभी surface के area ($lb + 2bh + 2hl$) में per square unit cost से multiply कर देते है।

Ex. The length, breadth, and height of a room are 10 m, 8 m and 6 m respectively. Find the cost of white washing the walls of the room and the ceiling at the rate of Rs. 7.50 per m^2.

एक कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 10m 8m और 6m है। Rs.7.50 प्रति वर्ग मीटर की दर से कमरे की दीवारों और छत पर सफेदी करने की लागत ज्ञात करें।

(a) Rs. 2,220 (b) Rs. 1,850

(c) Rs. 2,150 (d) Rs. 2,000

HINTS:

Area = $(10 \times 8 + 2 \times 8 \times 6 + 2 \times 6 \times 10) = 296 \text{ m}^2$

cost of white washing = 296×7.5 = Rs.2220

यहाँ ध्यान देना आवश्यक है कि सम्पूर्ण Mesuration में यदि per sequare unit cost कोई prime number अथवा prime number का multiple है तो अंतिम उत्तर भी उसी prime number का multiple होगा, यदि 9 या 9 का multiple है तो correct answer का digit sum 9 होगा।

उपर्युक्त उदाहरण में 7.5 prime number 3 का एक multiple है इसलिए अंतिम उत्तर भी 3 का एक multiple होगा। दिए गए विकल्पों में से (a) Rs.2220 ही 3 का multiple है।

A rectangular tank is 'l' metres long and 'h' metres deep. If 'x' cubic metres of water be draw in off the tank, the level of the water in the tank goes down by 'd' metres, then the amount of water (in cubic metres) the tank can hold is given by $\left(\frac{x \times h}{d}\right)$ cubic metres and the breadth of the tank is $\left(\frac{x}{ld}\right)$ metres.

एक आयताकार टैंक 'l' मीटर लंबा और 'h' मीटर गहरा है। यदि टैंक से 'x' घन मीटर पानी निकला जाता है, तो टैंक में पानी का स्तर 'd' मीटर कम हो जाता है, तो टैंक में रखे जा सकने वाले पानी की मात्रा (घन मीटर में) $\left(\frac{x \times h}{d}\right)$ घन मीटर होती है तथा टंकी की चौड़ाई $\left(\frac{x}{ld}\right)$ मीटर होती है।

Ex. A rectangular tank is 50 metres long and 29 metres deep. If 1000 cubic metres of water be drawn off the tank, the level of the water in the tank goes down by 2 metres. How many cubic metres of water can the tank hold? And also find the breadth of the tank.

एक आयताकार टैंक 50 मीटर लंबा और 29 मीटर गहरा है। यदि टैंक से 1000 घन मीटर पानी निकाला जाता है, तो टैंक में पानी का स्तर 2 मीटर कम हो जाता है। टैंक कितने घन मीटर पानी रख सकता है? और टैंक की चौड़ाई भी ज्ञात करें।

HINTS:

Volume of the tank = $\frac{1000 \times 29}{2}$ = 14500 cub m.

Note: We may conclude that even if the length of the rectangular tank is not given. Volume of the tank can be calculated. To find breadth of the tank length is needed but not the height of the tank.

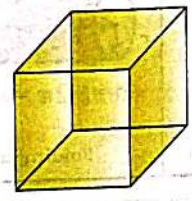
नोट: हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि भले ही आयताकार टैंक की लंबाई नहीं दी गई हो। टैंक के आयतन की गणना की जा सकती है। टैंक की चौड़ाई ज्ञात करने के लिए लंबाई की आवश्यकता है लेकिन टैंक की ऊंचाई की नहीं।

∴ Breadth of the tank = $\frac{1000}{50 \times 2}$ = 10 metres.

Cube/घन

A solid object having all the six surfaces are square is known as cube. Thus, length, breadth and height of a cube are equal.

एक ठोस जिसकी सभी छह सतहें वर्गाकार हों, घन कहलाती है। इस प्रकार, एक घन की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई बराबर है।



Consider 'a' is the side of the cube.

मान लें कि 'a' घन की भुजा है

(i) Lateral Surface Area/पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4a^2$

(ii) Total Surface Area/कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

(iii) Volume/आयतन = a^3

(iv) Diagonal/ विकर्ण = $\sqrt{3}a$

Ex. Six cubes, each of edge 2 cm, are joined end to end. What is the total surface area of the resulting cuboid in cm^2 ?

6 घन, जिनका प्रत्येक का फलक 2 सेमी है, सभी को फलकों के अनुरूप जोड़े जाते है, परिणामी घनाभ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?

HINTS:

$l = 2 \times 6 = 12$ cm, b = 2 cm & h = 2 cm

∴ T.S.A. = $2[(12 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 12)] = 104\ cm^2$

Ex. Four solid cubes, each of volume 1728 cm^3, are kept in two rows having two cubes in each row. They form a rectangular solid with square base. The total surface area (in cm^2) of the resulting solid is:

प्रत्येक 1728 सेमी^{3} आयतन वाले चार ठोस घनों को दो पंक्तियों में रखा जाता है और प्रत्येक पंक्ति में दो घन रखे जाते हैं। उनसे वर्गाकार आधार वाला आयताकार ठोस बनता है। परिणामी ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी^{2} में) ज्ञात करें।

HINTS:

Side of each cube = $\sqrt[3]{1728}$ = 12 cm

$l = 12 \times 2 = 24$ cm, b = $12 \times 2 = 24$ cm & h = 12 cm

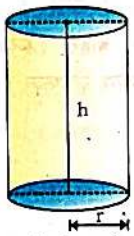
∴ T.S.A. = $2[(24 \times 24) + (24 \times 12) + (12 \times 24)]$

= $2[(576 + 288 + 288)] = 2304\ cm^2$

Right Circular Cylinder/समवृत्तीय बेलन

A solid which has uniform circular cross-section is called a cylinder (or, a right circular cylinder)

एक ठोस जिसका अनुप्रस्थ काट सम वृत्ताकार होता है, उसे बेलन (या लंब लम्ववृत्तीय बेलन) कहा जाता है।



Let r be the radius of circular cross-section and h be the height of cylinder, then

मान लीजिए r वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट की त्रिज्या है और h बेलन की ऊंचाई है, तो

(i) Area of cross-section/ अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल = πr^2

(ii) Perimeter (circumference) of cross-section/अनुप्रस्थ काट की परिधि = $2\pi r$

(iii) Curved Surface area/वक्र (पार्श्व) पृष्ठीय क्षेत्रफल = Perimeter of cross-section/अनुप्रस्थ काट का परिमाप × height/ऊंचाई = $2\pi rh$

(iv) Total Surface area सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = Curved surface area वक्र (पार्श्व) पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × Area of cross-section/अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

= $2\pi rh + 2(\pi r^2) = 2\pi r(r + h)$

(v) Volume/आयतन = Area of cross-section/अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल × height/ऊंचाई

Hollow Cylinder/खोखला बेलन



(i) Curved Surface Area/पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi Rh = 2\pi h(R + r)$

(ii) Total Surface Area/कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi h(R + r) + 2\pi(R^2 - r^2)$

(iii) Volume of material of hollow Cylinder

खोखले बेलन में उपयोग किए गए पदार्थ का आयतन

$= \pi(R^2 - r^2)h$

(iv) Mass (weight) of hollow cylinder/खोखले बेलन का द्रव्यमान (भार)

= Density × Volume of material/घनत्व × पदार्थ का आयतन

Ex. A hollow cylinder is made up of steel. The difference in its outer and inner CSA is 132 cm^2. Height of cylinder is 21 cm and sum of its inner and outer radius is also 21 cm. find the TSA of the hollow cylinder (in cm^2).

एक खोखला बेलन स्टील का बना है। इसके बाहरी और भीतरी पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल में अंतर 132 सेमी^{2} है। बेलन की ऊंचाई 21 सेमी है और इसकी आंतरिक और बाहरी त्रिज्या का योग भी 21 सेमी है। खोखले बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी^{2} में) ज्ञात करें।

HINTS:

We have,

$2\pi h(R - r) = 132$

$\Rightarrow R - r = 1$

Also, $R + r = 21$ cm (given)

$\Rightarrow R = 11$ cm, $r = 10$ cm

So,

TSA of hollow cylinder $= 2\pi h(R + r) + 2\pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi(R + r)[h + R - r]$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21\ [21+1]$

$= 6 \times 22 \times 22 = 2904\ cm^2$

(i) If curved surface area (c) and volume (v) are given then ratio of radius to height

यदि पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (c) तथा आयतन (v) दिए हो तो त्रिज्या का ऊंचाई से अनुपात

$$\frac{r}{h} = \frac{8\pi V^2}{c^3}$$

Ex. The curved area of a cylindrical pillar is 264 m^2 and its volume is 924 m^3. $\left(\text{Taking } \pi - \frac{22}{7}\right)$ Find the ratio of its diameter to its height.

एक बेलनाकार स्तंभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल 264 m^2 है और इसका आयतन 924 m^3 है। $\left(\text{Taking } \pi - \frac{22}{7}\right)$ इसके व्यास और इसकी ऊँचाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$$\frac{\text{Diameter}}{\text{Height}} = \frac{2r}{h} = \frac{2 \times 8\pi V^2}{(CSA)^3} = \frac{2 \times 8 \times 22 \times 924 \times 924}{7 \times 264 \times 264 \times 264} = \frac{7}{3}$$

(ii) If curved surface area (c) and height (h) are given the volume of cylinder/ यदि पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (c) तथा ऊंचाई (h) दिए हो तो बेलन का आयतन

$$V = \frac{c^2}{4\pi h}$$

Ex. A right circular cylinder of height 16 cm is covered by a rectangular tin foil of size 16cm × 22 cm. The volume of the cylinder is:

16 सेमी ऊंचाई का एक लंब वृत्ताकार बेलन 16 सेमी × 22 सेमी आकार के एक आयताकार टिन की पतली पन्नी से ढका हुआ है। बेलन का आयतन है:

HINTS:

If tin foil covered cylinder then curved surface area of cylinder is equal to area of tin foil.

C.S.A. = 16cm × 22cm

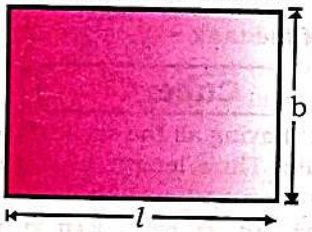
h = 16cm

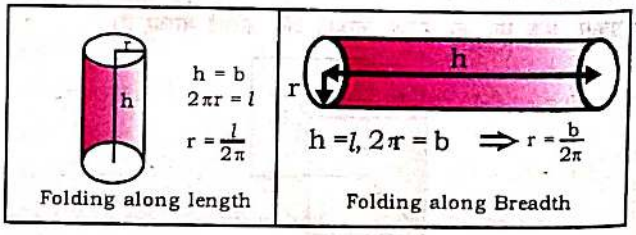
$$\text{Volume} = \frac{C^2}{4\pi h} = \frac{16 \times 22 \times 16 \times 22 \times 7}{4 \times 22 \times 16} = 616\ cm^3$$

Folding and revolving a rectangular sheet

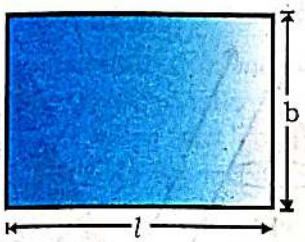
आयताकार शीट को मोड़ना और घुमाना

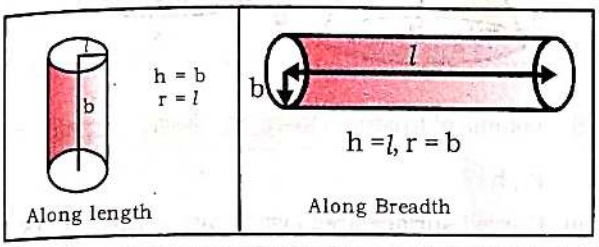
Rectangular sheet to be fold





Rectangular sheet to be revolve





Ex. A rectangular paper sheer of dimensions 22 cm × 12 cm is folded in the form of a cylinder along its length. What will be the volume of this cylinder?

$\left(\text{Take}\,\pi = \frac{22}{7}\right)$

22 सेमी × 12 सेमी आयाम वाली एक आयताकार कागज की शीट को उसकी लंबाई के साथ एक बेलन के रूप में मोड़ा जाता है। इस बेलन का आयतन कितना होगा?

$\left(\text{Take}\,\pi = \frac{22}{7}\right)$

HINTS:

$2\pi r = 22$

$r = \frac{22\times 7}{2\times 22} = \frac{7}{2}$ cm., h = 12 cm

$\Rightarrow V = \pi r^2 h = \frac{22}{7}\times\frac{49}{4} \times 12 = 462$

Ex. A figure is formed by revolving a rectangular sheet of dimesions 7 cm × 4 cm about its length. What is the volume of the figure. thus formed?

7 सेमी × 4 सेमी आयाम वाली एक आयताकार शीट को उसकी लंबाई के परित: घुमाने पर एक आकृति बनती है। इस प्रकार गठित आकृति का आयतन कितना हैं?

HINTS:

h = 7 cm

r = 4 cm

volume = $\pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 7 = 352\ cm^3$

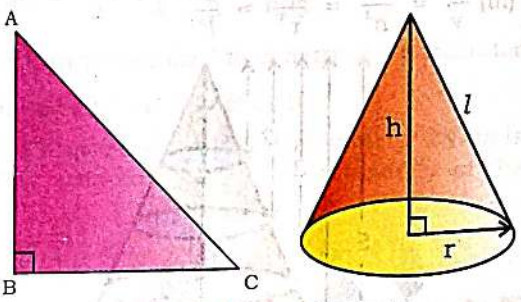
Right Circular Cone/सम वृत्तीय शंकु

The solid obtained by revolving a right-angled triangle about oneb of its sides (other than hypotenuse) is called a cone or right circular cone.

किसी समकोण त्रिभुज को उसकी किसी एक भुजा (कर्ण के अतिरिक्त) के परित: परिक्रमण करने पर प्राप्त ठोस को शंकु या लंब वृत्तीय शंकु कहते हैं।

Let the right angled triangle ABC be revolved about its side AB to form a cone; then AB is the height (h) of the cone formed, BC is the radius (r) of its base and AC is the slant height(*l*).

मान लीजिए कि एक शंकु बनाने के लिए समकोण त्रिभुज ABC को उसकी भुजा AB के चारों ओर घुमाया जाता है; तब AB बने शंकु की ऊंचाई (h) है, BC इसके आधार की त्रिज्या (r) है और AC तिरछी ऊंचाई (*l*) है।



(i) Slant height/तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

(ii) Curved Surface Area/ पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l$

(iii) Total Surface area/कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r(r + l)$

(iv) Volume/आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Ex. The volume of a conical tent is 1232 m^3 and the area of its base is 154 sq.m. Find the length of the canvas required to build the tent, if the width of canvas is 2 m.

एक शंक्वाकर टैंट जो कपड़े से बनाया गया है उसका आयतन 1232 $मी^3$ है तथा आधार का क्षेत्रफल 154 $मी^2$ है। अगर कपड़े की चौड़ाई 2 मी है तो टैंट बनाने के लिए कितने लंबे कपड़े की जरूरत होगी।

HINTS

$\pi R^2 = 154\ m^2 \quad \Rightarrow R = 7m$

& $\frac{1}{3}\pi R^2 h = 1232\ m^3 \quad \Rightarrow \frac{h}{3} = \frac{1232}{154} \Rightarrow h = 24$ m

$\therefore l = 25$ m

Area of the canvas required to build the tent = $\pi r l$

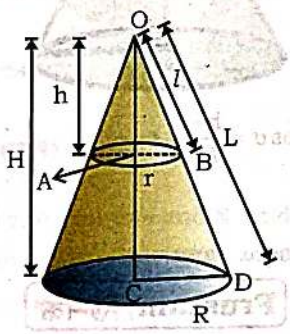
Which will equal to the area of the rectangular canvas.

$\frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 2 \times$ Length of the canvas

Length of the canvas = 275 m

All triangles formed by cutting cone are similar to each other.

शंकु को काटने से बने सभी त्रिभुज एक दूसरे के समरूप होते हैं।



(i) $\Delta OCD \sim \Delta OAB (\angle A = \angle C = 90°, \angle O = \angle O)$

$\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = \frac{L}{l}$ or $\frac{H}{R} = \frac{h}{r}$

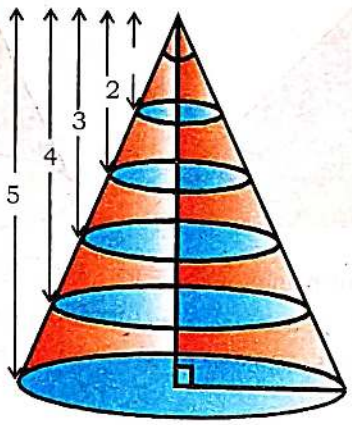
☞ Let V is volume of larger cone and v is volume of smaller cone

(माना, V बड़े शंकु का आयतन तथा v छोटे शंकु का आयतन है)

(ii) $\frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2H}{\frac{1}{3}\pi r^2h} = \frac{R^2H}{r^2h}$

(iii) $\frac{V}{v} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{R^3}{r^3} \Rightarrow \frac{L^3}{l^3}$

(ii)



CSA of 5 parts of cone/शंकु के 5 भागों के क्षेत्रफल का अनुपात

$1^2 : 2^2 - 1^2 : 3^2 - 2^2 : 4^2 - 3^2 : 5^2 - 4^2$

$= 1 : 3 : 5 : 7 : 9$

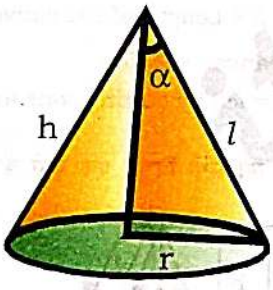
Volume of 5 parts of cone/शंकु के 5 भागों के आयतन का अनुपात

$1^3 : 2^3 - 1^3 : 3^3 - 2^3 : 4^3 - 3^3 : 5^3 - 4^3$

$= 1 : 7 : 19 : 37 : 61$

✍ If S denotes the area of the curved surface area of a right circular cone of h height and semivertical angle α then S equals ?

S किसी शंकु के वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल को व्यक्त करत है, तथा h ऊँचाई के और α अर्ध शीर्ष कोण को व्यक्त करता है तब S का मान होगा?



$\tan\alpha = \frac{r}{h}$, $\cos\alpha = \frac{h}{l}$

$r = h\tan\alpha$

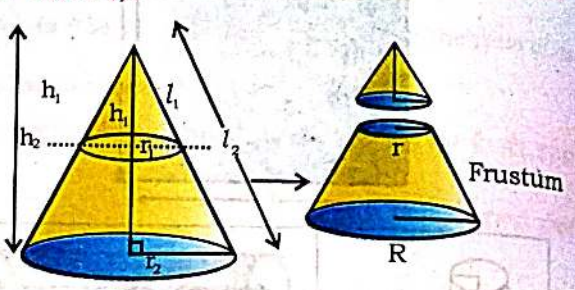
$l = h\sec\alpha$

$S = \pi rl = \pi h^2 \sec\alpha . \tan\alpha$

Frustum/छिन्नक

If a cone is cut by a plane parallel to its base, the portion of solid between this plane and the base is known as frustum of the cone.

(जब एक शंकु को इसके आधार के समान्तर काटा जाता है तो नीचे वाला भाग छिन्नक कहलाता है)।



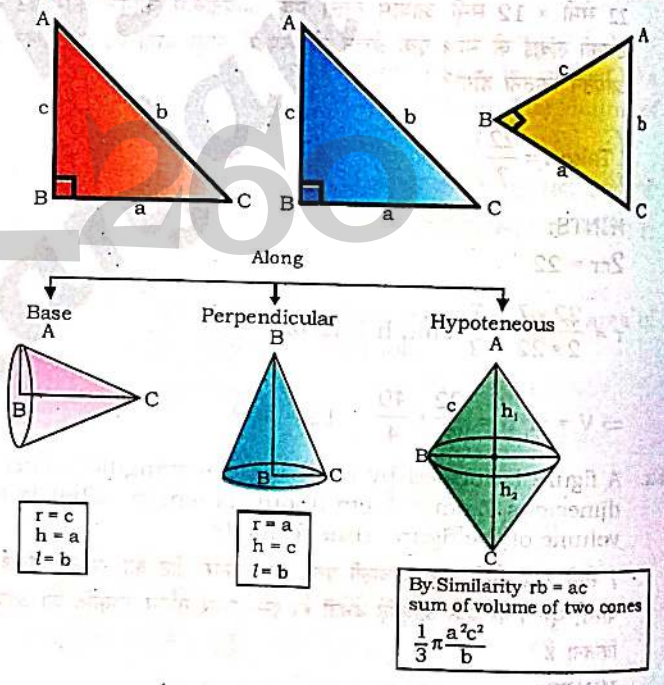
(i) Volume of frustum (छिन्नक का आयतन) $= \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)\,h$

(ii) Curved surface area (पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल) $= \pi(R + r)l$

(iii) Total surface area (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)

$= \pi l(R + r) + \pi (R^2 + r^2)$ Where $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

✍ Rotation of a right anlged triangle. (समकोण त्रिभुज के घुमाने पर बने शंकु)



Ex. A right ΔABC with sides 5 cm, 12 cm and 13 cm is revolved about the side 12 cm. What is the volume of the solid so obtained?

5 सेमी, 12 सेमी और 13 सेमी भुजाओं वाली एक दायीं ΔABC सेमी भुजा के चारों ओर घूमती है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन क्या है?

HINTS:

r = 5 cm

h = 12 cm

Volume of cone $= \frac{1}{3}\pi r^2h$

$= \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 = 100\,\pi cm^3$

@Baka_260

Cone formed by rolling up a sector

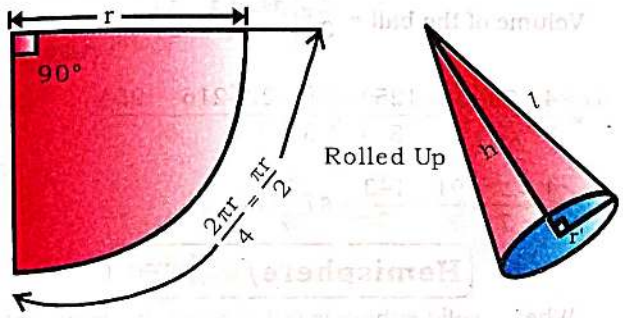
त्रिज्यखंड को घुमाने पर बना शंकु

When a sector is rolled up in such a way that the two binding radii are joined together then a cone generates.

(जब किसी त्रिज्यखंड को इस प्रकार घुमाया जाता है कि इसकी दो त्रिज्याएं जुड़ जाती है, तो एक शंकु का निर्माण होता है।)

1. A right angled sector of radius a cm is rolled up into a cone

(a सेमी त्रिज्या के एक समकोणीय त्रिज्यखंड को घुमाकर बना शंकु)



$\Rightarrow 2\pi r' = \frac{\pi r}{2} \Rightarrow r' = \frac{r}{4}$ & $l = r$

Height of cone (शंकु की ऊंचाई) (h)

$= \sqrt{l^2 - r'^2}$

$= \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{16}} = \frac{\sqrt{15}r}{4}$

Curved surface area of cone = Area of sector = $\frac{\pi r^2}{4}$

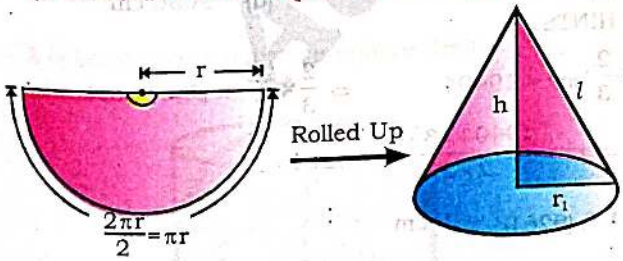
शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2}{4}$

Volume of cone/शंकु का आयतन

$= \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{r}{4}\right)^2 \times \frac{\sqrt{15}r}{4} = \frac{\sqrt{15}\pi r^3}{192}$

2. A semicircular sector of radius r cm is rolled into a cone.

(r सेमी त्रिज्या के किसी अर्धवृत्ताकार त्रिज्यखंड को घुमाने से बना शंकु)



Height of cone शंकु की ऊंचाई (h)

$= \sqrt{l^2 - r_1^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}r}{2}$

Curved surface area of cone = Area of sector = $\frac{\pi r^2}{2}$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2}{2}$

Volume of cone (शंकु का आयतन)

$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{1}{3}\pi \times \frac{r^2}{4} \times \frac{\sqrt{3}r}{2} = \frac{\pi r^3}{8\sqrt{3}}$

Note: Canvas required to construct a conical tent = Curved surface area of cone

Ex. A semicircular sheet of metal of diameter 28 cm is bent into an open conical cup. The capacity of the cup $\left(\text{use } \pi = \frac{22}{7}\right)$ is:

28 सेमी व्यास वाली धातु की एक अर्धवृत्ताकार शीट। एक खुले शंक्वाकार कप में मुड़ी हुई है। कप की क्षमता $\left(\text{use } \pi = \frac{22}{7}\right)$ है:

HINTS:

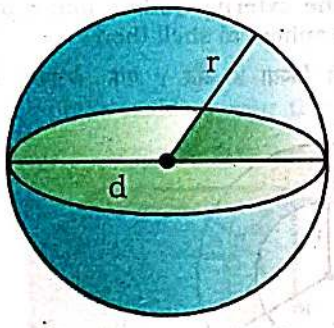
Capacity of cup = $\frac{\pi r^3}{8\sqrt{3}} = \frac{22 \times 14 \times 14 \times 14}{7 \times 8 \times 1.7}$

$= 622.36 \text{ cm}^3$

Sphere/गोला

A sphere is a solid obtained on revolving a circle about any diameter of it.

गोला अपने किसी भी व्यास के चारों ओर एक वृत्त को घुमाने पर प्राप्त एक ठोस है।



Surface area (पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $4\pi r^2$

Volume (आयतन) = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Let v_1 and v_2 be volume and S_1 and S_2 be area of two sphere then

माना v_1 तथा v_2 और S_1 तथा S_2 दो गोले के आयतन और क्षेत्रफल हैं।

$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{3/2}$ or $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{2/3}$

@Baka_260

Ex. The surface area of two spheres are in the ratio 4 : 9. Their volumes will be in the ratio.

दो गोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात 4 : 9 है। उनके आयतन का अनुपात होगा।

HINTS:

$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{3/2}=\left(\frac{4}{9}\right)^{3/2}=\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{3/2}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$$

Ex. The rartio of weights of two spheres of different materials is 8 : 17 and the ratio of weights per 1c of materials of each is 289 : 64. The rartio radii of the two spheres is:

विभिन्न सामग्रियों के दो गोले के वजन का अनुपात 8 : 17 है और प्रत्येक के प्रति 1c सामग्री के वजन का अनुपात 289 : 64 है। दोनों क्षेत्रों का अनुपात त्रिज्या है:

HINTS:

$$\text{Density} = \frac{\text{Mass}}{\text{Volume}}$$

$$\text{Ratio of the volumes of sphere} = \frac{\frac{8}{289}}{\frac{17}{64}} = \frac{8\times 64}{289\times 17}$$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3}=\frac{8\times 8\times 8}{17\times 17\times 17}\Rightarrow \frac{r_1^3}{r_2^3}=\left(\frac{8}{17}\right)^3\Rightarrow \frac{r_1}{r_2}=\frac{8}{17}$$

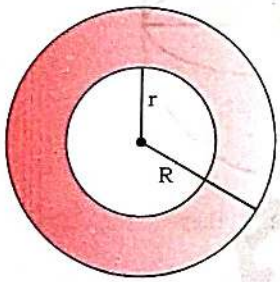
Spherical Shell/खोखला गोला

It is solid encosed between two concentric spheres.

यह दो संकेंद्रित गोलों के बीच घिरा हुआ ठोस है।

Let R be the external radius and r be the internal radius of a spherical shell then

माना R बाहरी त्रिज्या है और r एक गोलाकार कोश की आंतरिक त्रिज्या है, तो



its volume = $\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$ = Volume of material in spherical shell

इसका आयतन = $\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$ = गोलाकार खोल में पदार्थ का आयतन

Total surface area = $4\pi(R^2-r^2)$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi(R^2-r^2)$

Ex. A hollow spherical metallic ball has an external diameter 6cm and is $\frac{1}{2}$ cm thick. The volume of the ball (in cm^3) is $\left(\text{Take}\,\pi=\frac{22}{7}\right)$

एक खोखली गोलाकार धातु की गेंद का बाहरी व्यास 6 सेमी है और मोटाई $\frac{1}{2}$ सेमी है। गेंद के आयतन का मान (सेमी^{3} में) है $\left(\text{Take}\,\pi=\frac{22}{7}\right)$

HINTS:

$$\text{Volume of the ball} = \frac{4}{3}\pi\left[3^3-\left(3-\frac{1}{2}\right)^3\right]$$

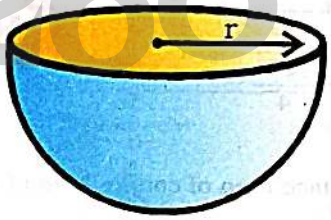
$$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\left(27-\frac{125}{8}\right)=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\left(\frac{216-125}{8}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{91}{8}=\frac{143}{3}=47\frac{2}{3}\,cm^3$$

Hemisphere/अर्द्धगोला

When a solid sphere is cut through its center into two equal (identical) piece, each piece is called a hemisphere.

जब एक ठोस गोले को उसके केंद्र से दो बराबर (समान) टुकड़ों में काटा जाता है, तो प्रत्येक टुकड़े को गोलार्द्ध अथवा अर्द्धगोला कहा जाता है।



(i) Curved Surface area (पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $2\pi r^2$

(ii) Total surface area (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $3\pi r^2$

(iii) Volume (आयतन) = $\frac{2}{3}\pi r^3$

Ex. The volume of a solid hemisphere is 19404 cm^3. Its total surface area is:

एक ठोस अर्धगोले का आयतन 19404 सेमी^{3} है। इसका कुल सतह क्षेत्रफल है:

(a) 4158 cm^2 (b) 2858 cm^2

(c) 1738 cm^2 (d) 2036 cm^2

HINTS:

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 19404 \Rightarrow \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times r^3 = 19404$$

$$\Rightarrow r^3=\frac{19404\times 3\times 7}{2\times 22}=9261$$

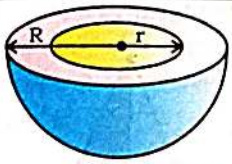
$$r=(9261)^{\frac{1}{3}}=21\,cm$$

$$\therefore \text{Total surface area} = 3\pi r^2 = 3\times\frac{22}{7}\times 21\times 21 = 4158\,cm^2$$

Total surface area is always multiple of 3 and 11. It is only possible for option (a).

@Bakl_260

Hemispherical Shell/अर्द्धगोलीय शेल

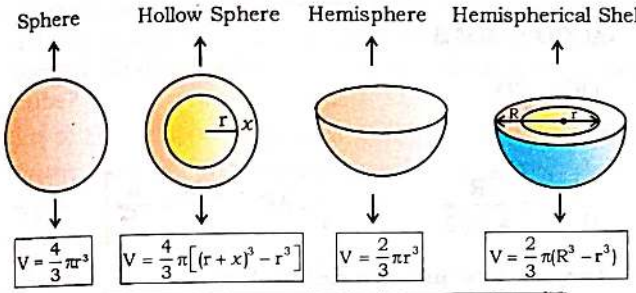


(i) Curved Surface area (पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल)
$= 2\pi(R^2 - r^2)$

(ii) Total surface area (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल) $= 3\pi (R^2 - r^2)$

(iii) Volume (आयतन) $= \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$

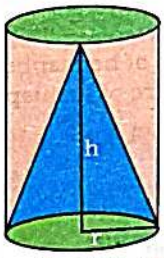
Summary/सारांश



Combination of 3-D Objects
त्रिविमीय आकृतियों का संयोजन

A solid maximum 3-D object inside another 3-D object
किसी त्रिविमीय आकृति के भीतर अधिकतम आयतन की दूसरी त्रिविमीय आकृति

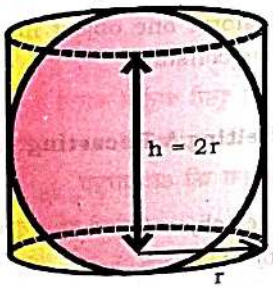
(i) A maximum cone inside a cylinder
बेलन के भीतर अधिकतम आयतन का शंकु



Volume of cylinder/बेलन का आयतन : Volume of cone/शंकु का आयतन

$= \pi r^2 h : \frac{1}{3}\pi r^2 h = 3 : 1$

(ii) A cylinder just encloses a sphere then
बेलन के अन्दर गोला

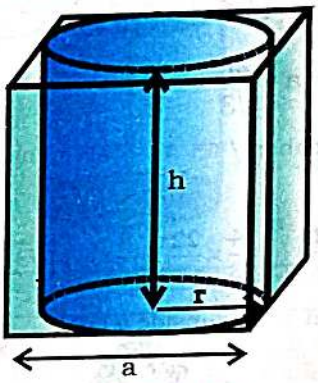


Height of cylinder/बेलन की ऊँचाई
= Diameter of sphere/गोले का व्यास = 2r

Volume of Cylinder/बेलन का आयतन : Volume of Sphere/गोले का आयतन

$= \pi r^2(2r) : \frac{4}{3}\pi r^3 = 2 : \frac{4}{3} = 3 : 2$

(iii) A maximum cylinder inside cube then
घन के भीतर अधिकतम आयतन का बेलन



Radius of cylinder/बेलन की त्रिज्या

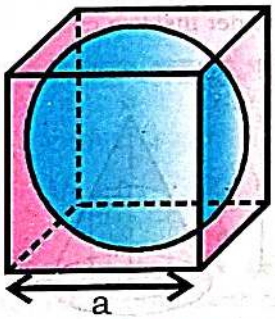
$= \frac{1}{2} \times$ edge of cube $= \frac{a}{2}$

Height of cylinder/बेलन की ऊँचाई = edge of cube/घन का किनारा = a

Volume of cube/घन का आयतन : Volume of cylinder /बेलन का आयतन $= a^3 : \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 a$

$= 1 : \frac{22}{7} \times \frac{1}{4} = 14 : 11$

(iv) A maximum sphere inside a cube then
घन के भीतर अधिकतम आयतन का गोला



Diameter of sphere/गोले का व्यास (2r) = edge of cube/घन की कोर = a

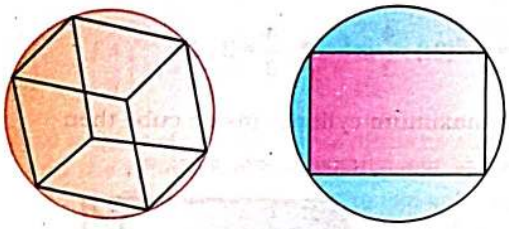
Volume of cube/घन का आयतन : Volume of sphere/गोले का आयतन $= a^3 : \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = 21 : 11$

@Baka 260

(v) A maximum cube inside a sphere

किसी गोले के भीतर अधिकतम आयतन का घन

Diagonal of cube/घन का विकर्ण = Diameter of sphere/गोले का व्यास



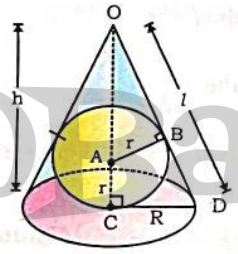
$$\sqrt{3}a = 2r \Rightarrow a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

Volume of sphere/गोले का आयतन : Volume of cube/घन का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 : \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} : \frac{8}{3\sqrt{3}} = 11\sqrt{3} : 7$$

(vi) A maximum sphere inside a cone

किसी शंकु के भीतर अधिकतम आयतन का गोला



then, $\Delta OCD \sim \Delta OBA$

$$\therefore \frac{OD}{OA} = \frac{CD}{AB}$$

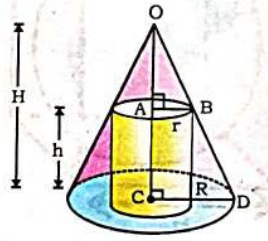
$$\frac{l}{h-r} = \frac{R}{r}$$

$$\Rightarrow l \times r = hR - Rr$$

$$\Rightarrow r = \frac{hR}{l+R}$$

(vii) maximum cylinder inside a cone

किसी शंकु के भीतर अधिकतम आयतन का बेलन



$\Delta OCD \sim \Delta OAB$

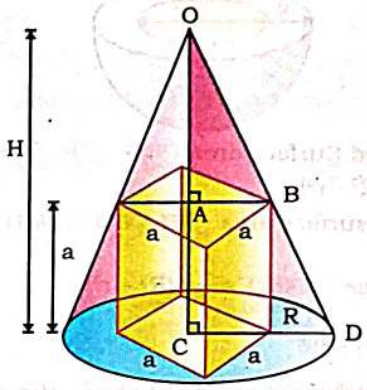
($\angle A = \angle C = 90°$, $\angle O$ common)

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}$$

$$\frac{H}{H-h} = \frac{R}{r}$$

(viii) A maximum cube inside a cone

शंकु के भीतर अधिकतम आयतन का घन



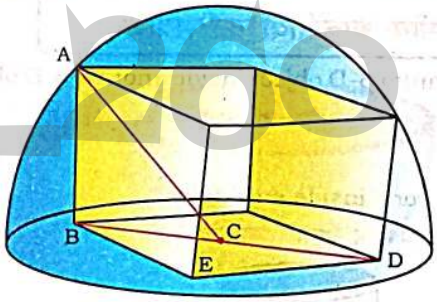
$\Delta OCD \sim \Delta OAB$

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}$$

$$\frac{H}{H-a} = \frac{R}{a/\sqrt{2}} \qquad \left[\therefore AB = \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\right]$$

(ix) Largest cube inside a hemisphere

गोलार्द्ध के अंदर सबसे बड़ा घन



Let R be the radius of hemisphere and x be the side of cube. C is the centre of hemisphere.

माना R अर्द्धगोले की त्रिज्या है और x घन की भुजा है। C गोलार्द्ध का केंद्र है।

$$BD = \sqrt{2}x$$

$$\therefore BC = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

In ΔABC, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$R^2 = \frac{3x^2}{2} \quad \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

When we transform one object into another object, volume remains constant.

जब हम एक वस्तु को दूसरी वस्तु में बदलते हैं, तो आयतन स्थिर रहता है।

(i) **Concept of Melting & Recasting**

पिघलने और पुनर्रचना की अवधारणा

Volume of Melted object/पिघली हुई वस्तु का आयतन = Volume of recasted object/पुनर्रचना के बाद वस्तु का आयतन।

Ex. Two right circular cones of equal height of radii of base 3 cm and 4 cm are melted together and made to a solid sphere of radius 5cm. The height of a cone is:
3 सेमी और 4 सेमी आधार त्रिज्याओं की समान ऊंचाई वाले दो लंवृत्तीय शंकु को एक साथ पिघलाया जाता है और 5 सेमी त्रिज्या वाला एक ठोस गोला बनाया जाता है। एक शंकु की ऊंचाई है:

HINTS:

Volume of two cones = Volume of sphere

$$\frac{1}{3}\pi\times3^2\times h+\frac{1}{3}\pi\times4^2\times h=\frac{4}{3}\pi\times5^3$$

$9h + 16h = 4 \times 125$

$$h=\frac{4\times125}{25}=20\text{ cm}$$

Ex. Three cubes of metal whose edges are 6cm, 8 cm and 10 cm, respectively are melted and a single cube is formed. What is the length of the edge of the newly formed cube?
धातु के तीन घन जिनके किनारे क्रमश: 6 सेमी, 8 सेमी और 10 सेमी हैं, पिघलाए जाते हैं और एक घन बनता है। नवगठित घन के किनारे की लंबाई क्या है?

HINTS:

Volume of recast cube = Sum of volume of three cubes

$a^3 = 6^3 + 8^3 + 10^3 = 216 + 512 + 1000$

$= 1728$

$$\therefore a=(1728)^{\frac{1}{3}}=12\text{cm}$$

NOTE: When many cubes integrate into one cube the side of the new cube is given by
जब कई घन एक घन में एकीकृत हो जाते हैं तो नए घन की भुजा होती है-

$$=\sqrt[3]{\text{Sum of cubes of sides of all the cubes}}$$

Ex. A hollow sphere of intertnal and external diameters 6cm and 10cm respectively is melted into a right circular cone of diameter 8 cm. The height of the cone is:
आंतरिक और बाहरी व्यास क्रमश: 6 सेमी और 10 सेमी वाले एक खोखले गोले को पिघलाकर 8 सेमी व्यास वाले एक लंव वृत्तीय शंकु में बदल दिया जाता है। शंकु की ऊंचाई है:

HINTS:

Volume of cone = Volume of hollow sphere

$$\frac{1}{3}\pi\times4^2\times h=\frac{4}{3}\pi(5^3-3^3)$$

$$h=\frac{125-27}{4}=\frac{98}{4}=\frac{49}{2}=24.5\text{cm}$$

Ex. 12 sphere of the same size are made by melting a solid cylinder of 16 cm diameter and 2 cm height. The diameter of each sphere is:
16 सेमी व्यास और 2 सेमी ऊंचाई के एक ठोस सिलेंडर को पिघलाकर समान आकार के 12 गोले बनाए जाते हैं। प्रत्येक गोले का व्यास है:

HINTS:

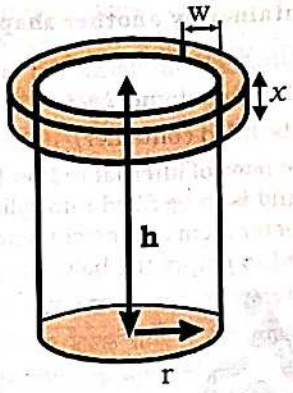
Volume of 12 spheres = Volume of cylinder

$$12\times\frac{4}{3}\pi r^3=\pi\times8^2\times2$$

$$r^3=\frac{64\times2\times3}{12\times4}=8\Rightarrow r=2\text{cm}$$

(ii) **Concept of digging & earth taken out.**
खुदाई और निकाली गई मिट्टी की अवधारणा।

Volume of earth taken out/निकाली गई मिट्टी का आयतन = Volume of ambankment or volume of cuboid cylinder hemisphere/चबूतरे का आयतन अथवा घन /बेलन/ अर्द्धगोले का आयतन।



$$\pi r^2h=\pi[(r+w)^2-r^2]\times x$$

Note: Generally, the soil taken out from a cuboidal or cylindrical well is used to make a platform around the same well or to fill another cuboidal / cuboidal / cylindrical / hemispherical vessel. The volume of the removed soil figure is made equal to the volume of the used soil figure.

नोट: सामान्यत: मिट्टी घनाभाकार अथवा बेलनाकार कुएं से निकाल कर उसी कुएं के चारो ओर चबूतरा बनाने या फिर किसी दूसरे घनाकार / घनाभाकार / बेलनाकार / अर्द्धगोलाकार पात्र को भरने में उपयोग की जाती है। निकाली गई मिट्टी की आकृति के आयतन को उपयोगित मिट्टी की आकृति के आयतन के बराबर कर देते है।

Ex. A well 20 m in diameter is dug 14 m deep and the earth taken out is spread all around it to a width of 5 m to form an embankment. The height of the embankment is:
20 मीटर व्यास वाला एक कुआँ 14 मीटर गहरा खोदा जाता है और निकाली गई मिट्टी को चबूतरा बनाने के लिए उसके चारों ओर 5 मीटर की चौड़ाई में फैला दिया जाता है। चबूतरे की ऊंचाई है:

HINTS:

Volume of embankment = Volume of well (Volume of earth taken out)

$\pi(15^2 - 10^2)\, h = \pi \times 10^2 \times 14$

$$h=\frac{10\times10\times14}{125}=\frac{56}{5}=11.2\text{m}$$

Ex. A field is 125m long and 15m wide. A tank 10 m × 7.5 m × 6 m was dug in it and the Earth thus dug out was spread equally on the remaining field. The level of the field thus raised is equal to which one of the following?
एक मैदान 125 मीटर लंबा और 15 मीटर चौड़ा है। इसमें 10 मीटर × 7.5 मीटर ×6 मीटर का एक टैंक खोदा गया और इस तरह खोदी गई मिट्टी को शेष मैदान पर समान रूप से फैला दिया गया। इस प्रकार मैदान की ऊँचाई में वृद्धि निम्नलिखित में से किसके बराबर है?

@Baka260

HINTS:

Remaining field = Area of field – Area of tank

= 125 × 15 – 10 × 7.5 = 1800

Volume of earth dug = 10 × 7.5 × 6 = 450m³

By given condition, 1800 × h = 450

$h = \frac{450}{1800} = \frac{1}{4}m = \frac{100}{4}$ cm = 25cm

(iii) **Filling a container by another shape container.**

एक पात्र को दूसरे आकार के पात्र से भरना।

Volume of filling container/भरने वाले पात्र का आयतन = Volume of to be filled container/भरे जाने वाले पात्र का आयतन

Ex. A hemishphere bowl of internal radius 15cm contains a liquid. The liquid is to be filted into cylinderical shaped bottles of diameter 5 cm and height 6cm The number of bottles required to empty the bowl is:

15 सेमी आंतरिक त्रिज्या वाले एक अर्धगोले कटोरे में एक तरल पदार्थ है। तरल को 5 सेमी व्यास और 6 सेमी ऊंचाई वाली बेलनाकार आकार की बोतलों में फिल्टर किया जाना है। कटोरे को खाली करने के लिए आवश्यक बोतलों की संख्या है:

HINTS:

Volume of hemispherical bowl =

Number of bottles × Volume of 1 bottle

$= N \times \pi R^2 h = N \times \pi \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times 6$

$N = \frac{2\pi \times 15 \times 15 \times 15}{3 \times \pi \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times 6} = 60$

Ex. The diameter of the base of cylindrical drum is 35dm. and the height is 24 dm. It is full of kerosane. How many tins each of size 25 cm × 22 cm × 35 can be filled with kerosene from the drum? $\left(\text{Use } \pi = \frac{22}{7}\right)$

बेलनाकार ड्रम के आधार का व्यास 35 dm है। और ऊंचाई 24 dm है। इसमें केरोसिन भरा हुआ है। ड्रम से 25 सेमी × 22 सेमी × 35 आकार के कितने टिन मिट्टी के तेल से भरे जा सकते हैं?

HINTS:

$\text{Required number of tins} = \frac{\text{Volume of cylindrical drum}}{\text{Volume of tin}}$

$= \frac{22 \times 350 \times 350 \times 240}{7 \times 2 \times 2 \times 25 \times 22 \times 35} = 1200$

(iv) **Filling or emptying a tank.**

किसी टंकी को भरना या खाली करना।

Volume of water flowing through pipe (Cylindrical / Cuboidal) in t time/t समय में पाइप (बेलनाकार/घनाकार) से बहने वाले पानी का आयतन = Volume of the tank (Cylindrical / Cuboidal)/टैंक (बेलनाकार/घनाकार) का आयतन।

Area of base × speed of flow × time/आधार का क्षेत्रफल × प्रवाह की गति × समय = Volume of the tank (Cylindrical / Cuboidal)/टैंक (बेलनाकार/घनाकार) का आयतन।

(a) $\pi r^2 \times v \times t = \pi R^2 h$ or LBH or $\frac{1}{3}\pi R^2 H$

(b) $l \times b \times v \times t$ = LBH or $\pi R^2 h$

Ex. Water flows through a cylinderical pipe, whose radius is 7cm, at 5 metre per second. The time, it takes to fill an empty water tank, with height 1.54 metres and area of the base (3 × 5) square metres is $\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$

पानी एक बेलनाकार पाइप से पानी, जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है, 5 मीटर प्रति सेकंड की गति से बहता है। 1.54 मीटर ऊंचाई और आधार क्षेत्रफल (3 × 5) वर्ग मीटर वाले एक खाली पानी टैंक को भरने में लगने वाला समय है $\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$

HINTS:

$\pi r^2 (vt)$ = Area of base × height

$\frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 5t = (3 \times 5) \times 1.54$

t = 300 seconds = 5 minutes

Ex. Water flows at the rate of 10 metres per minute from a cylinderical pipe 5 mm in diameter. How long it take to fill up a conical vessel whose diameter at the base is 30 cm and depth 24cm?

5 मिमी व्यास वाले एक बेलनाकार पाइप से 10 मीटर प्रति मिनट की दर से पानी बहता है। एक शंक्वाकार बर्तन, जिसके आधार का व्यास 30 सेमी और गहराई 24 सेमी है, को भरने में कितना समय लगेगा?

HINTS:

$\pi r^2 (vt) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$0.25 \times 0.25 \times 1000t = \frac{1}{3} \times 15 \times 15 \times 24$

$t = \frac{144}{5} = 28\frac{4}{5}$ minutes = 28 min $\frac{4}{5}$ × 60 seconds

= 28 min 48 seconds

Ex. Water is flowing at the rate of 3km/hr through a circular pipe of 20cm internal diameter into a circular cistern of diameter 10m and depth 2m. In how much time will the cistern be filled?

20 सेमी आंतरिक व्यास वाले एक गोलाकार पाइप के माध्यम से 10 मीटर व्यास और 2 मीटर गहराई वाले एक गोलाकार कुंड में पानी 3 किमी/घंटा की दर से बह रहा है। टंकी कितने समय में भर जाएगी?

HINTS:

Water flowed in t hours through the pipe = volume of circular cistern

$\pi r^2 (vt) = \pi R^2 H$

$t = \frac{R^2 H}{r^2 v} = \frac{5 \times 5 \times 2 \times 100 \times 100}{10 \times 10 \times 3000} = \frac{5}{3}$

= 1 hour, $\frac{2}{3}$ × 60 minutes = 1 hour, 40 minutes

Ex. Water flows into a tank which is 200m long and 150m wide, through a pipe of cross-section 0.3m × 2m at 20 km/hour. Then the time (in hours) for the water level in the tank to reach 8m is:

@Baka_260

पानी एक टैंक में बहता है जो 200 मीटर लंबा और 150 मीटर चौड़ा है, 20 किमी/घंटा की गति से 0.3 मीटर × 2 मीटर क्रॉस सेक्शन के पाइप के माध्यम से। फिर टैंक में पानी का स्तर 8 मीटर तक पहुंचने का समय (घंटों में) है।

HINTS:

Let time for the water level in the tank to reach 8cm be t hours

∴ Water supplied by pipe in t hours = Volume of water tank area of cross section × (v × t) = 200 × 150 × 8

$$t = \frac{200 \times 15 \times 8}{3 \times 2 \times 20 \times 10} = 200 \text{ hours}$$

(v) **Concept of inserting an object into another object.**

एक वस्तु को दूसरी वस्तु में डालने की अवधारणा।

Volume of inserted object/डाली गई वस्तु का आयतन = Volume of water/liquid displaced by inserted object/डाली गई वस्तु द्वारा विस्थापित पानी/द्रव का आयतन।

Ex. Two irons sphere each of diameter 6cm are immeresed in the water contained in a cylindrical vessel of radius 6cm. The level of the water in the vessel will be raised by.

6 सेमी व्यास वाले दो लोहे के गोले 6 सेमी त्रिज्या वाले एक बेलनाकार बर्तन में रखे पानी में डाले जाते हैं। बर्तन में पानी का स्तर कितना बढ़ जाएगा?

HINTS:

Volume of two iron sphere = volume of extra cylinder

$$= 2 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \pi \times 6^2 \times h$$

h = 2 cm

Ex. A cylindrical vessel of base radius 14 cm is filled with water to some height. If a rectangular solid of dimensions 22 cm × 7 cm × 5 cm is immersed in it what is the rise in water level?

आधार त्रिज्या 14 सेमी का एक बेलनाकार बर्तन कुछ ऊंचाई तक पानी से भरा हुआ है। यदि 22 सेमी × 7 सेमी × 2 सेमी आयाम वाले एक आयताकार ठोस को इसमें डुबोया जाए तो जल स्तर में कितनी वृद्धि होगी?

HINTS:

Volume of extra cylinder = Volume of rectangular solid

$$\frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times h = 22 \times 7 \times 5$$

$$h = \frac{5}{4} = 1.25 \text{ cm}$$

Ex. A cylindrical tank of diameter 35 cm is full of water. If 11 litres of water is drawn of the water level in the tank will drop by:

$\left(\text{use } \pi = \frac{22}{7}\right)$

35 सेमी व्यास वाला एक बेलनाकार टैंक पानी से भरा है। यदि 11 लीटर पानी निकाला जाए तो टंकी में पानी का स्तर गिर जाएगा:

$\left(\text{use } \pi = \frac{22}{7}\right)$

HINTS:

Volume of extra cylinder = x liter

$\pi r^2 h = x \times 1000 \text{ cm}^3$

$$\frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times h = 11 \times 1000$$

$$h = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7} \text{ cm}$$

Ex. A rectangular tank whose length and breadth are 2.5 m and 1.5 m, respectively is half fill of water. If 750 L more L more warter is poured into the tank, then what is the height through which water level further goes up?

एक आयताकार टैंक जिसकी लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 2.5 मीटर और 1.5 मीटर है, उसमें आधा पानी है। यदि टैंक में 750 लीटर और पानी डाला जाता है, तो वह ऊँचाई कम है जिससे पानी का स्तर और ऊपर चला जाता है?

HINTS:

Volume of extra cuboid = Volume of water

$$2.5 \times 1.5 \times h = \frac{750}{1000} \Rightarrow h = 0.2\text{m} = 20\text{cm}$$

(vi) **Concept of cutting a solid**

ठोस को काटने की अवधारणा

(a) Volume of solid does'nt change

ठोस का आयतन नहीं बदलता है

Ex. A sphere is cut into hemisphere. One of them is used as bowl. It takes 8 bowlfuls of this to fill a conical vessel of height 12cm and radius 6cm. The radius of the cylinder is:

एक गोले को अर्धगोले में काटा जाता है। उनमें से एक का उपयोग कटोरे के रूप में किया जाता है। 12 सेमी ऊंचाई और 6 सेमी त्रिज्या वाले एक शंक्वाकार बर्तन को भरने में इसकी 8 कटोरियां लगती हैं। बेलन की त्रिज्या है:

HINTS:

Volume of 8 hemishpere = Volume of cone

$$8 \times \frac{2}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 12$$

$$r^3 = \frac{6^2 \times 12}{8 \times 2} = \frac{6^2}{8} = \frac{6^3}{2^3}$$

$$\Rightarrow r = \frac{6}{2} = 3\text{cm}$$

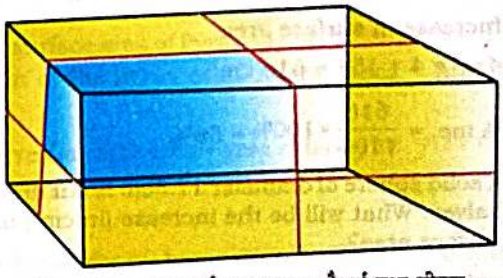
(b) Surface area of solid increases.

ठोस का सतह क्षेत्र बढ़ जाता है।

Ex. A cuboid of size 50 cm x 40 cm x 30 cm is cut into 8 identical parts by 3 cuts. What is the total surface area (in cm^2) of all the 8 parts?

50 सेमी × 40 सेमी × 30 सेमी आकार के एक घनाभ को 3 काट द्वारा 8 समान भागों में काटा जाता है। सभी 8 भागों के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) क्या है?

HINTS:



3 cut अर्थात् पहला cut लम्बाई दूसरा cut चौड़ाई तथा तीसरा cut ऊँचाई का आधा कर देगा।

@Baka_200

i.e., 25cm × 20 cm × 15cm dimension के 8 Cuboid बनेगें।

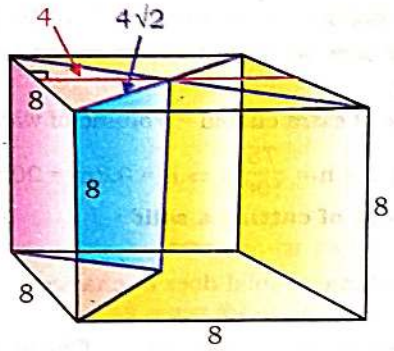
TSA = 8 × 2 (*l*b + bh + h*l*)

= 8 × 2(375 + 300 + 500) = 18,800cm²

Ex. A solid cube has side 8 cm. It is cut along diagonals of top face to get 4 equal parts. What is the total surface area (in cm²) of each part.

एक ठोस घन की भुजा 8 सेमी है। इसे शीर्ष फलक के विकर्ण के समांतर काटकर 4 बराबर भाग प्राप्त किए गए हैं। प्रत्येक भाग के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) क्या है?

HINTS:

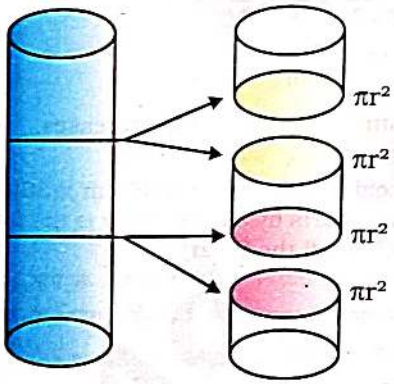


$TSA = 2 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 4 + 8 \times 8 + 8 \times 4\sqrt{2} \times 2 = 96 + 64\sqrt{2}$

Ex. A right circular cylinder has height as 18 cm and radius as 7 cm. The cylinder is cut in three equal parts (by 2 cuts parallel to base). What is the percentage increase in total surface area?

एक लम्ब वृत्तीय बेलन की ऊँचाई 18 सेमी और त्रिज्या 7 सेमी है। बेलन को तीन बराबर भागों में काटा जाता है (आधार के समानांतर 2 कटों से)। कुल सतह क्षेत्र में प्रतिशत वृद्धि क्या है?

HINTS:



TSA = 2πr(h + r) = 44 × 25 = 1100 cm²

Increase in surface area

$4\pi r^2 = 4 \times 154 = 616\ cm^2$

$\%\ inc. = \frac{616}{1100} \times 100\% = 56\%$

Ex. A solid sphere of diameter 17.5cm is cut into two equal halves. What will be the increase (in cm²) in the total surface area?

17.5 सेमी व्यास वाले एक ठोस गोले को दो बराबर भागों में काटा जाता है। कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितनी वृद्धि (सेमी² में) होगी?

HINTS:

We know that

Total surface area of solid sphere = $4\pi r^2$

When it cut into half parts in two hemisphere then,

Total surface area = $3\pi r^2 + 3\pi r^2 = 6\pi r^2$

So, increase in area = $6\pi r^2 - 4\pi r^2 = 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{17.5}{2} \times \frac{17.5}{2} = 481.25$

Prism/प्रिज्म

A prism is a solid that has two faces that are parallel and congruent and their faces (Polygon) join by vertex to vertex. A prism has a polygon as its base and vertical side perpendicular to the base.

प्रिज्म एक ठोस होता है जिसके दो फलक समानांतर और सर्वांगसम होते हैं और उनके फलक (बहुभुज) शीर्ष से जुड़ते हैं। प्रिज्म में आधार के रूप में एक बहुभुज होता है और ऊर्ध्वाधर भुजा आधार के लम्बवत होती है।

(a) Curved surface area of a prism = Perimeter of base × height

प्रिज्म का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊँचाई

(b) Total surface area of a prism = curved surface area + 2 × area of base

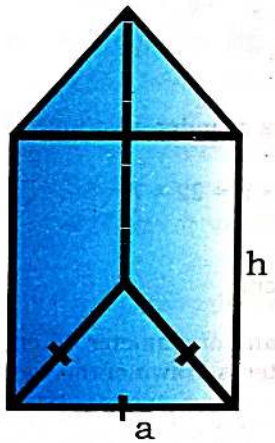
प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल

(c) Volume of a prism = area of base × height

प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

(i) Equilateral triangular prism:

समबाहु त्रिभुजाकार प्रिज्म:

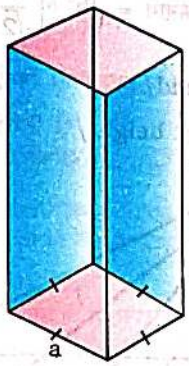


C.S.A./वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = 3ah

T.S.A./संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $3ah + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Volume/आयतन = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$

(ii) Square Prism/वर्गाकार प्रिज्म



C.S.A/वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = 4ah

T.S.A/संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = 4ah + 2a²

Volume/आयतन = a²h

(iii) Hexagonal Prism:/षट्कोणीय प्रिज्म



C.S.A/वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = 6ah

T.S.A/संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $6ah + 3\sqrt{3}a^2$

Volume/आयतन = $\frac{6\times\sqrt{3}}{4}a^2h$

Ex. The perimeter of the triangular base of a right prism is 60 cm and the sides of the base are in the ratio 5 : 12 : 13 . find its volume, if the height of the prism being 50 cm.

एक समकोण प्रिज्म के त्रिकोणीय आधार का परिमाप 60 सेमी है और आधार की भुजाओं का अनुपात 5 : 12 : 13 है। यदि प्रिज्म की ऊंचाई 50 सेमी है, तो इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

HINTS:

∵ 30 unit = 60

∴ 1 unit = 2

Sides ⇒ 10 , 24 , 26

Area of base ⇒ $\frac{1}{2}$ × 10 × 24 = 120

Volume ⇒ Area of base × height

= 120 × 50 = 6000 cm³

Ex. The height of a right prism with a square base is 15 cm. If the area of the total surface of the prism is 608 sq. cm, its volume is;

वर्गाकार आधार वाले एक लम्ब प्रिज्म की ऊँचाई 15 सेमी है। यदि प्रिज्म की कुल सतह का क्षेत्रफल 608 वर्ग सेमी है, तो इसका आयतन है;

HINTS:

Let side of base = x

$4x \times 15 + 2x^2 = 608$

$2x^2 + 60x - 608 = 0$

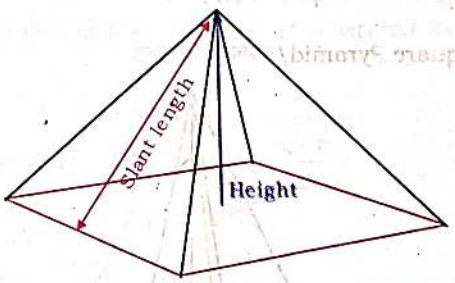
On solving, $x = 8$

V = Area of base × height = $8^2 \times 15 = 960$ cm³

Pyramid/पिरामिड

A pyramid is a three-dimensional shape. A pyramid has a polygonal base and flat triangular faces, which join at a common point called the apex. A pyramid is formed by connecting the bases to an apex. Each edge of the base is connected to the apex, and forms the triangular face, called the lateral face. If a pyramid has an n-sided base, then it has n + 1 faces, n + 1 vertices, and 2n edges.

पिरामिड एक त्रि-आयामी आकृति है। पिरामिड में एक बहुभुज आधार और सपाट त्रिकोणीय फलक होती हैं, जो एक उभयनिष्ठ बिंदु पर जुड़ते हैं जिसे शीर्ष कहा जाता है। आधारों को शीर्ष से जोड़कर पिरामिड का निर्माण किया जाता है। आधार का प्रत्येक किनारा शीर्ष से जुड़ा हुआ है, और त्रिकोणीय फलक बनाता है, जिसे पार्श्व फलक कहा जाता है। यदि किसी पिरामिड का आधार n-भुजा का है, तो इसमें n + 1 फलक, n + 1 शीर्ष और 2n किनारे होते हैं।



(a) Lateral/Curved surface area of Pyramid/पिरामिड का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = Sum of areas of all the lateral triangular faces.

= $\frac{1}{2}$ × Perimeter of base/आधार का परिमाप × slant height/तिरछी ऊँचाई

(b) Total surface area of Pyramid/पिरामिड का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = Sum of the areas of all lateral faces + Area of the base.

= Curved surface area + area of base/वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2}$ × Perimeter of base/आधार का परिमाप × slant height/तिरछी ऊँचाई + Area of base

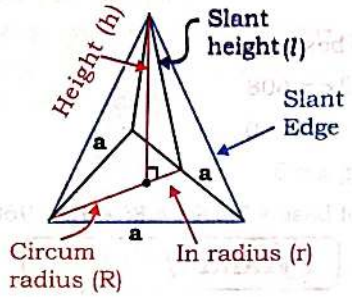
@Baka_260

(c) Volume of a Pyramid/पिरामिड का आयतन

$= \frac{1}{3} \times$ area of base/आधार का क्षेत्रफल $\times$ height/ऊँचाई

(i) Equilateral triangular Pyramid

समबाहु त्रिभुजाकार पिरामिड



C.S.A./वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 3a \times l$

T.S.A./संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 3al + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

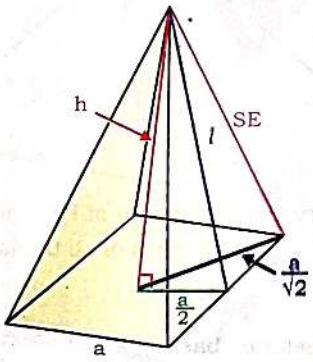
Volume/आयतन $= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times h$

Slant height (l) $= \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2}$

(Slant edge)/तिर्यक किनारा

$= \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}$

(ii) Square Pyramid/वर्गाकार पिरामिड



C.S.A./वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4a \times l$

T.S.A./संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4al + a^2$

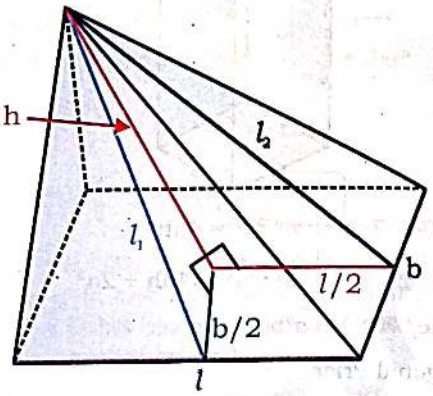
Volume/आयतन $= \frac{1}{3} \times a^2 \times h$

Slant height/तिर्यक ऊँचाई $= \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

Slant edge/तिर्यक किनारा $= \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$

(iii) Rectangular Pyramid/आयताकार पिरामिड

There are two slant height/दो तिरछी ऊँचाई होती है।



First slant height /पहली तिरछी ऊँचाई (l_1) $= \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

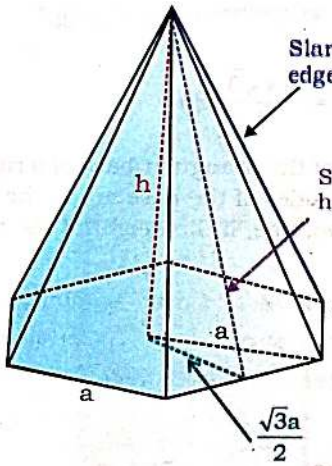
Second slant height/दूसरी तिरछी ऊँचाई (l_2) $= \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

C.S.A./वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2 \times \frac{1}{2} l \times l_1 + 2 \times \frac{1}{2} \times b + l_2$

T.S.A./संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = C.S.A + lb

Volume/आयतन $= \frac{1}{3} \times lb \times h$

(iv) Hexagonal pyramid/षट्कोणीय पिरामिड



C.S.A./वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 6al$

T.S.A./संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} 6al + 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Volume/आयतन $= \frac{1}{3} \times \frac{6\sqrt{3}}{4}a^2 \times h$

@Baka_260

Slant height/तिरछी ऊँचाई

$$(l) = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}$$

Slant edge/तिरछी किनारा $= \sqrt{h^2 + a^2}$

Ex. What is the total surface area of a pyramid whose base is a square with side 8 cm and height of the pyramid is 3 cm?

उस पिरामिड का कुल सतह क्षेत्रफल कितना है जिसका आधार एक वर्ग है जिसकी भुजा 8 सेमी है और पिरामिड की ऊंचाई 3 सेमी है?

HINTS:

Side of square = 8 cm

and height of pyramid = 8 cm

Slant height $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow l = \sqrt{3^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\,cm$$

Total surface area of the pyramid

$$= \frac{1}{2} \times 4a \times l + a^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times 5 + 8^2$$

$= 80 + 64 = 144$ cm²

Ex. The base of a pyramid is a square with each side of 16m. If the height of the pyramid is 15m, then find the total surface area of pyramid?

एक पिरामिड का आधार एक वर्ग है जिसकी प्रत्येक भुजा 16 मीटर है। यदि पिरामिड की ऊंचाई 15 मीटर है, तो पिरामिड का कुल सतह क्षेत्रफल ज्ञात करें?

HINTS:

Slant height $= \sqrt{(\text{Height})^2 + (\text{Half of base})^2}$

$= \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$

Total surface are of the pyramid

$= \frac{1}{2}$ (Perimeter) × Slant height + Area of square

$= \frac{1}{2} \times 64 \times 17 + (16)^2 = 544\text{m} + 256\text{ m} = 800\text{m}^2$

Ex. A square whose Diagonal is $12\sqrt{2}$ cm is made base of the pyramid. If height of the pyramid is 18 cm, then what is the total suface area (in cm²) of the pyramid?

एक वर्ग जिसका विकर्ण $12\sqrt{2}$ सेमी है, पिरामिड का आधार बनाया गया है। यदि पिरामिड की ऊंचाई 18 सेमी है, तो पिरामिड का कुल सतह क्षेत्रफल (सेमी² में) क्या है?

HINTS:

Diagonal of square $= a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$cm

$\Rightarrow a = 12$ cm

For square base of pyramid

Slant height, $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h \rightarrow$ height of pyramid

$a \rightarrow$ side of square

$$\Rightarrow l = \sqrt{18^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}\text{cm}$$

Now, TSA of pyramid

$=$ Area of Base $+ \frac{1}{2} \times$ perimeter of base × slant height

$$= (12)^2 + \frac{4 \times 12}{2} \times 6\sqrt{10}$$

$= 144 + 144\sqrt{10}$

$= 144\left(\sqrt{10}+1\right)\text{cm}^2$

Ex. The base of right pyramid is a square of side 14 cm and its height is 24 cm then the area of its lateral surface is.

सम पिरामिड का आधार 14 सेमी भुजा वाला एक वर्ग है और इसकी ऊंचाई 24 सेमी है तो इसकी पार्श्व सतह का क्षेत्रफल क्या है?

HINTS:

Slant height $(l) = \sqrt{(\text{height})^2 + \left(\frac{\text{side}}{2}\right)^2}$

$$l = \sqrt{(24)^2 + \left(\frac{14}{2}\right)^2}$$

$l = \sqrt{576 + 49}$

$l = \sqrt{625}$

$l = 25$ cm

Lateral surface area of pyramid $= \frac{1}{2} \times$ perimeter of base × slant height

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 \times$ (side of base) × slant height

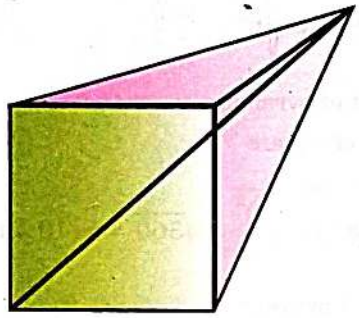
$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 \times 14 \times 25 = 700\text{ cm}^2$

@Baka2260

Ex. If E, F and V are respectively the number of edges, faces and vertices of a square pyramid, then the volume of (2E – F + 2V) is :

यदि E, F और V क्रमश: एक वर्ग पिरामिड के किनारों, फलकों और शीर्षों की संख्या हैं, तो (2E – F + 2V) का मान है:

HINTS:



In a pyramid,

Number of faces/सतहों की संख्या = n + 1

Number of vertices/शीर्षों की संख्या = n + 1

Number of edges/किनारों की संख्या = 2n

F(faces)/कुल सतह = 4 + 1 = 5

V(vertices)/कुल शीर्ष = 4 + 1 = 5

E (edges)/कुल किनारें = 2 × 4 = 8

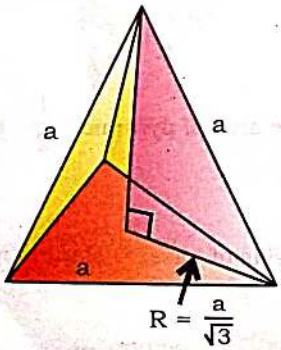
Hence,

(2E – F + 2V) = (2 × 8 – 5 + 2 × 5) = 16 – 5 + 10 = 21

Tetrahedron/समचतुष्फलक

Pyramid on a triangular base is a tetrahedron. When a solid is bounded by four triangular faces then it is a tetrahedron. A right tetrahedron is so called when the base of a tetrahedron is an equilateral triangle and other triangular faces are isosceles triangles. When we encounter a tetrahedron that has all its four faces equilateral then it is regular tetrahedron.

त्रिकोणीय आधार पर पिरामिड एक चतुष्फलक है। जब कोई ठोस चार त्रिभुजाकार फलकों से घिरा होता है तो वह चतुष्फलक होता है। एक समकोण चतुष्ठफलक तब कहलाता है। जब एक चतुष्फलक का आधार एक समबाहु त्रिभुज होता है और अन्य त्रिभुजाकार फलक समद्विबाहु त्रिभुज होते हैं। जब हमारा सामना किसी ऐसे चतुष्फलक से होता है जिसके चारों फलक समबाहु हों तो वह सम चतुष्फलक होता है।



(a) There are four equilateral faces.

चार समबाहु फलक हैं।

(b) All edge are equal in length

सभी किनारे लंबाई में बराबर है।

(c) Slant edge is same as side of base

तिर्यक ऊँचाई आधार की भुजा के बराबर है।

(i) C. S. A. = Area of 3 equilateral triangle

तीन समबाहु त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

(ii) T.S.A. = Area of 4 equilateral triangle

चार समबाहु त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \sqrt{3}\, a^2$$

(iii) Height/ऊँचाई

$$(h) = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a$$

(iv) Volume/आयतन (V)

$$= \frac{1}{3} \times \text{Area of base/आधार का क्षेत्रफल} \times \text{height/ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \sqrt{\frac{2}{3}}\, a = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

Ex. Find curved surface area of a regular tetrahedron is side $6\sqrt{3}$ cm.

एक समचतुष्फलक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा $6\sqrt{3}$ सेमी है।

HINTS:

CSA of tetrahendron

$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 108 = 81\sqrt{3}$$

@Baka_200

Summary/सारांश

Solid Figure	Volume	Total Surface Area	Curved Surface area
Cube	$Side^3$	$6 \times side^2$	$4 \times side^2$
Cuboid	$l \times b \times h$	$2(l\,b + l\,h + bh)$	$2(l\,h + bh)$
Cylinder	$\pi r^2 h$	$2\pi r(r + h)$	$2\pi rh$
Cone	$\left(\frac{1}{3}\right)\pi r^2 h$	$\pi r(r + l)$	$\pi r l$ (where $l = \sqrt{r^2 + h^2}$)
Sphere	$\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$
Hemisphere	$\left(\frac{2}{3}\right)\pi r^3$	$3\pi r^2$	$2\pi r^2$
Frustum of cone	$\frac{1}{3}\pi[R^2 + r^2 + Rr]h$	$\pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$	$\pi(R + r)l$
Hollow sphere	$\frac{4}{3}\pi(R^2 \quad r^2)$	$4\pi r^2$	
Prism	Base area × height	LSA+2 × Base area	Base peri. × height
Pyramid	$\frac{1}{3}\times$ Base area × H	LSA + Base area	$\frac{1}{2}\times$ Base peri. × Slant h.

@Baka_260

LCM AND HCF

ल.स.प. और म.स.प.

05

LCM/लघुत्तम समापवर्त्य

LCM stands for least common multiple. In other words, LCM of two or more given number is the least number which is exactly divisible by each of the given numbers.

LCM का मतलब लघुत्तम समापवर्त्य है। दूसरे शब्दों में, दो या दो से अधिक संख्याओं का LCM वह न्यूनतम संख्या है जो दी गई संख्याओं में से प्रत्येक से पूर्णत: विभाज्य है।

For example: LCM of 10, 15, 20

Multiples of 10 = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, ...

Multiples of 15 = 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, ...

Multiples of 20 = 20, 40, 60, 80, 100, 120, ...

1st number common in the list of multiples of 10, 15 and 20 = 60.

Therefore, 60 is the LCM of 10, 15, 20.

In other words, 60 is the first number divisible by 10, 15, 20. Giving the second thought, 60 is the lowest number divisible by 10, 15 and 20.

LCM is only defined for positive numbers:

Process to find out LCM /LCM ज्ञात करने की प्रक्रिया

Method-01: By Method of factorization/ गुणनखंडन की विधि द्वारा

Step-1: Factorize all the given number into their prime factors

दी गई सभी संख्याओं को उनके अभाज्य गुणनखंडों में गुणनखंडित करें

Step-2: Out of those prime factors, collect all the distinct prime factors.

उन अभाज्य गुणनखंडों में से, सभी पृथक अभाज्य गुणनखंड लिखे।

Step-3: Raise each of the prime factors to its maximum available power and then multiply.

प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड पर उसकी अधिकतम उपलब्ध घात लगाएं और फिर गुणा करें।

For Example : Find the LCM of 18 and 42.

18 और 42 का LCM ज्ञात करें।

Step -1: Factorize 18 and 42.

18 और 42 का गुणनखंड करें।

$18 = 2 \times 3^2$

$42 = 2 \times 3 \times 7$.

Step-2: The distinct factors that occur in either 18 or 42 are 2, 3 and 7

18 या 42 में उपलब्ध पृथक अभाज्य गुणनखंड 2, 3 और 7 हैं

Step-3: The highest power of 2 is 2^1, 3 is 3^2 and 7 is 7^1.

Therefore LCM (18, 42) = $2^1 \times 3^2 \times 7^1 = 126$

2 की उच्चतम घात 2^1 है, 3 की 3^2 है और 7 की 7^1 है।

इसलिए LCM (18, 42) = $2^1 \times 3^2 \times 7^1 = 126$

Method-02: Shortcut Method using factorization.

Taking the above example in consideration.

2	18, 42
3	9, 21
	3, 7

∴ LCM (18, 42) = $2 \times 3^2 \times 7 = 126$

HCF/ महत्तम समापवर्त्य

HCF stands for highest common factor, sometimes also termed as Greatest Common Divisor (GCD). This is the largest number that can perfectly divide two or more given numbers.

HCF का मतलब महत्तम समापवर्त्य है, जिसे कभी-कभी अधिकतम उभयनिष्ठ भाजक (GCD) भी कहा जाता है। यह वह सबसे बड़ी संख्या है जो दो या दो से अधिक संख्याओं को पूर्ण रूप से विभाजित कर सकती है।

Process to Find out HCM /HCM ज्ञात करने की प्रक्रिया

Method-01: By the method of factorization

गुणनखंडन विधि द्वारा

Step-1: Factorize all the given numbers into their prime factors.

सभी दी गई संख्याओं को उनके अभाज्य गुणनखंडों में गुणनखंडित करें।

Step-2: Take the product of common factors. This will be the HCF. For example, find the HCF of 18 and 42.

उभयनिष्ठ गुणनखंडों को गुणा करे यही HCF होगा।

उदाहरण के लिए, 18 और 42 का HCF ज्ञात करें।

Step-1: Factorize 18 and 42

18 और 42 का गुणनखंड करें

$18 = 2 \times 3^2$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

Step-2: The common factors are 2 and 3

चरण-2: उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 और 3 हैं

∴ HCF (18, 42) = Product of common factors

$= 2 \times 3 = 6$

Method-02: By division method/भाग विधि द्वारा

Find the HCF of 18 and 42

18)42(2

−36

6)18(3

−18

00

∴ HCF (18, 42) = 6

Important Properties and Standard Formulae relating LCM and HCF / LCM और HCF से संबंधित महत्वपूर्ण गुण और मानक सूत्र

1. Product of n numbers/n संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM
2. LCM for a given set of numbers has to be greater than or equal to HCF of the same set of numbers.
   दी गई संख्याओं के समूह का LCM उन्हीं संख्याओं के समूह के HCF से अधिक अथवा बराबर होता है।
3. If the HCF of x and y is H, then the HCF of
   यदि x तथा y का HCF, H हो तो, नीचे दी गई संख्याओं का HCF भी H होगा।
   (i) $x, (x + y)$ is also H
   (ii) $x, (x - y)$ is also H
   (iii) $(x + y), (x - y)$ is also H
4. HCF and LCM are not defined for negative numbers.
   ऋणात्मक संख्याओं के लिए HCF तथा LCM परिभाषित नहीं है।

Ex. The HCF and LCM of two numbers is 6 and 5040 respectively. If one of the numbers is 210, then the other number is:
दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य क्रमश: 6 ओर 5040 है। यदि इनमें से एक संख्या 210 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात करें।

HINTS:
We know that,
Product of two numbers = LCM × HCF
$6 \times 5040 = 210 \times x$
Where x = other no.
$x = 144$

Ex. Product of two numbers is 2028 and their H.C.F. is 13. The number of such pairs is:
दो संख्याओं का गुणनफल 2028 है और उनका H.C.F. 13 है। ऐसे युग्मों की संख्या है:

HINTS:
Let, first no. = x and Second no. = y
According to question,
$13x \times 13y = 2028$
$xy = 12$
Number of possible pairs = $1 \times 12, 3 \times 4$
Hence, The number of such pairs is 2.

L.C.M. and H.C.F. of Fractions
(भिन्नों का ल.स.प. और म.स.प.)

$$\text{L.C.M of Fractions} = \frac{\text{L.C.M. of Numerators}}{\text{H.C.F. of Denominators}}$$

$$\text{H.C.F of Fractions} = \frac{\text{H.C.F. of Numerators}}{\text{L.C.M. of Denominators}}$$

Ex. Find the LCM of $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}$ and $\frac{6}{17}$.
$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}$ और $\frac{6}{17}$ का LCM ज्ञात करें।

HINTS:

$$\text{L.C.M of fraction} = \frac{\text{L.C.M. of Numerators}}{\text{H.C.F. of Denominators}}$$

$$= \frac{(1, 2, 4, 6)\text{of LCM}}{(2, 5, 7, 17)\text{of H.C.F}} = \frac{12}{1} = 12$$

Ex. What is the HCF of the following fractions?
निम्नलिखित भिन्नों का HCF क्या है?

$\frac{4}{5}, \frac{24}{25}, \frac{16}{35}$

HINTS:

$$\text{HCF of fraction} = \frac{\text{HCF of Numerators}}{\text{LCM of denominators}}$$

$$\text{HCF}\left(\frac{4}{5}, \frac{24}{25}, \frac{16}{35}\right) = \frac{\text{HCF of } (4, 24 \& 16)}{\text{LCM of } (5, 25 \& 35)} = \frac{4}{175}$$

H.C.F. and L.C.M. of polynomials
(बहुपदों का म.स.प. तथा ल.स.प.)

L.C.M. × H.C.F. = Product of two polynomial

$$\text{L.C.M.} = \frac{1^{st}\text{ polynomial} \times 2^{nd}\text{ polynomial}}{\text{H.C.F.}}$$

$$\text{H.C.F.} = \frac{1^{st}\text{ polynomial} \times 2^{nd}\text{ polynomial}}{\text{L.C.M.}}$$

Note:
(a) H.C.F. of two or more polynomials is the "Common factor of highest degree".
दो या दो से अधिक बहुपदों का म.स.प. "अधिकतम घात का उभयनिष्ठ गुणनखंड"
(b) L.C.M. of two or more polynomials is the "Common multiple of least degree".
दो या दो से अधिक बहुपदों का ल.स.प. "न्यूनतम घात का उभयनिष्ठ गुणज"

Ex. Find the HCF of the following polynomial-
निम्नलिखित बहुपदों का HCF ज्ञात कीजिए
$15x^2 + 8x - 12, 3x^2 + x - 2, 3x^2 - 2x, 9x^2 - 12x + 4$.

HINTS:
Factors of the polynomial/बहुपदों के गुणनखंड-
$15x^2 + 8x - 12 = (3x - 2)(5x + 6)$
$3x^2 + x - 2 = (3x - 2)(x + 1)$
$9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$
$x(3x - 2)$
Hence, HCF = $(3x - 2)$

Ex. Find H:C.F of the following-
$6xy^2z, 8x^2y^2z^2, 12x^3y^3z^3$

HINTS:
$\Rightarrow 6xy^2z = 2 \times 3 \times x \times y \times y \times z$
$\Rightarrow 8x^2y^2z^2 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times y \times y \times z \times z$
$\Rightarrow 12x^3y^3z^3 = 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x \times y \times y \times y \times z \times z \times z$
Hence, HCF = $2 \times x \times y \times y \times z = 2xy^2z$

@Baka_260

Ex. What is the largest number which divides both $2^{35} - 1$ and $2^{91} - 1$?

$2^{35} - 1$ और $2^{91} - 1$ दोनों का विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या क्या है।

HINTS:

First find the HCF of the power number.

HCF of (35, 91) = 7

Largest number = $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

Ex. What is the HCF of $3^{29} - 9$ and $3^{38} - 9$?

$3^{29} - 9$ और $3^{38} - 9$ का HCF क्या है?

HINTS:

HCF of $(3^{29} - 9)$ and $(3^{38} - 9)$

$(3^{29} - 3^2), (3^{38} - 3^2) = 3^2 (3^{27} - 1), 3^2(3^{36} - 1)$

HCF = $3^2 (3^9 - 1) = (3^{11} - 3^2) = (3^{11} - 9)$

Application of LCM/ल.स.प. का अनुप्रयोग

(i) Find the smallest no. which is exactly divisible by x, y, z/वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z से पूर्णत: विभक्त हो।

= LCM (x, y, z)

(ii) Find the smallest no. which when divided by x, y, z leaves remainder r in each case.

वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे यदि x, y, z से विभाजित करे तो प्रत्येक दशा में r शेषफल प्राप्त हो।

= LCM (x, y, z) + r

(iii) Find the smallest no. which when divided by x, y, z leaves remainder a, b, c respectively

वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे x, y, z से भाग देने पर शेष क्रमश: a, b और c प्राप्त हो।

= LCM (x, y, z) – k where, k = $(x - a) = (y - b) = (z - c)$

Ex. Find the smallest no. which is exactly divisible by 105, 91 and 130

वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 105, 90 और 130 से पूर्णत: विभक्त हो।

HINTS:

LCM (105, 91, 130) = 2730

Ex. Let x be the least number, which when divided by 5, 6, 7 and 8 leaves a remainder 3 in each case but when divided by 9 leaves zero remainder. The sum of the digit of x is :

मान लीजिए कि x सबसे छोटी संख्या है, जिसे 5, 6, 7 और 8 से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में 3 शेष बचता है, लेकिन 9 से विभाजित करने पर शून्य शेष बचता है। x के अंक का योग है:

HINTS:

LCM of (5, 6, 7, 8) = 840 r = 3

Number = 840k + 3

Number is divisible by 9, remainder 0.

put k = 2

Required Number = 840 × 2 + 3 = 1683

Sum of digits = 1 + 6 + 8 + 3 = 18

Ex. What is the smallest positive interger which when divided by 4, 5, 8, 9 leaves remainder 3, 4, 7, 8 respectively?

सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक कौन सा है जिसे 4, 5, 8, 9 से विभाजित करने पर क्रमश: 3, 4, 7, 8 शेष बचता है?

HINTS:

LCM of 4, 5, 8, 9 = 360 k = 1

∴Required number = 360 – 1 = 359

Ex. What is the greatest five - digit number which on being divided by 6,7,8 and 9 leaves remainders 4,5,6 and 7, respectively?

पांच अंकों की सबसे बड़ी संख्या कौन सी है जिसे 6, 7, 8 और 9 से विभाजित करने पर क्रमश: 4, 5, 6 और 7 शेष बचते हैं?

HINTS:

Common difference = (6 – 4)=(7 – 5)=(8 – 6) = (9 – 7) = 2

LCM of 6,7, 8 and 9 = 504

Required Number = 504k – 2, where k is any integer.

Since we need to find the largest five- digit number, it has to be a multiple of 504 and nearest to 99999.

put k = 198

504k = 504 × 198 = 99792

∴ Required number = 99792 – 2 = 99790

9. 5 bells ring together at 10am. They at intervals of 12 seconds, 18 seconds, 24 seconds, 36 seconds and 45 seconds. At what time do the bells ring together again?

सुबह 10 बजे 5 घंटियाँ एक साथ बजती हैं। वे 12 सेकंड, 18 सेकंड, 24 सेकंड, 36 सेकंड और 45 सेकंड के अंतराल पर। किस समय घंटियाँ पुन: एक साथ बजती हैं?

HINTS:

LCM of 12, 18, 24, 36, 45 = 360 seconds

$\Rightarrow \frac{360}{60}$ min = 6 min

All the bells ring together again at 10 : 06 AM.

Ex. Swapnil, Aakash and Vinay begin to jog around a circular stadium. They complete their revolutions in 36 seconds 48 seconds and 42 seconds respectively. After how many seconds will they be together at the starting point?

स्वप्निल, आकाश और विनय एक गोलाकार स्टेडियम के चारों ओर दौड़ना शुरू करते हैं। वे अपनी परिक्रमा क्रमश: 36 सेकंड 48 सेकंड और 42 सेकंड में पूरी करती हैं। कितने सेकंड के बाद वे प्रारंभिक बिंदु पर एक साथ होंगे?

HINTS:

They will meet at the time of which is equal to

LCM (36, 48, 42)

$36 = 2^2 \times 3^2$

$48 = 2^4 \times 3$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

LCM (36, 48, 42) = $2^4 \times 3 \times 3 \times 7 = 16 \times 9 \times 7 = 1008$

Hence, at 1008th second all three racers will meet together at the starting point.

@Baka_268

Application of HCF/म.स.प. का अनुप्रयोग

(i) Find the largest number which will exactly divide x, y and z

वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y और z को पूर्णत: विभाजित करेगा?

= HCF (x, y, z)

(ii) Find the largest number which will exactly divide x, y and z leaves remainder r

वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे x, y और z को भाग देने पर शेष r प्राप्त होता है।

= HCF [(x – r), (y – r), (z – r)] or HCf [(x – y), (y – z), (z – c)]

(iii) Find the largest number which will exactly divide x, y and z leaves remainder a,b and c respectively

वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे x, y और z को भाग देने पर शेष क्रमश: a, b और c प्राप्त होता है।

= HCF [(x – a), (y – b), (z – c)]

Ex. Find the greatest number which divides 216, 248 and 312, leaving the same remainder.

वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 216, 248 और 312 को विभाजित करने पर समान शेषफल प्राप्त होता है।

HINTS:

(248 – 216) = 32,(312 – 248) = 64 and (312 – 216) = 96

Among 32, 64 and 96, the least number which exactly divides all the given numbers is 32.

Therefore, the largest number which divides all the numbers leaving the same remainder is 32.

Ex. What is the greatest number which when 156,181 and 331 are divided, the remainder is 6 in each case?

वह सबसे बड़ी संख्या कौन सी है जिससे 156,181 और 331 को विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में शेषफल 6 आता है?

HINTS:

156 – 6 = 150, 181 – 6 = 175, 331 – 6 = 325

HCF (150, 175, 325) = 25

Ex. The greatest number that on dividing 2675 and 2320 leaves the reminders 5 and 6 respectively, is

वह सबसे बड़ी संख्या है जिससे 2675 और 2320 को विभाजित करने पर क्रमश: 5 और 6 शेष बचते हैं?

HINTS:

If a number divides 2675 and leaves remainer 5 it means this number will divide (2675 – 5) completely and same in the case of (2320 – 6).

2670 = 178 × 15

2314 = 178 × 13

So, HCF of 2670 and 2314 = 178

∴ 178 is the greatest number which divides 2675 and 2320 leaves the reminders 5 and 6, respectively.

Ex. When 2388,4309 and 8151 are divided by a certain 3 – digit number, the remainder in each case is the same, the remainder is.

जब 2388,4309 और 8151 को एक निश्चित 3–अंकीय संख्या से विभाजित किया जाता है, तो प्रत्येक स्थिति में शेषफल समान होता है। शेषफल ज्ञात कीजिए।

HINTS:

(4309-2388), (8151 - 4309), (8151-2388)

1921, 3842, 5763

HCF(1921, 3842, 5763) = 1921

Factor of 1921 = 17 × 113

So the three digit number = 113

When we divide 2388, 4309 and 8151 by 113, will get remainder 15.

∴ Required remainder = 15

Ex. The dimensions of the floor of a rectangualr room are 3m 60 cm × 5 m 40 cm. It has to be covered with square tiles. What is the dimension of the largest square tile that can be fitted? How many such tiles are required to cover the floor?

एक आयताकार कमरे के फर्श की विमाएँ 3मी 60 सेमी × 5मी 40 सेमी हैं। इसे वर्गाकार टाइलों से ढकना है। फिट की जा सकने वाली सबसे बड़ी वर्गाकार टाइल की विमा क्या है? फर्श को ढकने के लिए ऐसी कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी?

HINTS:

Dimensions of floor of rectangular room = 3m 60cm i.e. 360cm and 5m 40cm is 540cm.

The largest square tile that can be fitted find HCF of 360 & 540.

360 = 2 × 180

540 = 3 × 180

∴ HCF = 180

Which means the largest square tile should have a dimensions of 180cm × 180cm.

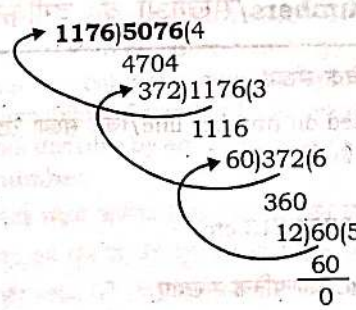
Number of tile requred.

$$= \frac{\text{Area of floor}}{\text{Area of squre tile}} = \frac{360 \times 540}{180 \times 180} = 6 \text{ tiles}$$

Ex. In finding the HCF of two numbers by division method four successive quotient are 4, 3, 6 and 5 respectively and final divisor is 12. What are two number?

विभाजन विधि द्वारा दो संख्याओं का HCF ज्ञात करने में चार क्रमिक भागफल क्रमश: 4, 3, 6 और 5 है। और अंतिम भाजक 12 है, दो संख्याएं क्या है।

HINTS:

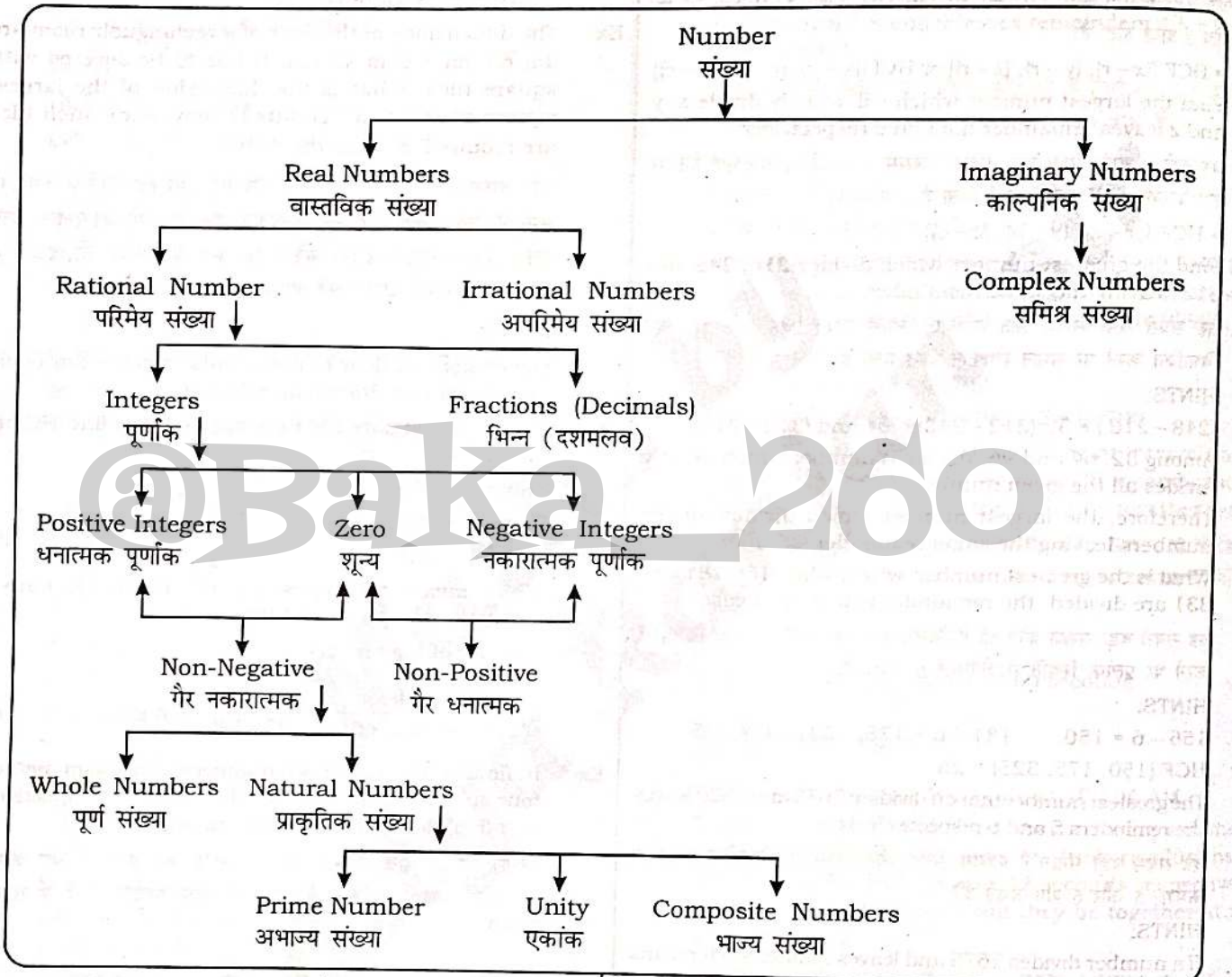


Hecne, two number are 1176, 5076.

NUMBER SYSTEM

संख्या पद्धति

06



@Baka_260

Classification of Numbers/संख्याओं का वर्गीकरण

Real Number/वास्तविक संख्या

Which can be denoted on number line/जिसे संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है।

Ex. $+5, -9, 2, \frac{13}{7}, \frac{15}{17}, 0.0754, \sqrt{13}$ etc.

Imaginary Numbers./काल्पनिक संख्याए

Cannot be denoted on number line./संख्या रेखा पर निरूपित नहीं किया जा सकता है।

Ex. $\sqrt{-3}, \sqrt{-5}$

Note: $\sqrt{(-1)} = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$

Rational Numbers/परिमेय संख्याएं

Which can be written in $\frac{p}{q}$ form, where $q \neq 0$ and p and q is integer.

जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $q \neq 0$ तथा p और q पूर्णांक है।

Ex. $\frac{5}{3}, \frac{12}{1}, 0.33333, \frac{22}{7}$ etc.

Irrational Numbers/ अपरिमेय संख्याएं

Which cannot be written in the form of $\frac{p}{q}$.

जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता।

Ex. 0.1232607....

Decimal Numbers / दशमलव संख्याए

Terminating/ शांत दशमलव

$0.5 = \frac{1}{2}$, $0.73 = \frac{73}{100}$, $0.648 = \frac{81}{125}$

Non - Terminating repeating/ अशांत दोहराव दशमलव

$0.333333... = \frac{1}{3}$, $0.565656 ... = \frac{56}{99}$

$0.137137137... = \frac{137}{999}$

Non-terminating Non-repeating decimal

गैर-शांत गैर-दोहराव दशमलव

Ex. $\sqrt{2} = 1.414$ .... Irrational Numbers

Integers/ पूर्णांक

All integers are rational number of the form of $\frac{p}{q}$ Where $q = 1$.

सभी पूर्णांक $\frac{p}{q}$ के रूप की परिमेय संख्याएँ हैं जहाँ $q = 1$ है।

$\{-\infty, ..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ..., +\infty\}$

Negative Integers/ ऋणात्मक पूर्णांक

$\{-\infty, ... -4, -3, -2, -1\}$

Positive integers/ धनात्मक पूर्णांक

$\{+1, +2, +3, +4, ..., +\infty\}$

Note: 0 is neither positive nor negative integer.

0 न तो सकारात्मक और न ही नकारात्मक पूर्णांक हैं।

Whole Number/ पूर्ण संख्या

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ... \infty\}$

Natural number/ प्राकृतिक संख्या

$\{1, 2, 3, 4, 5, ... \infty\}$

Even number/ सम संख्या

The number which are divisible by 2.

संख्या जो 2 से विभाज्य हैं।

Standard form = $2n$

$\{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

Odd number/ विषम संख्या

The number which are not divisible by 2.

संख्या जो 2 से विभाज्य नहीं है।

Standard form = $2n \pm 1$

$\{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 11\}$

$\left.\begin{matrix} a+b=\text{even} \\ a-b=\text{even} \end{matrix}\right] \rightarrow a = \frac{\text{even}+\text{even}}{2} = \text{even}$

$\left.\begin{matrix} a+b=\text{even} \\ a-b=\text{odd} \end{matrix}\right] \rightarrow a = \frac{\text{even}+\text{odd}}{2} = \frac{\text{odd}}{2} \neq \text{natural}$

Prime numbers/ अभाज्य संख्याएं

It has only two factor- 1 & itself.

इनके केवल दो गुणनखंड होते हैं- 1 और स्वयं।

Prime number between 1 to 100

1 से 100 के बीच की अभाज्य संख्याएं

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Even and smallest prime no/ सम और सबसे छोटी अभाज्य संख्या → 2

Smallest 3 digit prime number/ सबसे छोटी 3 अंकों की अभाज्य संख्या → 101

largest 3 digit prime number/ सबसे बड़ी 3 अंकों की अभाज्य संख्या → 997

Only pair of consecutive odd prime no/ लगातार विषम अभाज्य संख्या का केवल युग्म → 3, 5, 7

Note: Each prime number can be written in $(6p \pm 1)$ form, But every $(6p \pm 1)$ form may not be necessarily prime no.

प्रत्येक अभाज्य संख्या को $(6p \pm 1)$ रूप में लिखा जा सकता है, लेकिन हर $(6p \pm 1)$ रूप आवश्यक रूप से अभाज्य संख्या नहीं हो सकता है।

Ex. $13 \rightarrow 6 \times 2 + 1$ (prime)

$25 \rightarrow 6 \times 4 + 1$ (not a prime number)×

Between	Number of prime no.
1-50	15
1-100	25
1-200	46
1-500	95
1-1000	168

How to check the given number is prime or not?

To check whether a number is prime number or not, first take the square root of the number. Round of the square root to the immediately lower integer. Then check divisibility of number by all prime below it. If number is not divisible by any prime number then number is prime number.

कोई संख्या अभाज्य है या नहीं, यह ज्ञात करने के लिए, सबसे पहले संख्या का वर्ग मूल लें, वर्ग मूल को उससे छोटे पूर्णांक के रूप में लिख लें। उसके बाद संख्या की विभाज्यता की जांच उससे छोटी सभी अभाज्य संख्याओं द्वारा करें। यदि किसी भी अभाज्य संख्या से विभाज्य नहीं होती तो यह अभाज्य संख्या है।

@Baka260

Ex. 137 is prime number or not?
137 अभाज्य संख्या है या नहीं?

$\sqrt{137} \approx 11 \Rightarrow$ prime number less than or equal to 11 are 2, 3, 5, 7 and 11, 137 is not divisible by any of there. Hence it is prime numbers.
11 से छोटी या बराबर अभाज्य संख्याएं 2, 3, 5, 7 तथा 11 है, 137 इनमें से किसी के भी द्वारा विभाज्य नहीं है इसलिए यह एक अभाज्य संख्या है।

Ex. What is average of prime number from 80 to 100?
80 से 100 तक की अभाज्य संख्याओं का औसत क्या है?

$\sqrt{100} = 10 \Rightarrow$ Prime number less than 10 are 2, 3, 5, 7
Hence, even number and ending with 5 will not prime numbers so only check divisibility of 3 and 7.
10 से कम की अभाज्य संख्याएं 2, 3, 5, 7 हैं, इस प्रकार सम संख्या और 5 इकाई अंक वाली संख्याएं अभाज्य संख्याएं नहीं होगीं। इसलिए सिर्फ 3 और 7 की विभाज्यता जाचें।

Prime number between 80 to 100 are 83, 89 and 97.
अभाज्य संख्याएं 80 से 100 के बीच 83, 89, 97 हैं।

$$\text{Required Average} = \frac{83+89+97}{3} = \frac{269}{3} = 89.67$$

Ex. x, y and z are distinct prime numbers where $x < y < z$. If $x + y + z = 70$, then what is the value of z?
x, y तथा z विशिष्ट अभाज्य संख्याएं हैं, जहाँ $x < y < z$ है। यदि $x + y + z = 70$ है, तो z का मान क्या है?

(a) 29 (b) 43
(c) 31 (d) 37

HINTS:
Sum is 70, means, at least one of the number is even, because odd + odd+ odd = odd
As we know, only one even prime number exists, and that is 2.
2 is also the smallest prime number. Thus, $x = 2$
Now, $70 - 2 = 68 = y + z$
Now, let's use the options
Option-1:
$z = 29$
$y = 68 - 29 = 39$ (y is non prime)
Option 2:
$z = 43$
$y = 68 - 43 = 25$ (y is non prime)
Option-3:
$z = 31$
$y = 68 - 31 = 37$ ($z < y$)
Option-4:
$z = 37$
$y = 68 - 37 = 31$ ($y < z$, satisfies the requirement)
Hence, $z = 37$

Ex. x, y and z are prime numbers such that $x + y + z = 38$. What is the maximum value of x?
x, y और z अभाज्य संख्याएं इस तरह हैं कि $x + y + z = 38$, तो x का अधिकतम मान क्या है?

(a) 19 (b) 23
(c) 31 (d) 29

HINTS:
If all the numbers are even, then,
$\Rightarrow x + y + z = 6$
So, two of them are odd and one of them is 2
Let z be 2
$\Rightarrow x + y = 36$
The closest prime number to 36 is 31. If $x = 31$ then we get $y = 5$, an odd prime number.
$\therefore$ 31 is the maximum value of x

Co-prime numbers/सह-अभाज्य
If the HCF of two numbers is 1.
यदि दो संख्याओं का म.स.प. 1 है।

Ex. (2, 3), (11, 13), (16, 9),, (25, 19) etc.

Twin-prime numbers/युग्म अभाज्य संख्याएं
When two consecutive prime numbers are with an interval of 2, then they are called twin prime numbers.
जब दो लगातार अभाज्य संख्या 2 के अंतराल के साथ हो तो उसे युग्म अभाज्य संख्या कहते हैं।

Ex. (3, 5)(5, 7)(11, 13)

Composite Numbers/संयुक्त या भाज्य संख्या
It has more than two factors.
इनके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं।

Ex. 4, 6, 8, 9,10,12,14,15 etc.
Smallest composite no. (सबसे छोटी भाज्य संख्या) $\rightarrow 4$
Smallest odd composite no. (सबसे छोटी विषम भाज्य संख्या) $\rightarrow 9$
Note: (i) 1 is neither prime nor composite number.
1 न तो अभाज्य और न ही भाज्य संख्या है।
(ii) If a and b are any two odd primes then $a^2 + b^2$ and $a^2 - b^2$ is composite numbers.
यदि a तथा b दो विषम अभाज्य संख्याएं हैं तो $a^2 + b^2$ तथा $a^2 - b^2$ भाज्य संख्याएं होगीं।

Ex. How many composite numbers are there from 53 to 97?
53 से 97 तक कितनी भाज्य संख्याएं हैं?

HINTS:
The composite numbers from 53 to 97 are
54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95 and 96
Hence, The composite number from 53 to 97 is 35

Perfect Numbers/सम्पूर्ण संख्या
If the sum of all the factors of a number (except that number) is equal to the given number, then that number is called a perfect number.
यदि संख्या के सभी गुणनखंडो का योग(उस संख्या को छोड़कर) , दी गई संख्या के बराबर हो, तो उस संख्या को सम्पूर्ण संख्या कहते हैं।

Ex. 6, 28, 496, 8128 etc.
Factor of 28 $\rightarrow$ 1, 2, 4, 7, 14
$\therefore$ $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$
Thus, 28 is a perfect no.
Note: 6 is a smallest perfect no. (6 सबसे छोटी सम्पूर्ण संख्या है)

@Baka_260

Unit Digit/इकाई अंक

To find the units digit of a given expression, we do not have to solve the entire expression, but by operating on the units digit of all the numbers, the units digit of the resulting expression is known.

किसी दिए गए व्यंजक का इकाई अंक निकालने के लिए हमें संपूर्ण व्यंजक को हल नहीं करना है बल्कि सभी संख्याओं के इकाई अंक पर ऑपरेट कर देने पर परिणामित व्यंजक का इकाई अंक ज्ञात हो जाता है।

Let us consider N = a × b, N = a + b, N = a – b, to calculate the unit digit of N, we only consider the unit digit of number a and b.

Ex. Find the unit digit of 232 × 235.

HINTS:

232 × 235 = unit digit (0)

Ex. Find the unit digit of 628 + 493 + 589.

HINTS:

628 + 493 + 589 = 8 + 3 + 9 = unit digit (0)

Ex. Find the unit digit of 2383 – 1689.

HINTS:

2383 – 1689 = – 6 + 10 = 4

Concept of Cyclicity/चक्रीयता की अवधारण

After a certain frequency or cycle length, the unit digit starts repeating for a given number.

एक निश्चित आवृत्ति या चक्र की लंबाई के बाद, इकाई अंक किसी दिए गए नंबर के लिए दोहराना शुरू कर देता है।

Number	Cyclicity	Power cycle
1	1	1
2	4	2, 4, 8, 6
3	4	3, 9, 7, 1
4	2	4, 6
5	1	5
6	1	6
7	4	7, 9, 3, 1
8	4	8, 4, 2, 6
9	2	9, 1
10	1	0

Let us consider $N = x^y$

To calculate the unit digit of N, we only consider the unit digit of number *x*.

The unit's digit of an expression can be calculated by getting the remainder while power of the expression is divided by 4.

किसी व्यजंक के इकाई अंक की गणना उसकी घात में चार से भाग देने के बाद प्राप्त शेषफल से करते हैं।

Ex. What will be the unit's digit of $(382)^{575}$?

$(382)^{575}$ का इकाई अंक क्या होगा?

Step/चरण 1:

Divide last 2 digits of power by 4 and find out remainder.

घात के अन्तिम 2 अकों को 4 से भाग देकर शेषफल प्राप्त करते हैं।

$4\overline{)75}\,(18$

$\frac{4}{35}$

$\frac{32}{3}$

Step/चरण 2:

Put remainder as a power of unit place number and find out answer.

शेषफल को इकाई अंक की संख्या के घात के रूप में रखकर उत्तर प्राप्त करते हैं।

$2^3 = 8$

Note: In Step 1, if remainder is 0 is then put power equal to 4.

चरण 1 में यदि शेषफल 0 हो तो घात को 4 रखते हैं।

Ex. Find the units digit in each of the following cases.

निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में इकाई अंक ज्ञात कीजिए।

(i) $(187)^{282} \times (529)^{321} \times (343)^{236}$

(ii) $(789)^{315} + (232)^{644} + (528)^{253}$

(iii) $(982)^{481} - (219)^{241}$

HINTS:

(i) Divide last 2 digits of power by 4 and put remain der as a power of unit place digit.

घात के अंतिम 2 अंकों को 4 से विभाजित करके प्राप्त शेषफल को इकाई अंक की संख्या की घात के रूप में रखते हैं।

$7^2 \times 9^1 \times 3^4 \Rightarrow 9 \times 9 \times 1 \Rightarrow 1$

(ii) $9^3 + 2^4 + 8^1 \Rightarrow 9 + 6 + 8 \Rightarrow 3$

(iii) $2^1 - 9^1 \Rightarrow 12 - 9 \Rightarrow 3$

[If first number is less than add 10 in it]

[यदि प्रथम संख्या छोटी हो तो इसमें 10 जोड़ दें]

Ex. Find the unit digit of the expression.

निम्नलिखित व्यंजक का इकाई अंक ज्ञात करें।

1! + 2! + 3! + 4! + ... + 100!

HINTS:

1 + 1 × 2 + 1 × 2 × 3 + 1 × 2 × 3 × 4 + 1 × 2 × 3 × 4 × + ... + 100!

1 + 2 + 6 + 4 + 0 + 0 + 0 ..... + 0 = 3

Hence unit digit of the expression is 3.

Factor/गुणनखंड

Any number N can be expressed in the form of $a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times$....so on, Where, a, b, c, and d are prime number.

किसी भी संख्या N को $a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times$.... के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ, a, b, c, और d अभाज्य संख्याएँ हैं।

Ex. $15 = 3 \times 5$

$45 = 3^2 \times 5$

$100 = 2^2 \times 5^2$ and so on.

Finding total number of factors of a number

किसी संख्या के कुल गुणनखंडों की सख्या ज्ञात करना

If/यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, Then/तो

Total Number of factors (कुल गुणनखंडों की सख्या)

$= (p + 1) \times (q + 1) \times (r + 1) \times (s + 1) .....$

Ex. Find the total number of factors of 300:

300 के कुल गुणनखंडों की सख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Prime Factorisation of $300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$

Total number of factors(कुल गुणनखंडों की सख्या),

$= (2 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 18$

Finding total number of odd factors

कुल विषम गुणनखंडों की संख्या ज्ञात करना

If/यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, Then/तो

Total Number of odd factor $= (q + 1) \times (r + 1) \times (s + 1) .....$

Note: When we find the number of odd factors, we ignore the exponent of a, where (a = 2)

जब हम विषम गुणनखंडो की संख्या ज्ञात करते हैं तो वैसी स्थिति में हम a के घातांक को नजरअंदाज करते हैं जहाँ (a = 2)।

Ex. Find the total number of odd factors of 240.

240 के कुल विषम गुणनखंडों की सख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Prime Factorisation of $240 = 2^4 \times 3^1 \times 5^1$

Total number of odd factors (कुल विषम गुणनखंडों की सख्या),

$= (1 + 1) \times (1 + 1) = 2 \times 2 = 4$

Finding Total number of even factors

कुल सम गंणनखंडों की संख्या ज्ञात करना

If/यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, Then/तो

Total Number of Even factor (कुल सम गुणनखंडों की सख्या)

$= p \times (q + 1) \times (r + 1) \times (s + 1).....$

Ex. Find the total number of even factors of 1200.

1200 के कुल सम गुणनखंडों की सख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Prime Factorisation of $1200 = 2^4 \times 3^1 \times 5^2$

Total number of even factors (कुल सम गुणनखंडों की सख्या),

$= 4 \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 2 \times 3 = 24$

'OR'

We can also Use,

Even factors = Total Factors - Odd Factors

Total number of Even Factors $= 5 \times 2 \times 3 - 2 \times 3 = 24$

Finding Sum of factors of a given number

किसी संख्या के गुणनखंडों का योगफल ज्ञात करना

If/यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, Then/तो

Sum of all factors (सभी गुणनखंडों का योग)

$= (a^0 + a^1 + ... + a^p)\ (b^0 + b^1 + ... + b^q)\ (c^0 + c^1 + ... + c^r) .....$

'OR'

$$= \frac{a^{p+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

Ex. Find the sum of all factors of 7056.

7056 के सभी गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Prime Factorisation of $7056 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2$

Sum of all factors(सभी गुणनखंडों का योग)

$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)\ (3^0 + 3^1 + 3^2)\ (7^0 + 7^1 + 7^2)$

$= (1 + 2 + 4 + 8 + 16)\ (1 + 3 + 9)(1 + 7 + 49)$

$= 31 \times 13 \times 57 = 22971$

Sum of even factors/सम गुणनखंडों का योगफल

If/यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, Then/तो

Sum of all even factors (सभी सम गुणनखंडों का योग)

$= (a^1 + a^2 + ... + a^p)\ (b^0 + b^1 + ..b^q)\ (c^0 + c^1 + ... + c^r)$

$$= \left(\frac{a^{p+1} - 1}{a - 1} - 1\right) \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

'OR'

$$= \frac{a^{p+1} - a}{a - 1} \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

Ex. Find the sum of all even factors of 270.

270 के सभी सम गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Prime Factorisation of $270 = 2^1 \times 3^3 \times 5^1$

Sum of all even factors (सभी सम गुणनखंडों का योग)

$= (2^1) \times (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) \times (5^0 + 5^1)$

$= 2 \times 40 \times 6 = 480$

'OR'

$$= \left(\frac{2^{1+1} - 1}{2 - 1} - 1\right)\left(\frac{3^{3+1} - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1}\right)$$

$$= 2 \times \frac{80}{2} \times \frac{24}{4} = 480$$

Sum of all odd factors/सभी विषम गुणनखंडों का योगफल

If/यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, Then/तो

Sum of all odd factors (सभी विषम गुणनखंडों का योग)

$= a^0\ (b^0 + b^1 + ... + b^q)\ (c^0 + c^1 + ... + c^r)$, Where a = 2

'OR'

$$= \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

Ex. Find the sum of all even factors of 360.

360 के सभी विषम गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Prime Factorisation of $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

Sum of all odd factors(सभी विषम गुणनखंडों का योग)

$= 2^0 (3^0 + 3^1 + 3^2)\ (5^0 + 5^1)$

$= 1 \times 13 \times 6 = 78$

'OR'

$$= \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} \times \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} = \frac{26}{2} \times \frac{24}{4} = 78$$

@Baka_260

Prime and Composite Factor of a Natural Number

किसी प्राकृतिक संख्या का अभाज्य और भाज्य गुणनखंड

We know that

Total numbers of factors of any natural number

किसी प्राकृत संख्या के गुणनखंडों की कुल संख्या

= 1 + prime factors + composite factors.

= 1 + अभाज्य गुणनखंड + भाज्य गुणनखंड.

Note: 1 is a factor of all natural numbers.

नोट: 1 सभी प्राकृत संख्याओं का एक गुणनखंड है।

When we do prime factorization, the number of prime factors can be given by just counting the number of prime factors present in it.

जब हम अभाज्य गुणनखंडन करते हैं, तो उसमें मौजूद अभाज्य गुणनखंडों की संख्या की गणना करके ही अभाज्य गुणनखंडों की संख्या दी जा सकती है।

Therefore, Total number of composite factors = Total number of factors - Prime factors –1

इसलिए, भाज्य कारकों की कुल संख्या = गुणनखंडों की कुल संख्या - अभाज्य गुणनखंडों की संख्या –1

Ex. $N = 56 = 2^3 \times 7$

Here, Total number of prime factors = 2(namely 2 and 7)

Total number of composite factor

भाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या

$= [(3 + 1)(1 + 1)] - 2 - 1 = 8 - 3 = 5$

To find factors which are co-prime to each other

सहअभाज्य गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात करना।

$N = a^p \times b^q$ [a, b are prime factors of N]

Then Number of co-prime factors will be

$= [(p + 1)(q + 1) + pq]$

If $N = a^p \times b^q \times c^r$

Then number of co-prime factors will be

$= [(p + 1)(q + 1)(r + 1) + pq + qr + rq + 3pqr]$

OR take two at a time and then calculate.

Ex. How may sets of two factors of N = 56 will be co-prime to each other?

N = 56 के दो गुणनखण्डों के कितने समूह एक दूसरे के सह-अभाज्य हो सकते है।

HINTS:

$N = 56 = 2^3 \times 7$

Then Number of co-prime factors will be

$= [(3 + 1)(1 + 1) + 3 \times 1] = 11$

Given that $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$ find

Ex. Total number of prime factors

अभाज्य गुणनखण्डों की कुल संख्या

HINTS:

Clearly, there are three prime factors namely 2, 3 and 5.

Ex. Total number of composite factors

भाज्य गुणनखण्डों की कुल संख्या

HINTS:

Total number of composite factors = Total number of factors – Number of prime factors – 1

$= 30 - 3 - 1 = 26$

Ex. Number of sets of factors which are co-prime to each other.

गुणनखंडो के सेट की संख्या जो एक दूसरे के सह-अभाज्य हैं

HINTS:

Given that

$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

Number of sets of factors which are co-prime to each other

$= (p + 1)(q + 1)(r + 1) + pq + qr + rq + 3pqr$

$= (4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) + 8 + 2 + 4 + 3 \times 8$

$= 5 \times 3 \times 2 + 38 = 30 + 38 = 68$

Ex. Total number of factors which are perfect square.

गुणनखंडों की कुल संख्या जो पूर्ण वर्ग हैं।

HINTS:

Given that

$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

For the factors of 720 to be a perfect square it should have even power of its prime factors.

Power of 2	Power of 3	Power of 5
2^0	3^0	5^0
2^2	3^2	
2^4		

Therefore,

Total number of factors of N = 720 that are perfect square

$= 3 \times 2 \times 1 = 6$

Ex. Total number of factors which are perfect cubes.

गुणनखंडों की कुल संख्या जो पूर्ण घन हैं।

HINTS:

Given that

$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

For the factors of 720 to be cube, it should be use the following powers of its prime factors:

Power of 2	Power of 3	Power of 5
2^0	3^0	5^0
2^3		

Thus,

Total number of factors of N = 720 that are perfect cube

$= 2 \times 1 \times 1 = 2$

Ex. Total number of factors which are perfect square and perfect cube both –

गुणनखंडों की कुल संख्या जो पूर्ण वर्ग और पूर्ण घन दोनों हैं –

HINTS:

Given that , $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

For the factors of N = 720, to be a perfect square and perfect cube simultaneously, it should use the below powers of its prime factors.

Power of 2	Power of 3	Power of 5
2^0	3^0	5^0

Hence, Total number of factors of N = 720 for which the factors are perfect square and cube simultaneously

$= 1 \times 1 \times 1 = 1$

@Baka1260

Ex. Total number of factors divisible by 10 but not by 20.
गुणनखण्डों की कुल संख्या 10 से विभाज्य है लेकिन 20 से नहीं।
HINTS:
Given that
$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$
For the factors to be divisible by 10, minimum power of 2 to be used = 1, and minimum power of 5 used is 1.
Hence all the factors of 720 that are divisible by 10 will be of the format = $2^{1-4} \times 3^{0-2} \times 5^1$
Therefore, Number of factors = $4 \times 3 \times 1 = 12$
Factors that are divisible by 20 should be of format
$= 2^{2-4} \times 3^{0-2} \times 5^1 = 3 \times 3 \times 1 = 9$
Therefore, factors divisible by 10 but not by 20
$= 12 - 9 = 3$

Ex. Total number of factors which are divisible by 10.
10 से विभाज्य गुणनखण्डों की कुल संख्या.
HINTS:
Kindly, refer to the above question for solution.

Number of Zeros/शून्यों की संख्या

Number of zeros in an expression
किसी व्यंजक में शून्य की संख्या

Let us assume we have to find the number of zeroes in a product $24 \times 13 \times 52 \times 27$ which can also be written as $2^5 \times 3^4 \times 13^2$. Clearly, this product will have no zeroes because it has no 5 in it.
आइए मान लेते है कि हमें $24 \times 13 \times 52 \times 27$ के गुणनफल में शून्यों की संख्या ज्ञात करनी है जिसे $2^5 \times 3^4 \times 13^2$ के रूप में भी लिखा जा सकता है। स्पष्ट रूप से, इस गुणनफल में कोई शून्य नहीं होगा क्योंकि इसमें कोई 5 नहीं है।
However, if we have an expression like:
हालाँकि, यदि हमारे पास कोई व्यंजक इस प्रकार है जैसे:
$8 \times 15 \times 24 \times 13$
The expression can be rewritten as
व्यंजक को इस प्रकार पुन: लिखा जा सकता है
$2^6 \times 3^2 \times 5 \times 13$
We know that zeroes can be formed by combination of 2 and 5 i.e. (2×5).
हम जानते हैं कि शून्य 2 और 5 यानी (2×5) के संयोजन से बनाया जा सकता है।
In the above expression, there are two's and one five.
उपरोक्त व्यंजक में, कई दो और एक पाँच हैं।
Hence, we can only form one pair of (2×5).
इसलिए, हम (2×5) का केवल एक जोड़ा बना सकते हैं।
Therefore, there will be 1 zero in the product.
अत: गुणनफल में 1 शून्य होगा।

Finding the number of zeroes in a factorial
किसी क्रमगुणित में शून्यों की संख्या ज्ञात करना

Let us assume that we have to find the number of zeroes in 7!
मान लीजिए कि हमें 7! में शून्यों की संख्या ज्ञात करनी है!
$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$= 7 \times (3 \times 2) \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1$
$= 7 \times 5 \times 3^2 \times 2^4 \times 1$
The above expression have one pair of 5×2. Clearly, there is only one 5 and an abundance of 2's.
उपरोक्त अभिव्यक्ति में 5×2 का एक युग्म है। स्पष्ट रूप से, केवल एक 5 है और 2 बहुतायत है।
It is clear that in any factorial value, the number of 5's will be always lesser than the number of 2's. Hence, the count of 5's in a factorial will give the total number of zeroes.
यह स्पष्ट है कि किसी भी क्रमगुणित मान में, 5 की संख्या हमेशा 2 की संख्या से कम होगी। इसलिए, किसी भी क्रमगुणित मान में यदि 5 की गिनती ज्ञात कर ले तो शून्यों की कुल ज्ञात हो जाएगी।

Power of number contained in a factorial
एक क्रमगुणित में निहित संख्या की घात

Highest power of a prime number p contained in n! is given by
n! में अभाज्य संख्या p की उच्चतम घात होगी-

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

where $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to x.
जहाँ $[x]$ x से कम या उसके बराबर सबसे बड़े पूर्णांक को दर्शाता है।

Ex. Find the number of zeroes in 47!
47! में शून्य की संख्या ज्ञात कीजिये!
HINTS:
For finding the number of zeroes in 47!, we need to find the maximum power of 5 in 47!
Thus, Highest power of 5 in 47!

$$= \left[\frac{47}{5}\right] + \left[\frac{47}{25}\right] + \left[\frac{47}{125}\right] + \ldots.$$

$= 9 + 1 + 0 + 0 \ldots = 10$
Hence, the number of zeroes in 47! will be 10

Ex. Find the number of zeroes in 300!
300! में शून्य की संख्या ज्ञात कीजिये!
HINTS:
For finding the number of zeroes in 300!, we need to find the maximum power of 5 in 300!
Thus, Highest power of 5 in 300!

$$= \left[\frac{300}{5}\right] + \left[\frac{300}{25}\right] + \left[\frac{300}{125}\right] + \left[\frac{300}{625}\right] + \ldots.$$

$= 60 + 12 + 2 + \ldots = 74$
Hence, the number of zeroes in 300! will be 74

Counting of Numbers/संख्याओं की गिनती

Counting a Digit/अंकों की गिनती

Ex. How many times 5 will come from 350 to 600.
350 से 600 के बीच 5 कितनी बार आएगा।
HINTS:

5	600
5	120
5	24
	4

Frequency of 5 = 120 + 24 + 4 = 148

Again,

5	350
5	70
5	14
	2

Frequency of 5 = 70 + 14 + 2 = 86

Frequency of 5 from 350 to 600 = 148 – 86 = 62

Ex. How many numbers are there from 400 to 700 in which the digit 6 occurs exactly twice?

400 से 700 तक ऐसी कितनी संख्याएं है, जिनमें अंक 6 ठीक दो बार आता है?

HINTS:

In 400 – 500 in **466** only = **1** time

In 500 – 600 = in **566** only = **1** time

In 600 – 700 = 660 – 669 - 1 = **9** times = **(660, 661, 662, 663, 664, 665, 667, 668, 669)**

6_6 – 666 –10 – 1= **9** times = **(606, 616, 626, 636, 646, 656, 676, 686, 696)**

Hence, in between 400 – 700, in total 1 + 1 + 9 + 9 = 20 times 6 digit will appear twice.

Digits required to write counting

गिनती को लिखने के लिए आवश्यक अंक

Ex. How many digits required to write counting from 1 to 400?

1 से 400 तक की गिनती को लिखने के लिए आवश्यक अंकों की संख्या कितनी है?

Number of single digit 1 to 9

⇒ 9 number × 1 digit per number = 9

Number of double digits 10 to 99

⇒ 90 number × 2 digits per number = 180

Number of three digits 100 to 400

⇒ 301 number × 3 digits per number = 903

Required number of digits = 9 +180 + 903 = 1092

Sum of digits/अंकों का योगफल

Ex. Find out sum of all digits from 1 to 100.

1 से 100 तक की संख्या में प्रयुक्त सभी अंकों का योगफल ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Sum of unit place digit/इकाई अंक का योगफल

⇒ 10 (1 + 2 +.....+9) = 450

Sum of tenth place digit/दहाई अंक का योगफल

⇒ 10 (1 + 2 +.....+ 9) = 450

Sum of hundredth place digit/सैकड़ा अंक का योगफल

⇒ 1

Total Sum = 450 + 450 + 1 = 901

Divisibility Test/विभाज्यता की जाँच

A divisibility rule is a shorthand way of discovering whether a given number is divisible by a fixed divisor without performing the actual division.

विभाज्यता नियम यह पता लगाने का एक संक्षिप्त तरीका है कि कोई दी गई संख्या वास्तविक विभाजन किए बिना एक निश्चित भाजक द्वारा विभाज्य है या नहीं।

When Divisor is 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n

जब भाजक 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n हो तो

A number is divisible by 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^n when the number formed by last one, two, three, four, ...n digit is divisible by 2, 4, 8, 16, ..., 2^n respectively.

कोई संख्या 2^1, 2^2, 2^3, 2^4,, ..., 2^n से विभाज्य तब होती है जब अंतिम 1, 2, 3, 4, ...n अंक से बनी संख्या क्रमश: 2, 4, 8, 16, ..., 2^n से विभाज्य होती है।

Ex. 1682512 is divisible by 8 because the number formed by last three digits i.e. 512 is divisible by 8.

1682512, 8 से विभाज्य है क्योंकि संख्या के अंतिम तीन अंक यानी 512 8 से विभाज्य है।

When Divisor is 3 and 9

जब भाजक 3 और 9 हो तो

A number is divisible by 3 or 9 when the sum of digits of the number is divisible by 3 or 9.

कोई संख्या 3 या 9 से विभाज्य होती है जब संख्या के अंकों का योग 3 या 9 से विभाज्य होता है।

Ex. 523872 is divisible by 3 or 9 because sum of digits = 5 + 2 + 3 + 8 + 7 + 2 = 27 is divisible by 3 and 9.

523872, 3 या 9 से विभाज्य है क्योंकि अंकों का योग = 5 + 2 + 3 + 8 + 7 + 2 = 27, 3 और 9 से विभाज्य है।

When Divisor is 5, 25, 125, ..., 5^n

जब भाजक 5, 25, 125, ..., 5^n हो तो

A number is divisible by 5^1 when the last digit is 0 or 5. A number is divisible by 5^2 when the last two digit is 00 or divisible by 25. Similarly, a number is divisible by 5^3 when the last three digit is 000 or divisible by 125 and so on.

कोई संख्या 5^1 से तब विभाज्य होती है जब अंतिम अंक 0 या 5 हो। कोई संख्या 5^2 से तब विभाज्य होती है जब अंतिम दो अंक 00 हो या 25 से विभाज्य हो। इसी प्रकार, कोई संख्या 5^3 से तब विभाज्य होती है जब अंतिम तीन अंक 000 या विभाज्य हो 125, यह प्रक्रिया इसी प्रकार चलती रहती है।

Ex. 156625 is divisible by 125 because the number formed by last three digits i.e. 625 is divisible by 125.

156625, 125 से विभाज्य है क्योंकि अंतिम तीन अंक अर्थात 625, 125 से विभाज्य है।

When Divisor is 6

जब भाजक 6 हो तो

A number "N" is divisible by 6 only when "N" is divisible by both 2 and 3.

एक संख्या "N" 6 से तब विभाज्य होती है जब "N" 2 और 3 दोनों से विभाज्य होती है।

Ex. 56934 is divisible by both 2 and 3. Therefore, it is divisible by 6.

56934, 2 और 3 दोनों से विभाज्य है। इसलिए, यह 6 से विभाज्य है।

When Divisor is 7 or 13

जब भाजक 7 और 13 हो तो

A number "N" is divisible by 7 if the difference between sum of the triplets at odd places and sum of the triplets at even places is divisible by 7.

एक संख्या "N" 7 से विभाज्य है यदि विषम स्थानों के 3 संख्याओं के योग और सम स्थानों के 3 संख्याओं के योग के बीच का अंतर 7 से विभाज्य है।

Ex. 12348 divisible by 7. How?

12348 7 से विभाज्य है। कैसे?

Step-1: Divide the number into triplets 012/348

संख्या को तीन-तीन के समूह 012/348 में विभाजित करें

Step-2: Start putting the '+' sign and '–' sign alternately, starting from '+' sign on top of triplet from right 012/348

दाई ओर 012/348 से 3 संख्याओं के समूह के शीर्ष पर '+' चिह्न से शुरू करते हुए, '+' चिह्न और '–' चिह्न को बारी-बारी से लगाना शुरू करें।

@Baka_Edo

Step-3: Divide the resulting number by 7.
परिणामी संख्या को 7 से विभाजित करें।

$\frac{+348-012}{7} = \frac{336}{7} = 48$ Hence, 12348 is divisible by 7.

When Divisor is 11

जब भाजक 11 हो तो

A number "N" is divisible by 11 if the difference between sum of digit odd places and sum of digits at even places is divisible by 11.
एक संख्या "N" 11 से विभाज्य है यदि विषम स्थानों के अंकों के योग और सम स्थानों के अंकों के योग के बीच का अंतर 11 से विभाज्य है।

Ex. 91718 divisible by 11.
91718 11 से विभाज्य.

Step-1: Start putting '+' sign and '–' sign alternately on the digit from right to left $\overset{+-+-+}{91718}$

$\overset{+-+-+}{91718}$ के दाएँ से बाएँ अंक पर बारी-बारी से '+' चिन्ह और '–' चिन्ह लगाना शुरू करें

Step-2: $\frac{(9+7+8)-(1+1)}{11} = \frac{22}{11} = 2$

Since, 22 is divisible by 11. Thus, 91718 is divisible by 11.
चूँकि, 22, 11 से विभाज्य है। इस प्रकार, 91718, 11 से विभाज्य है।

When Divisor is 12

जब भाजक 12 हो तो

A number is divisible by 12 if the number is divisible by both 3 and 4.
कोई संख्या 12 से विभाज्य होगी यदि संख्या 3 तथा 4 दोनों से विभाज्य हो।

When Divisor is 14

जब भाजक 14 हो तो

If the number is divisible by 2 and 7 both, then the number will be divisible by 14.
यदि संख्या 2 और 7 दोनों से विभाज्य है, तो वह संख्या 14 से विभाज्य होगी।

When Divisor is 17

जब भाजक 17 हो तो

Subtract 5 times the last digit from the rest. If the resulting number is divisible by 17 then "N" will be divisible by 17.
अंतिम अंक को शेष से 5 गुना घटाएं। यदि परिणामी संख्या 17 से विभाज्य है तो "N" 17 से विभाज्य होगा।

Ex. 391 : 39 – 1 × 5 = 34 which is divisible by 17. Thus, 391 will be divisible by 17.
391 : 39 – 1 × 5 = 34 जो 17 से विभाज्य है। इस प्रकार, 391 17 से विभाज्य होगा।

When Divisor is 7, 11 and 13 together

जब भाजक 7, 11 और 13 एक साथ हो

When any 3 digit number multiplied by 1001 then it repeats itself and always completely divisible by 7, 11 and 13.
जब किसी 3 अंकीय संख्या को 1001 से गुणा किया जाता है तो वह स्वयं को दोहराती है और हमेशा 7, 11 और 13 से पूर्णत: विभाज्य हो जाती है।

Ex. 123123, 147147, 164164, 574574.

Ex. If the product 4864 × 9P2 is divisible by 12, the value of P is:
यदि गुणनफल 4864 × 9P2, 12 से विभाज्य है, तो P का मान है:

HINTS:
We know, 12 = 3 × 4
Given Number = 4864 × 9P2
Here, The first number 4864 is divisible by 4(since the last two digit is divisible) and this number's sum of digit is 22 is not divisible by 3. So, The other number which is 9P2 must divisible by 3.
Sum of Digit of 9P2 = 11+P;
Thus, P = 1.(Using the divisibility rule of 3)

Ex. If the seven - digit number 35345xy is divisible by 40, then the minimum value of $(4x + 5y)$ is:
यदि सात - अंकों की संख्या 35345xy, 40 से विभाज्य है, तो $(4x + 5y)$ का न्यूनतम मान है:

HINTS:
We know, 40 = 5 × 8.
Given Number = 35345xy
ATQ, 35345xy is divible by 40, Then last digit must be 0.So $y = 0$.
As we know, If any number is divisible by 8. Last 3 digit must be divisible by 8. In other words, 5x0 must be divisible by 8.
Thus, Minimum value of $x = 2$
Hence, $4x + 5y = 4 \times 2 + 0 = 8$

Ex. If the 8 - digit number 7y9745x2 is divisible by 72, then the value of $(2x - y)$ for the greastest value of x is:
यदि 8 अंकों की संख्या 7y9745x2, 72 से विभाज्य है, तो x के अधिकतम मान के लिए $(2x - y)$ का मान है:

HINTS:
The number 7y9745x2, is divisible by 72
Divisibility by 8 - Check last 3 digit
Divisibility by 9 - Check sum of digit
5x2 is divisible by 8 → if x = 1,5, 9
the maximum value of x is 9
The number 7y9745x2 is divisible by 9 if y = 2
Thus $x = 9$, $y = 2$
Hence, $(2x - y) = 2 \times 9 - 2 = 16$

Ex. If the 5-digit number 535ab is divisible by 3, 7 and 11, then what is the value of $(a^2 - b^2 + ab)$?
यदि 5-अंकीय संख्या 535ab, 3, 7 और 11 से विभाज्य है, तो $(a^2 - b^2 + ab)$ का मान क्या है?

HINTS:
LCM of 3, 7, 11 = 231
Divide 53599 (take the maximum possible values of a & b) by 231.
We get 7 as remainder
Now, subtract 7 from 53599 & get the correct number = 23592
$\Rightarrow a = 9, b = 2$
$\therefore a^2 - b^2 + ab = 81 - 4 + 18 = 95$

@Baka_260

Ex. If the six - digit number 479*xyz* is exactly divisible by 7,11 and 13 then {(y + z) × x} is equal to:
यदि छह अंकों की संख्या 479*xyz* 7,11 और 13 से पूर्णत: विभाज्य है तो {(y + z) × x} बराबर है:

HINTS:
LCM of 7, 11, 13 = 1001
When 3 digits of a number are repeated twice then that number will be divisible by 7, 11 and 13.
479479 is divisible by 7, 11 and 13
So, $x = 4, y = 7, z = 9$
Hence, $(y + z) \times x = (7 + 9) \times 4 = 64$

Ex. $2^{25} + 2^{26} + 2^{27}$ is divisible by
$2^{25} + 2^{26} + 2^{27}$ किससे विभाज्य है?

HINTS:
$2^{25}(2^0 + 2^1 + 2^2)$
$= 2^{25}(1 + 2 + 4) = 2^{25} \times 7$
$\Rightarrow 2^{25} + 2^{26} + 2^{27}$ is divisible by 7

Ex. How many numbers between 100 and 1000 are divisible by 17?
100 और 1000 के बीच कितनी संख्याएँ 17 से विभाज्य हैं?

HINTS:
102, 119, ... 986

$$n = \frac{986 - 102}{17} + 1$$

$$n = \frac{884}{17} + 1 = 52 + 1 = 53$$

Ex. How many numbers between 300 and 700 are divisible by 5, 6 and 8?
300 और 700 के बीच कितनी संख्या 5, 6 और 8 से विभाज्य हैं?

HINTS:
LCM of 5, 6 and 8 = 120
Numbers between 300 and 500 which are divisible by 120 = 360, 480, 600
Required number = 3.

Ex. How many numbers are there from 1 to 100 which are neither divisible by 3 nor by 5?
1 से 100 तक ऐसी कितनी संख्याएँ हैं जो ना तो 3 से और ना ही 5 से विभाजित है?

HINTS:

$100 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ (since 100 is not divisible by $3 \times 5 = 15$, let's take 90 instead of 100)

$90 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 48$

Between 91 and 100 numbers 95 & 100 are divisible by 5 whereas 93, 96 & 99 are divisible by 3. Hence there are 5 numbers which are neither divisible by 3 nor by 5.
Total = 48 + 5 = 53 numbers

Ex. How many numbers are there from 700 to 950 which are neither divisible by 3 nor by 7 ?
700 से 950 तक ऐसी कितनी संख्याएँ हैं जो ना तो 3 से और ना ही 7 से विभाजित है?

HINTS:
Numbers from 1 to 950 that are neither divisible by 3 nor by 7 = $950 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$ (since 950 is not divisible by $3 \times 7 = 21$, let's take 945 instead of 950)

$945 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = 540$

Between 946 and 950 number 948 is divisible by 3 whereas no number is divisible by 7. Hence there are 4 numbers which are neither divisible by 3 nor by 7.
Total = 540 + 4 = 544 numbers

Numbers from 1 to 699 that are neither divisible by 3 nor by 7 = $699 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$ (since 699 is not divisible by $3 \times 7 = 21$, let's take 693 instead of 699)

$693 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = 396$

Between 694 and 699 numbers 696 & 699 are divisible by 3 whereas no number is divisible by 7. Hence there are 4 numbers which are neither divisible by 3 nor by 7.
Total = 396 + 4 = 400 numbers
Numbers between 700 & 950 which are neither divisible by 3 nor by 7
= numbers between 1 & 950 which are neither divisible by 3 nor by 7 – numbers between 1 & 699 which are neither divisible by 3 nor by 7
= 544 – 400 = 144

Remainder/शेषफल

Introduction/ परिचय

Remainder is the amount left over after division when one divisor does not divide the dividend exactly.
शेषफल वह मान है जो विभाजन प्रक्रिया में जब भाजक भाज्य को पूरी तरह विभाजित नहीं करता तो शेष बच जाता है।
Let us suppose number N when divided by divisor D, leaves the remainder as R and quotient as Q.
मान लीजिए कि संख्या N को भाजक D से विभाजित करने पर शेषफल R और भागफल Q प्राप्त होता है।

Q → Quotient
Divisor → D) N → Dividend
N → Remainder

The number "N" can also be expressed as below:

$$\boxed{N = DQ + R}$$

Ex. On dividing a number by 38, the quotient is 24 and the remainder is 13, then the number is :
किसी संख्या को 38 से भाग देने पर भागफल 24 तथा शेषफल 13 आता है। वह संख्या कौन-सी है?

HINTS:
We know that,
Dividend = Divisor × Quotient + Remember
Here, Divisor = 38, Quotient = 24 and Remember = 13
∴ Required number, Dividend = 38 × 24 + 13 = 925

Properties of Remainder/शेषफल के गुण

1. Remainders are Additive/शेषफल योगात्मक होते हैं

Let us suppose $N_1, N_2, N_3, \ldots\ldots$ gives quotients $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ leaves the remainders $R_1, R_2, R_3, \ldots$ respectively, when divided by common divisor D.

मान लीजिए कि $N_1, N_2, N_3, \ldots\ldots$ को उभयनिष्ठ भाजक D से विभाजित करने पर भागफल $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ तथा शेषफल क्रमशः $R_1, R_2, R_3, \ldots$ प्राप्त होता है।

Therefore,

$N_1 = D \times Q_1 + R_1$

$N_2 = D \times Q_2 + R_2$

$N_3 = D \times Q_3 + R_3$, ... and so on.

Let S be the sum of $N_1, N_2, N_3, \ldots\ldots$

then, $S = (D \times Q_1 + R_1) + (D \times Q_2 + R_2) + (D \times Q_3 + R_3) + \ldots\ldots$

$= D \times (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots) + (R_1 + R_2 + R_3 + \ldots.)$

$= D \times K + R_1 + R_2 + R_3 \ldots\ldots$

where K is some number.

Therefore, the remainder when S is divided by D is the remainder when $R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$ is divided by D.

इसलिए, जब S को D से विभाजित किया जाता है तो शेषफल $R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$ को D से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल ही होता है।

For Example:

$$\overset{1}{\uparrow}\overset{0+1}{\uparrow\ \uparrow}\overset{1+4+1}{\uparrow\ \uparrow\ \uparrow} \quad \frac{36}{5}\Big|_R = \frac{30+6}{5}\Big|_R = \frac{21+9+6}{5}\Big|_R = \frac{6}{5}\Big|_R = 1 = \ldots\ldots$$

i.e. If use divide 36 into two or more parts and find out the individual remainder and finally add up those individual remainder to get the final remainder.

अर्थात् यदि 36 को दो या दो से अधिक भागों में विभाजित करें और अलग-अलग शेषफल ज्ञात करें और अंत में अंतिम शेष प्राप्त करने के लिए उन अलग-अलग शेषफलों को जोड़ें।

2. Remainders are Multiplicative/शेषफल गुणात्मक होते हैं

Let us suppose $N_1, N_2, N_3, \ldots$ gives the quotients $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ leaves the remainders $R_1, R_2, R_3, \ldots$ respectively, when divided by common divisor D.

मान लीजिए कि $N_1, N_2, N_3, \ldots\ldots$ को उभयनिष्ठ भाजक D से विभाजित करने पर भागफल $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ तथा शेषफल क्रमशः $R_1, R_2, R_3, \ldots$ प्राप्त होता है।

Therefore,

$N_1 = D \times Q_1 + R_1$

$N_2 = D \times Q_2 + R_2$

$N_3 = D \times Q_3 + R_3$, ... and so on.

Let P be the sum of $N_1, N_2, N_3, \ldots\ldots$

then, $P = N_1N_2N_3 \ldots.$

$= (D \times Q_1 + R_1) + (D \times Q_2 + R_2) + (D \times Q_3 + R_3) + \ldots\ldots$

$= D \times K + R_1R_2R_3 \ldots\ldots$

where K is some number.

Clearly, product of $R_1, R_2, R_3, \ldots$ is free of D, therefore the remainder when P is divided by D is the remainder when the product $R_1R_2R_3 \ldots\ldots$ is divided by D.

स्पष्ट रूप से, $R_1, R_2, R_3, \ldots$ का गुणनफल D से स्वतंत्र है, इसलिए, जब P को D से विभाजित किया जाता है तो शेषफल $R_1R_2R_3 \ldots$ को D से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल ही होता है।

For Example.

$$\overset{1}{\uparrow}\overset{3}{\uparrow} \quad \frac{361 \times 363}{12}\Big|_R = \frac{1 \times 3}{12}\Big|_R = 3$$

The remainder when 361 and 363 are divided by 12 are 1 and 3 respectively. Hence, the final remainder is the remainder when the product 1×3 is divisible by 12. Therefore final remainder = 3.

जब 361 और 363 को 12 से विभाजित किया जाता है तो शेषफल क्रमशः 1 और 3 होते हैं। अतः, अंतिम शेषफल वह शेषफल है जब गुणनफल 1×3, 12 से विभाज्य हो। इसलिए अंतिम शेष = 3

3. Concept of Negative Remainders/ऋणात्मक शेषफल की अवधारणा

Remainders by definition are non-negative in nature. Hence, even when we divide -26 by 6 we say remainder is 4 (and not-2). But, sometimes to make the calculation easy we look at the negative value of remainder.

परिभाषा के अनुसार शेषफल प्रकृति में गैर-ऋणात्मक होते हैं। इसलिए, जब हम -26 को 6 से विभाजित करते हैं तो भी हम कहते हैं कि शेषफल 4 होता है (और -2 नहीं)। लेकिन, कभी-कभी गणना को आसान बनाने के लिए हम शेषफल के ऋणात्मक मान को देखते हैं।

Let us take a example to explain the above concept more clearly. Let us write 109 as the difference of two numbers and then divide it by 11

आइए उपरोक्त अवधारणा को अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए एक उदाहरण लें। आइए हम 109 को दो संख्याओं के अंतर के रूप में लिखें और फिर इसे 11 से विभाजित करें

$$\frac{109}{11} = \frac{118-9}{11} = \frac{118}{11} - \frac{9}{11}$$

Remainder obtained from $\frac{118}{11}$ is 8 and remainder obtained from $\frac{9}{11}$ is 9.

Therefore, Net remainder = $8 - 9 = -1 + \mathbf{11} = 10$

Thus, we can say that remainder obtained = –1 when 109 divided by 11 is the number which is 1 less than a multiple of 11. Also, remainder = 10 means, same number is 10 more than the previous multiple of 11.

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि 109 को 11 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल = -1 वह संख्या है जो 11 के गुणज से 1 कम है। साथ ही, शेषफल = 10 का अर्थ है, वही संख्या 11 के पिछले गुणज से 10 अधिक है।

Ex. What is the remainder when the product of 335, 608 and 853 is divided by 13?

@Baka_260

335, 608 और 853 के गुणनफल को 13 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल क्या होगा?

HINTS:

$335 \div 13$ = Remainder = 10

$608 \div 13$ Remainder = 10

$853 \div 13$ Remainder = 8

So,

$10 \times 10 \times 8 = 800$

then,

$800 \div 13$ Remainder = 7

Ex. When positive number x, y and z are divided by 31, the reminders are 17, 24 and 27 respectively. When $(4x - 2y + 3z)$ is divided by 31, the remainder will be:
जब धनात्मक संख्या x, y और z को 31 से भाग दिया जाता है तो शेषफल क्रमशः 17, 24 और 27 होते हैं। जब $(4x - 2y + 3z)$ को 31 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्या होगा?

HINTS:

Let the number be,

$x = 31 \times 1 + 17 = 48$

$y = 31 \times 1 + 24 = 55$

$z = 31 \times 1 + 27 = 58$

Now,

$(4x - 2y + 3z) = 4 \times 48 - 2 \times 55 + 3 \times 58 = 256$

$\therefore$ Rem$\{256 \div 31\} \rightarrow$ 8

Ex. On dividing a certain number by 72 we get 11 as remainder what will be the remainder.
किसी निश्चित संख्या को 72 से भाग देने पर शेषफल 11 प्राप्त होता है, शेषफल क्या होगा यदि-

(i) If the same number is divided by 8
उसी संख्या को 8 से विभाजित किया जाए

(ii) If double of the number is divided by 6
संख्या के दोगुने को 6 से विभाजित किया जाए

(iii) If square of the number is divided by 9
उसी संख्या के वर्ग को 9 से विभाजित किया जाए

HINTS:

$72)x(a$

$\underline{11}$

$x = 72a + 11$

(i) When the number is divided by 8, then remainder

$= \dfrac{72a+11}{8} = 3$

(ii) When double of the number is divided by 6, then

remainder $= \dfrac{2(72a+11)}{6} = 4$

(iii) When square of the number is divided by 9, then remainder

$= \dfrac{(72a+11)^2}{9} = \dfrac{5184a^2+5184a+121}{9} = 4$

Some important rules of remainder
शेषफल के कुछ महत्वपूर्ण नियम

- Rem$\left\{\dfrac{(a^n+b^n)}{(a+b)}\right\} \rightarrow 0$; Where n is odd number.

Ex. Find the remainder of $\left(\dfrac{8^{371}+5^{371}}{13}\right)$.

HINTS:

Here, 8 + 5 = 13.

Thus, Remainder of the expression is 0.

- Rem$\left\{\dfrac{(a^n+b^n+c^n)}{(a+b+c)}\right\} \rightarrow 0$; Where n is odd number.

Ex. Find the remainder of $\left(\dfrac{3^{61}+2^{61}+4^{61}}{9}\right)$.

HINTS:

Here, 3 + 2 + 6 = 9.

Thus, Remainder of the expression is 0.

- Rem$\left\{\dfrac{a^n+b^n+c^n+.....}{(a+b+c)}\right\} \rightarrow 0$;

Where, a + b + c + ... and so on in Arithmetic Progression and n is odd number.

Ex. Find the remainder of the following expression

$\left(\dfrac{16^{73}+17^{73}+18^{73}+19^{73}}{70}\right)$.

HINTS:

Here, 16 + 17 + 18 + 19 are in A.P and 73 is odd number.

Thus, remainder of the expression is 0.

- Rem$\left\{\dfrac{a^n-b^n}{(a-b)}\right\} \rightarrow 0$; For all value of n.

Ex. Find the remainder of $\left(\dfrac{8^{36}-2^{36}}{6}\right)$.

HINTS:

Using concept defined above, Remainder of the expression is 0.

- Rem$\left\{\dfrac{a^n-b^n}{(a+b)}\right\} \rightarrow 0$; Where n is even number.

Ex. Find the remainder of $\left(\dfrac{7^{24}-4^{24}}{11}\right)$.

HINTS:

Using concept defined above, Remainder of the expression is 0.

- Rem$\left\{\dfrac{(a+1)^n}{a}\right\} \rightarrow 1$; For all value of n.

@Baka_260

Ex. Find the remainder of $\frac{74^{25}}{73}$.

HINTS:

Using concept explained above, the value of expression is 1.

✍ $\text{Rem}\left\{\frac{(a-1)^n}{a}\right\} \to 1$; When n is even number.

$\text{Rem}\left\{\frac{(a-1)^n}{a}\right\} \to (a-1) \text{or} -1$; When n is odd number

Ex. Find the remainder of the expression $34^{282} \div 35$.

HINTS:

$34^{282} \div 35 = (35\text{-}1)^{282} \div 35 \to 1$

Ex. Find the remainder of the expression $34^{281} \div 35$.

HINTS:

$34^{281} \div 35 = (35\text{-}1)^{281} \div 35 \to (-1)$ or $35 - 1 = 34$

Ex. If 2^{31} is divided by 5, then what will be the remainder?

यदि 2^{31} को 5 से विभाजित किया जाए तो शेषफल क्या होगा?

HINTS:

$2^{31} \div 5 = (2^4)^7 \times 2^3 \div 5 = 16^7 \times 2^3 \div 5 = 8 \div 5 = 3$

Ex. $(7^{19} + 2)$ is divided by 6, the remainder will be :

$(7^{19} + 2)$ को 6 से विभाजित करने पर शेष प्राप्त होगा:

HINTS:

$\frac{7^{19}}{6} + \frac{2}{6} = 1 + 2 = 3$

Ex. $9^6 - 11$ is divided by 8 would leave a remainder of :

$9^6 - 11$ को 8 से विभाजित करने पर शेषफल प्राप्त होगा :

HINTS:

$= \frac{9^6}{8} - \frac{11}{8} = \frac{1-3}{8} = \frac{-2}{8}$ = Remainder = 8 – 2 = 6

✍ **Fermat's Remainder Theorem:** Let N and P are two co-prime numbers. In other words HCF (N, P) = 1

मान लीजिए N और P दो सह-अभाज्य संख्याएँ हैं। दूसरे शब्दों में HCF (N, P) = 1

The remainder obtained when N^{P-1} is divided by P is always 1.

N^{P-1} को P से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल हमेशा 1 होता है।

Therefore, $\frac{N^{P-1}}{P} = 1$ provided HCF (N, P) = 1

Using fermat's remainder theorem we can directly say that Remainder of $\frac{3^4}{5}$ = Remainder of $\frac{4^6}{7}$ = Remainder of $\frac{5^6}{7} = 1$

✍ **Euler's Theorem of Remainder :** If P and Q are two numbers co-prime to each other, i.e. HCF (P, Q) = 1 and $Q = a^x b^y c^z$ .....

यदि P और Q दो सह-अभाज्य संख्याएँ हैं। दूसरे शब्दों में HCF (P, Q) = 1 और $Q = a^x b^y c^z$ .....

Remainder $\left[\frac{P^E}{Q}\right] = 1$,

Where $E = N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$ ..... and is known as Euler's number.

जहाँ $E = N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$.... को यूलर संख्या कहते है।

a, b, c ..... are prime factors of Q.

a, b, c ....., Q की अभाज्य गुणखण्ड है।

Lets understand the Eluer's theorem by analysing the question given below.

आइए नीचे दिए गए प्रश्न का विश्लेषण करके Eluer's के प्रमेय को समझें।

Ex. Find the remainder when 11^{97} is divided by 7.

11^{97} को 7 से विभाजित करने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

Step-by-step solution of the given questions using Euler's theorem.

Eluer's का उपयोग करके दिए गए प्रश्न का चरण-दर-चरण समाधान।

Step1. 7 and 11 are co-prime to each other, therefore we can apply Euler's theorem here.

7 और 11 एक दूसरे के सह-अभाज्य हैं,. इसलिए हम यहां Eluer's प्रमेय लागू कर सकते हैं।

Euler number of 7 is: $E_7 = 7 \times \left(1-\frac{1}{7}\right) = 6$

Step 2. Remainder $\left[\frac{11^{97}}{7}\right]$

$= \text{Remainder}\left[\frac{(11^6)^{16} \times 11}{7}\right] = \text{Remainder}\left[\frac{1 \times 11}{7}\right] = 4$

Important point to note/ ध्यान देने योग्य महत्वपूर्ण बिंदु

For all the prime numbers, Euler number will be the number one less then given prime number.

सभी अभाज्य संख्याओं के लिए, यूलर संख्या दी गई अभाज्य संख्या से एक कम संख्या होगी।

$E_5 = 5 \times \left(1-\frac{1}{5}\right) = 4$

$E_7 = 7 \times \left(1-\frac{1}{7}\right) = 6$

$E_{11} = 11 \times \left(1-\frac{1}{11}\right) = 10$

✍ **Wilson's Remainder Theorem:** If P is a prime number then (P - 1)! + 1 is divisible by P. In other words, remainder obtained when (P-1)! is divided by P is -1.

यदि P एक अभाज्य संख्या है तो (P - 1)! + 1, P से विभाज्य होता है। दूसरे शब्दों में, (P-1)! को P से विभाजित करने पर -1 शेषफल प्राप्त होता है।

@Baka_260

Ex. Find the remainder when 40! is divided by 41
जब 40! को 41 से विभाजित किया जाए तो शेषफल ज्ञात कीजिए
Solution: Using the Wilson's theorem,

$$\text{Remainder}\left[\frac{(41-1)!}{41}\right] = -1 = 41 + (-1) = 40$$

Few Important Results/कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

1. $(x + k)$ is the factor of a polynomial $f(x)$ is $f(-k) = 0$
$(x + k)$ किसी बहुपद $f(x)$ का गुणनखण्ड तब होगा जब $f(-k) = 0$

2. $(ax + k)$ is the factor of a polynomial $f(x)$ is $f\left(-\frac{k}{a}\right) = 0$
$(ax + k)$ किसी बहुपद $f(x)$ का गुणनखण्ड तब होगा जब $f\left(-\frac{k}{a}\right) = 0$

3. $(ax - k)$ is the factor of a polynomial $f(x)$ is $f\left(\frac{k}{a}\right) = 0$
$(ax - k)$ किसी बहुपद $f(x)$ का गुणनखण्ड तब होगा जब $f\left(\frac{k}{a}\right) = 0$

4. $(x - \alpha)(x - \beta)$ is the factor of a polynomial $f(x)$ is $f(\alpha) = 0$ and $f(\beta) = 0$
$(x - \alpha)(x - \beta)$ किसी बहुपद $f(x)$ का गुणनखण्ड तब होगा जब $f(\alpha) = 0$ तथा $f(\beta) = 0$

5. If a polynomial $f(x)$ is divided by $(x + k)$, the remainder is the value of $f(x)$ at $x = -k$ i.e. $f(-k)$
यदि किसी बहुपद $f(x)$ को $(x + k)$ से विभाजित करते है, तो $x = -k$ पर $f(x)$ अर्थात् $f(-k)$ का मान ही शेषफल होता है।

6. If a polynomial $f(x)$ is divided by $(k - ax)$, the remainder is equal to the value of $f(x)$ at $x = \frac{k}{a}$ i.e. $f\left(\frac{k}{a}\right)$
यदि किसी बहुपद $f(x)$ को $(k - ax)$ से विभाजित करते है, तो $x = \frac{k}{a}$ पर $f(x)$ अर्थात् $f\left(\frac{k}{a}\right)$ का मान ही शेषफल होता है।

Concept of Successive Division/क्रमिक विभाजन की अवधारणा

Lets take an example to explain the concept of Successive Division
आइए क्रमिक विभाजन की अवधारणा को समझने के लिए एक उदाहरण लें
Suppose a number 'N' successively divided by 3, 4 and 7 the remainder obtained is 2, 1 and 4 respectively.
मान लीजिए कि किसी संख्या 'N' को क्रमिक रूप से 3, 4 और 7 से विभाजित करने पर शेषफल क्रमशः 2, 1 और 4 प्राप्त होता है।
If we need to find the value of N, we need to follow the below steps.
यदि हमें N का मान ज्ञात करना है, तो हमें नीचे दिए गए चरणों का पालन करना होगा।

Divisor	3		4		7
	(+)	(×)	(+)	(×)	
Remainder	2		1		4

Step-1: Multiply 4 × 4 = 16
Step-2: Add 1 to the 16 i.e. 17
Step-3: Multiply the result of step 2 by 3, we get 51
Step-4: Add 2 to it i.e. (51 +2) = 53
Thus, the value of N = 53
Now, Let's look at how successive division worked.

Quotient	Remainder
$\frac{53}{3} = 17$	2
$\frac{17}{4} = 4$	1
$\frac{4}{7} = 0$	4

The above example clearly explain the concept of successive Division.
उपरोक्त उदाहरण क्रमिक विभाजन की अवधारणा को स्पष्ट रूप से समझाता है।

Ex. When a number is successively divided by 3, 4 and 7, the remainders obtained are 2, 3 and 5, respectively. What will be the remainder when 84 divided the same number?
जब किसी संख्या को क्रमशः 3, 4 और 7 से विभाजित किया जाता है, तो क्रमशः 2, 3 और 5 शेषफल प्राप्त होता है। जब उसी संख्या को 84 से विभाजित किया जाए, तो प्राप्त शेषफल ज्ञात करें।
HINTS:

Divisor	3		4		7
	(+)	(×)	(+)	(×)	
Remainder	2		3		5

Step 1. Multiply 5 × 4 = 20
Step 2. Add 3 to the 20 i.e. 23
Step 3. Multiply the result of step 2 by 3, we get 69
Step 4. Add 2 to it i.e. (69 +2) = 71
Thus, the value of N = 71

Least number to be added or subtracted to given number so it becomes divisible of a divisor.
किसी दी हुई संख्या में सबसे छोटी संख्या इस प्रकार जोड़ना/घटाना कि यह किसी भाजक से विभाजित हो जाए।

Ex. What is least number to be added to 42072 to get a number which is divisible by 93?
42072 में वह कौन-सी न्यूनतम संख्या जोड़ी जाए कि प्राप्त संख्या 93 से विभाजित हो जाए?

$$93\overline{)42072}(452$$
372
487
465
222
186
36

So least number to be added is/इसलिए, सबसे छोटी जोड़ी जा सकने वाली संख्या = 93 − 36 = 57

Ex. What is the least number to be substracted from 25809 to get a number exactly divisibly by 139 is.

139 से पूर्णत: विभाज्य संख्या प्राप्त करने के लिए 25809 में से घटाई जाने वाली सबसे छोटी संख्या क्या है?

HINTS:

25809 ÷ 139

We get quotient = 185 and Remainder = 94

So, If we subtract 94 from the given number 25809 i.e.

= 25809 – 94 = 25715 is exactly divisible by 139.

Concept of Number as a difference of squares
वर्गों के अंतर के रूप में संख्या की अवधारणा

We know that/हम जानते हैं,

If a number N can be written as the product of two number (a × b) then

यदि एक संख्या N को दो संख्याओं (a × b) के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है

$$N = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Thus, To write N as the difference of two square we have to first write N as the product of two numbers.

इस प्रकार, N को दो वर्गों के अंतर के रूप में लिखने के लिए हमें पहले N को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखना होगा।

Lets take an example to explain/आइए समझने के लिए एक उदाहरण लेते हैं

$$N = x^2 - y^2$$

Suppose N = 24 is given. We have to find out in how many ways N can be written as difference of two square number, considering we need to find natural number solution for the same.

मान लीजिए N = 24 दिया गया है। और हमें यह ज्ञात करना है कि कितने तरीकों से N को दो संख्याओं के वर्गों के अंतर के रूप में लिखा जा सकता है।

Step-1: Firstly, we have to think in how many ways we can write 24 as (Odd × Odd) or (Even × Even)

सबसे पहले, हमें यह सोचना होगा कि हम 24 को कितने तरीकों से (विषम × विषम) या (सम × सम) लिख सकते हैं।

Therefore, E × E

24 = 12 × 2 = 6 × 4

It is not possible to write 24 as (Odd × Odd)

Step-2:

$$24 = 12 \times 2 = \left(\frac{12+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{12-2}{2}\right)^2 = 7^2 - 5^2$$

$$\text{Also, } 24 = 6 \times 4 = \left(\frac{6+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{6-4}{2}\right)^2 = 5^2 - 1^2$$

Hence, we can say that there are two ways in which N = 24 can be written as the difference of square of two natural number.

इसलिए, हम कह सकते हैं कि ऐसे दो तरीके हैं जिनसे N = 24 को दो प्राकृतिक संख्याओं के वर्ग के अंतर के रूप में लिखा जा सकता है।

Ex. How many pairs of whole numbers are there such that difference of their square is 36?

पूर्ण संख्याओं के ऐसे कितने जोड़े हैं जिनके वर्ग का अंतर 36 है?

HINTS:

36 can be written as the product of (Odd × Odd)

or, (Even × Even) in two ways.

i.e. $36 = 2 \times 18 = 10^2 - 8^2$

$= 6 \times 6 = 6^2 - 0^2$

Thus, Number of such pairs = 2

Note:

1. Prime numbers other than 2 i.e. odd prime numbers has exactly one natural number solution as a difference of two squares.

2 के अलावा अन्य सभी अभाज्य संख्याएँ अर्थात् सभी विषम अभाज्य संख्याओं को दो संख्याओं के वर्गों के अंतर के रूप में केवल एक तरीके से लिखा जा सकता है।

For Example: $3 = \underset{\Uparrow}{\frac{3\times1}{}} = 2^2 - 1^2$

Only one way

2. 4k + 2 numbers i.e. even number not divisible by 4 cannot be written as difference of two square for the set of natural numbers.

(4k + 2) प्रकार की संख्याएँ अर्थात् 4 से विभाज्य न होने वाली सम संख्या को दो संख्याओं के वर्गों के अंतर के रूप में नहीं लिखा जा सकता है।

Arithmetic Progresion/समांतर श्रेणी

A succession of numbers is said to be in arthmetic progression (A.P.) if the difference between any two consecutive term is constant. This constant is called common difference (c.d.) and generally it is denoted by d.

यदि किन्हीं दो लगातार पदों के बीच का अंतर स्थिर है, तो संख्याओं के अनुक्रम को समान्तर श्रेणी (A.P.) में कहा जाता है। इस स्थिरांक को सर्वान्तर कहा जाता है और सामान्यत: इसे d से दर्शाया जाता है।

Standard Form

a + (a + d) + (a + 2d)+.....

Where a be the first term and d is the common difference of the sequence of an A.P, then-

जहां किसी समान्तर श्रेणी के अनुक्रम का a प्रथम पद तथा d सर्वान्तर है तो-

(i) n^{th} term of an A.P.

समांतर श्रेणी का n वां पद

$t_n = a + (n-1)d$

(ii) The sum of the first n terms of an A.P.

समांतर श्रेणी प्रथम n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = \frac{n}{2}\left[a+\underbrace{a+(n-1)d}_{t_n}\right] = \frac{n}{2}[a+t_n]$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[\text{First term} + \text{Last term}]}$$

Arthmetic Mean/समान्तर माध्य

When three or more numbers are in A.P., then the numbers between the first and last terms are known as arthmetic means (A.Ms) between them.

जब तीन या अधिक संख्याएँ समान्तर श्रेणी में होती हैं, तो पहले और अंतिम पदों के बीच की संख्याओं को उनके बीच के अंकगणितीय माध्य के रूप में जाना जाता है।

(i) If A be the AM between two numbers a and b then,/

यदि A दो संख्याओं a और b के बीच का अंकगणितीय माध्य है, तो,

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(a+b)}$$

(ii) In general, if a, b, c, ... n terms are in A.P., then their/सामान्यत:, यदि a, b, c, ... n पदों तक, समान्तर श्रेणी में हैं तो,

$$\boxed{AM = \frac{a+b+c+....n\,\text{terms}}{n}}$$

(iii) Three consecutive terms/तीन क्रमागत पद

= a – d, a, a + d

(iv) Four consecutive terms/चार क्रमागत पद

= a–3d, a–d, a+d, a+3d

Geometric Progresion/गुणोत्तर श्रेणी

A succssion of numbers is said to be in G.P. If the ratio of its each term to its previous term is always constant. This constant ratio is called its common ratio and is generally denoted by r.

संख्याओं के अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेणी में कहा जाता है। यदि इसके प्रत्येक पद का पिछले पद से अनुपात सदैव स्थिर रहता है। इस स्थिर अनुपात को इसका सर्वानुपात कहा जाता है और इसे सामान्यत: r द्वारा दर्शाया जाता है।

Standard From

$a + ar + ar^2 + ...$

Where a be the first term and r is the common ratio of the sequence of a G.P. then-

जहां किसी गुणोत्तर श्रेणी के अनुक्रम का a प्रथम पद तथा सार्वानुपात r है तो

- n^{th} term of a G.P.

  गुणोत्तर श्रेणी का n वां पद $t_n = ar^{(n-1)}$

- The sum of the first n terms of a G.P.

  गुणोत्तर श्रेणी प्रथम n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}; r \neq 1 \text{ and } r < 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}; r \neq 1 \text{ and } r > 1$$

If the common ratio is equal to 1, then the sum of the first n term of the GP is given by/यदि सर्वानुपात एक के बराबर हो तो गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल $S_n = na$

Geometric Mean/गुणोत्तर माध्य

When three or more numbers are in G.P., then the numbers between the fist and last terms are known as geometric means (G.M's) between them.

जब तीन या अधिक संख्याएँ गुणोत्तर श्रेणी में होती हैं, तो पहले और अंतिम संख्याओं के बीच की संख्याओं को उनके गुणोत्तर माध्य के रूप में जाना जाता है।

(i) If G be the GM between two numbers a and b then/

यदि G दो संख्याओं a और b के बीच का गुणोत्तर माध्य है, तो,

$$\boxed{G = \sqrt{ab}}$$

Ex. Find Geometric mean of 4, 2 & 27

4, 28 और 27 का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$GM = \sqrt[3]{abc}$

$GM = \sqrt[3]{4\times2\times27} = 2\times3 = 6$

(ii) In general, if $a_1, a_2, a_3, ...$ n terms are in G.P., then/ सामान्यत:, यदि $a_1, a_2, a_3, ...$ n पदों तक, गुणोत्तर श्रेणी में हो तो,

$$\boxed{GM = (a_1.a_2.....a_n)^{\frac{1}{n}}}$$

- Three consecutive terms/तीन क्रमागत पद

  = a, ar, ar^2 or $\frac{a}{r}, a, ar$

- Four consecutive terms/चार क्रमागत पद

  = a, ar, ar^2, ar^3 or $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, ar, ar^2$

Some Standard Formulae for Addition
जोड़ के लिए कुछ सामान्य सूत्र

- Sum of first 'n' natural numbers

  प्रथम n प्राकृतिक संख्या का योगफल

$$1 + 2 + 3 + ...+ n = \frac{n(n+1)}{2}$$

@Baka_260

- Sum of the squares of first 'n' natural numbers.

  प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योगफल

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Sum of the cubes of first 'n' natural numbers.

  प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योगफल

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = \left\{n\frac{(n+1)}{2}\right\}^2$$

- Sum of even integers/सम पूर्णांकों का योगफ़ल

  $2 + 4 + 6\ldots\ldots\ldots + 2n = n\,(n + 1)$

- Sum of odd integers/विषम पूर्णांकों का योगफल

  $1 + 3 + 5 + + \ldots\ldots\ldots\ldots (2n - 1) = n^2$

Binary Number/द्विआधारी संख्या

In binary number, the radix(r) or base is 2 and the number represents in terms of 2 digits in binary number are 0's and1's.

बाइनरी संख्या में मूलांक(r) या आधार 2 होता है और संख्या 2 अंकों के रूप में प्रदर्शित होती है। बाइनरी संख्याओं में अंक 0 और 1 होते हैं।

Ex. $(10101110)_2 \rightarrow (\text{number})_{\text{base or radix}}$

- **Decimal Number System/दशमलव संख्या प्रणाली**

In decimal number, the base or radix is 10 and the number represents in terms of 10 digits. The digits in decimal numbers are 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

दशमलव संख्या में आधार या मूलांक 10 होता है और संख्या 10 अंकों के रूप में प्रदर्शित होती है। दशमलव संख्याओं में अंक 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 है

Ex. $(328)_{10}$, $(440)_{10}$ etc.

- **Conversion of Decimal To Binary Number**

  दशमलव को बाइनरी संख्या में परिवर्तित करना

Step I : Divide the number by 2./संख्या को 2 से विभाजि करें।

Step II : Write the remainder at every step in the braces either its 0 or 1 because our divisor is 2.

ब्रेसिज़ में प्रत्येक चरण पर शेषफल या तो 0 या 1 लिखें क्योंकि हमारा भाजक 2 है।

Step III : Repeat the steps until the quotient becomes less than 2.

चरणों को तब तक दोहराएँ जब तक कि भागफल 2 से कम न हो जाए।

Step IV: Now, arrange all the remainders from last to first.

अंतिम से पहले तक सभी शेषफलों को व्यवस्थित करें।

Ex. Convert $(127)_{10}$ to binary number.

2	127	
2	63	1
2	31	1
2	15	1
2	7	1
2	3	1
	1	1

Arrange all the remainders from last to first

$\therefore\ (127)_{10} = (1111111)_2$

Ex. Convert $(576)_{10}$ to binary number.

2	576	
2	288	0
2	144	0
2	72	0
2	36	0
2	18	0
2	9	0
2	4	1
2	2	0
	1	0

Arrange all the remainders from last to first

$(576)_{10} = (1001000000)_2$

- **Conversion of Fraction Decimal Number into Binary Number System**

  भिन्न दशमलव संख्या का बाइनरी संख्या प्रणाली में रूपांतरण

Fractional decimal number can be converted into binary number by the successive multiplication, by 2. After every multiplication note that the integer parts and procedure of multiplication is continued until the fractional part of the products becomes zero, sometimes the fractional part does not become zero in that case, the multiplication process is stopped after getting four or five coefficients or till the number occurs.

भिन्नात्मक दशमलव संख्या को 2 से क्रमिक गुणन द्वारा द्विआधारी संख्या में परिवर्तित किया जा सकता है। प्रत्येक गुणन के बाद ध्यान दें कि पूर्णांक भाग और गुणन की प्रक्रिया तब तक जारी रहती है जब तक कि गुणनफल का भिन्नात्मक भाग शून्य न हो जाए, कभी-कभी भिन्नात्मक भाग शून्य नहीं हो पाता है उस स्थिति में, चार या पाँच गुणांक प्राप्त होने पर या गुणन प्रक्रिया तब तक रोक दी जाती है जब तक कि गुणनफल का भिन्नात्मक भाग शून्य न हो जाए।

Ex. $(17.125)_{10} = (?)_2$

First, convert the integer part

2	17	
2	8	1
2	4	0
2	2	0
	1	0

Convert the fractional part

$125 \times 2 = 0.250 \quad 0$

$.250 \times 2 = 0.500 \quad 0$

$.500 \times 2 = 1.000 \quad 1$

$(17.125)_{10} = (10001.001)_2$

Conversion of Binary Number To Decimal Number/
बाइनरी संख्या का दशमलव संख्या में रूपांतरण

Since, the binary number is a positional number system. That means the each bit or digit of binary number multiply with their position Weight to obtain the conversion of binary to decimal number.

Position weight from right to left are 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7,.....2^n and for the fractional part are 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}... from left to right.

चूँकि, बाइनरी संख्या एक स्थितीय संख्या प्रणाली है। इसका मतलब है कि बाइनरी का दशमलव संख्या में रूपांतरण प्राप्त करने के लिए बाइनरी संख्या के प्रत्येक बिट या अंक को उनकी स्थिति भार से गुणा करें। दाएं से बाएं स्थिति वजन 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7,.....2^n और भिन्नात्मक भाग के लिए बाएं से दाएं 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}....हैं।

Ex. $(11001)_2$

HINTS:

Decimal value = $(1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) = 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 25$

Ex. $(11111)_2$

HINTS:

Decimal value = $(1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$

$= 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$

Ex. $(1011001.0101)_2 = (?)$

For integer part

$1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 64 + 0 + 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 89$

For fractional part

$0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} = 0 + 0.25 + 0 \times 0.0625 = 0.3125$

$(1011001.0101)_2 = (89.3125)_{10}$

Ex. What is $(1110011)_2 \div (10111)_2$ equal to ?

$(1110011)_2 \div (10111)_2$ किसके बराबर है?

HINTS:

We have,

$(1110011)_2 \div (10111)_2$

$(1110011)_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 + 0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 64 + 32 + 16 + 2 + 1 = 115$

$(10111)_2 = 1 \times 2^4 + 0 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 16 + 4 + 2 + 1 = 23$

$= \frac{115}{23} = 5 = (101)_2$

☆☆☆☆☆

@BaKa_260

SIMPLIFICATION

सरलीकरण

07

CONCEPT-01

(BODMAS Rule)

This rule is the basic principle of solving algebraic or numerical expressions.

यह नियम बीजगणितीय या संख्यात्मक व्यंजकों को हल करने का मूल सिद्धांत है।

Order to solve/हल करने के क्रम

B → Bracket (कोष्ठक)

O → of (का)

D → Division (भाग)

M → Multiplication (गुणा)

A → Addition (जोड़)

S → Subtraction (घटाव)

V → Vinculum (रेखा कोष्ठक)

Types of Bracket & Solving order

कोष्ठक के प्रकार एवं हल करने के क्रम

(i) $\overline{\quad}$ → Vinculum/Line/Bar bracket (रेखा कोष्ठक)

(ii) ( ) → Small bracket(छोटा कोष्ठक)

(iii) { } → Curly bracket(मंझला कोष्ठक)

(iv) [ ] → Square bracket(बड़ा कोष्ठक)

Ex. Simplify the expression/सरल कीजिए।

$25-[16-\{14-[\overline{8-3}]\}]$

HINTS:

$25-[16-\{14-[18-\overline{8-3}]\}]$

$\Rightarrow 25-[16-\{14-[18-11]\}]$

$\Rightarrow 25-[16-\{14-7\}]$

$\Rightarrow 25-[16-7]$

$\Rightarrow 25-[9] \Rightarrow 16$

CONCEPT-02

(Fraction Series/भिन्नात्मक श्रेणी)

- $\frac{1}{a\times b}=\frac{1}{(b-a)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$
- $\frac{1}{a\times b\times c}=\frac{1}{(c-a)}\left[\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}\right]$
- $\frac{1}{a\times b\times c\times d}=\frac{1}{(d-a)}\left[\frac{1}{abc}-\frac{1}{bcd}\right]$

Ex. $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+.....+\frac{1}{199\times201}$

HINTS:

$$\text{Sum}=\frac{1}{\text{difference of terms}}\left[\frac{1}{\text{first term}}-\frac{1}{\text{last term}}\right]$$

$$\text{Sum}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{201}\right]=\frac{100}{201}$$

Ex. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}$

HINTS:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}$

$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}$

$$\text{Sum}=\frac{1}{1}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{9}\right]=\frac{8}{9}$$

Ex. If series is

$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+.....+\frac{1}{10\times11\times12}$

HINTS:

$$\text{Sum}=\frac{1}{2\times\text{diff. of term}}\left[\frac{1}{\text{first three terms}}-\frac{1}{\text{last two term}}\right]$$

$$\text{Sum}=\frac{1}{2\times1}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{12}\right]=\frac{11}{24}$$

Ex. If series is

$\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{2\times3\times4\times5}+\frac{1}{3\times4\times5\times6}+....+\frac{1}{22\times23\times24\times25}$

HINTS:

$$\text{Sum}=\frac{1}{3\times\text{diff. of term}}\left[\frac{1}{\text{first three terms}}-\frac{1}{\text{last three term}}\right]$$

$$\text{Sum}=\frac{1}{3\times1}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{25}\right]=\frac{24}{75}$$

@Bakas_by_Aditya Ranjan sir

$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\ldots\ldots\ldots\ldots+n(n+1)$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Ex. $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\ldots\ldots\ldots\ldots+10\times11$

HINTS:

$\frac{10\times11\times12\times13}{4}=4290$

Ex: $\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)\right]$

HINTS:

$\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)\right]$

$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{88}{99}\times\frac{99}{100}=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$

Note: First term के N^r को Last term के D^r से multiply करके direct अंतिम उत्तर प्राप्त कर सकते है।

Ex: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)=?$

HINTS:

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$

$=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{10^2-1}{10^2}\right)$

$=\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\times\frac{15}{16}\times\ldots\ldots\ldots\times\frac{99}{100}$

$=\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\times\frac{15}{16}\times\frac{24}{25}\times\frac{35}{36}\times\frac{48}{49}\times\frac{63}{64}\times\frac{80}{81}\times\frac{99}{100}=\frac{11}{20}$

Ex. Value of following series is:

निम्नलिखित श्रृंखला का मान है:

$\frac{5}{2^2\cdot3^2}+\frac{7}{3^2\cdot4^2}+\frac{9}{4^2\cdot5^2}+\frac{11}{5^2\cdot6^2}+\frac{13}{6^2\cdot7^2}+\frac{15}{7^2\cdot8^2}$

$+\frac{17}{8^2\cdot9^2}+\frac{19}{9^2\cdot10^2}$

HINTS:

The term $\frac{5}{2^2\cdot3^2}$ can be break down into $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}$.

Similar pattern will continue, so we can write the whole series as follows:

$=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}$

$+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}-\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}$

$=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{10^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{100}=\frac{25-1}{100}=\frac{24}{100}=\frac{6}{25}$

CONCEPT-03

(Comparison of Fractions)

Ex. Write in descending order:

अवरोही क्रम में लिखें:

$\frac{8}{9},\frac{9}{11},\frac{7}{9},\frac{2}{3},\frac{3}{5}$

HINTS:

Clearly, $\frac{9}{11}>\frac{7}{9}>\frac{3}{5}$ [Same difference] and $\frac{8}{9}>\frac{2}{3}$

Now,

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\Rightarrow10>9$

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{9}\Rightarrow18<21$

$\frac{8}{9}\times\frac{7}{9}\Rightarrow72>63$

$\frac{8}{9}\times\frac{9}{11}\Rightarrow88>81$

Descending order is :-

$\frac{8}{9}>\frac{9}{11}>\frac{7}{9}>\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$

Ex. The greatest value among the fractions.

निम्नलिखित में से सबसे बड़ी भिन्न कौन-सी है।

$\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{5}{6},\frac{3}{4}$ is:

$\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}\Rightarrow6<7$

$\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}\Rightarrow6<15$

$\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\Rightarrow20>18$

So $\frac{5}{6}$ is greatest fraction.

CONCEPT-04

(Continuous Fraction/सतत भिन्न)

Ex. $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}}}}$

Step-1: First write the last term $\left(\frac{2}{3}\right)$

चरण-1: सबसे पहले अंतिम पद $\left(\frac{2}{3}\right)$ लिखें

Step-2: Write '2' first in the last term and then write '3'

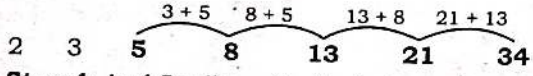
चरण-2: अंतिम पद में पहले '2' लिखें और फिर '3' लिखें

2 3

@Bakshi by Aditya Ranjan sir

Step-3: As many times as '1' is given in the question immediate preceding number will be added to the next number.

चरण-3: जितनी बार प्रश्न में '1' दिया हो उतनी बार तुरंत पिछले वाले संख्या को अगले संख्या में जोड़ें।



Step-4: And finally, write the last number as a fraction with the number immediately preceding it.

चरण-4: और अंत में, अंतिम संख्या को ठीक पूर्ववर्ती संख्या के साथ भिन्न के रूप में लिखें।

Required answer = $\frac{34}{21}$

Ex. $1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\frac{2}{3}}}}$

Hints:

Step-1: First write the last term

चरण-1: सबसे पहले अंतिम पद लिखें

$\frac{2}{3}$

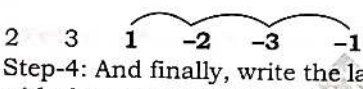
Step-2: Write '2' first in the last term and then write '3'

चरण-2: अंतिम पद में पहले '2' लिखें और फिर '3' लिखें

2 3

Step-3: Then immediately subtract the number from the previous one to the next one.

चरण-3: फिर तुरंत पिछले वाले नंबर को अगले नंबर में घटाये।



Step-4: And finally, write the last number as a fraction with the number immediately preceding it.

चरण-4: और अंत में, अंतिम संख्या को ठीक पूर्ववर्ती संख्या के साथ भिन्न के रूप में लिखें।

Required answer = $\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

Ex. $1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\frac{1}{4}}}$

Step-1: First write the last term

चरण-1: सबसे पहले अंतिम पद लिखें

$\frac{1}{4}$

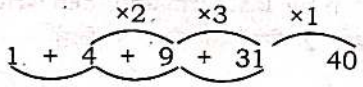
Step-2: Write '1' first in the last term and then write '4'

चरण-2: अंतिम पद में पहले '1' लिखें और फिर '4' लिखें

1 4

Step-3: Then immediately add the previous number by multiplying it by the next number.

चरण-3: फिर तुरंत पिछले वाले नंबर को अगले नंबर में गुणा करके जोड़ें।



Step-4: And finally, write the last number as a fraction with the number immediately preceding it.

चरण-4: और अंत में, अंतिम संख्या को ठीक पूर्ववर्ती संख्या के साथ भिन्न के रूप में लिखें।

Required answer = $\frac{40}{31}$

CONCEPT-05

($a\frac{b}{c}$ Types of numbers/प्रकार की संख्याएं)

(a) If denominator of a number same as multiplier

यदि किसी संख्या का हर उसके गुणज के समान हो तो

Ex. $999\frac{994}{999}\times 999$ (Same)

Add 5 in 994 so it becomes 999

994 में 5 जोड़ने से यह 999 हो जाती है

$999\frac{(994+5)}{999}\times 999$

$= (999 + 1) \times 999 = 999000$

Now substrate 5

$= 999000 - 5 = 998995$

(b) If difference between numerated and denominator is 1.

यदि अंश और हर के बीच का अंतर 1 हो तो

Ex. $\frac{1}{8}+999\frac{791}{792}\times 99$

Here $792 - 791 = 1$ so we can write $\frac{791}{792}=1-\frac{1}{792}$

$=\frac{1}{8}+\left(999+1-\frac{1}{792}\right)\times 99$

$=\frac{1}{8}+99000-\frac{99}{792}=99000$

(c) Series Type/श्रेणी प्रकार

Ex. $999\frac{1}{5}+999\frac{2}{5}+.....+999\frac{4}{5}$

$999\times 4+\frac{1+2+3+4}{5}$

$=(400-4)+\frac{(4\times 5)/2}{5}$

$= 3996 + 2 = 3998$

Ex. $99\frac{1}{11}+99\frac{2}{11}+.....+99\frac{10}{11}$

$=99\times 10+\frac{10}{2}=995$

$\left(1+2+3+....+10=\frac{10\times 11}{2}\right)$

@Bakai by Aditya Ranjan sir

CONCEPT-06

(Bar Type Questions/बार वाले प्रश्न)

Ex. $0.7777..... \infty = 0.\overline{7}$

Let $x = 0.777.....\infty$

$10x = 7.777.....\infty$

Subtract (1) from (2)

$9x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$

Ex. $0.535353.....\infty$

$= \frac{53}{99}$

Ex. $0.28383..... \infty = 0.28\overline{3}$

Let $x = 0.2838383.....\infty$

$10x = 2.838383.....\infty$ .....(1)

$1000x = 283.838383.....\infty$ .....(2)

Subtract (1) from (2)

$990x = 281$

$x = \frac{281}{990}$

Ex. $0.5\overline{73}$

$= \frac{573-5}{990} = \frac{568}{990}$

Ex. $0.38\overline{7}$

$= \frac{387-38}{900} = \frac{349}{900}$

Ex. $0.00\overline{3} = \frac{3}{900} = \frac{1}{300}$.

Ex. The value of $11.\overline{4} + 22.5\overline{67} - 33.5\overline{9}$ is:

$11.\overline{4} + 22.5\overline{67} - 33.5\overline{9}$ का मान है?

HINTS:

$\left(11+\frac{4}{9}\right)+\left(22+\frac{567-5}{990}\right)-\left(33+\frac{59-5}{90}\right)$

$\frac{4}{9}+\frac{562}{990}-\frac{54}{90}$

$\frac{440+562-594}{990} = \frac{1002-594}{990} = \frac{408}{990} = 0.41\overline{2}$

Ex. If $A = 0.3\overline{12}, B = 0.4\overline{15}$ and $C = 0.30\overline{9}$, then what is the value of A + B + C?

यदि $A = 0.3\overline{12}, B = 0.4\overline{15}$ तथा $C = 0.30\overline{9}$ है, तो A + B + C का मान कितना है?

HINTS:

$A + B + C = \frac{312-3}{990} + \frac{415-4}{990} + \frac{309-30}{900}$

$= \frac{309+411}{990} + \frac{279}{900} = \frac{720}{990} + \frac{279}{900}$

$= \frac{80}{110} + \frac{31}{100} = \frac{800+341}{1100} = \frac{1141}{1100}$

Surds and Indices/करणी और घातांक

Indices/घातांक

Power is greater than 1/घात हमेशा 1 से अधिक होती है

Surds/करणी

Power is less than 1/घात हमेशा 1 से कम होती है

Ex. $5^{7/3}$, Hence 7 is indices and 1/3 is surds/$5^{7/3}$ में 7 घातांक हैं तथा 1/3 करणी है

Laws of Indices/घात के नियम

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iv) $(ab)^n = a^n b^n$

(v) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ (vi) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \div b^n$

(vii) $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$ (viii) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

(ix) $a^0 = 1\ (a \neq 0)$ (x) $a^1 = a$

(xi) $a^{p/q} = (a^p)^{1/q}$ (xii) $a^x = a^y \Rightarrow x = y$

(xiii) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

(xiv) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$

(xv) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

(xvi) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

(xvii) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$

(xviii) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{a^{mn}}$

(xix) $\left(\sqrt[z]{\left(\sqrt[y]{\left(\sqrt[x]{a}\right)^m}\right)^n}\right)^o = a^{\frac{mno}{xyz}}$

(xx) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a.....\infty}}}} = a$

(xxi) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a.....n\text{ times}}}} = a^{1-\frac{1}{2^n}} = a^{\frac{2^n-1}{2^n}}$

(xxii) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a.....\infty}}} = \sqrt{a}$

(xxiii) $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a.....\infty}}} = \sqrt[n-1]{a}$

(xxiv) $\sqrt{a \div \sqrt{a \div \sqrt{a \div \sqrt{a \div .....\infty}}}} = \sqrt[3]{a}$

(xxv) $\sqrt[n]{a \div \sqrt[n]{a \div \sqrt[n]{a....\infty}}} = \sqrt[n+1]{a}$

(xxvi) $a \times a \times a \times a \times ..... \text{ n times} = a^n$

@Bakchod Maths by Aditya Ranjan Sir

Ex. If $\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\cdots}}} = \frac{1}{2}$ then x = ?

HINTS:

$\Rightarrow \sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\cdots}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (x)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

CONCEPT-01

(Some Special Type of Series

कुछ विशेष प्रकार की श्रेणी)

(a) Infinite series in product type
गुणा वाले प्रश्नों में अपरिमित श्रेणी

Ex. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a....\infty}}}$

Solution of this question is a
इस प्रश्न का उत्तर हमेशा a होता है

Ex. $\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b....\infty}}}}$

HINTS:

Let $\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b....\infty}}}} = x$

Then $\sqrt{a\sqrt{bx}} = x$

Squaring both side a $\sqrt{bx} = x^2$

Again squaring both side $a^2 bx = x^4$

$\therefore \quad x^3 = a^2 b \Rightarrow x = (a^2b)^{1/3}$

(b) Finite series in product type/गुणा वाले प्रश्नों में परिमित श्रेणी

Ex. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$

HINTS:
Count square root = 4
$2^4 = 16$
$\therefore$ Ans is $a^{15/16}$

Ex. $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}}}}$

$= 7^{63/64}$ ($\because 2^6 = 64$)

(c) Infinite series in addition or subtraction from
जोड़ अथवा घटाव के रूप में अपरिमित श्रेणी

$\sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm ....\infty}}}$

There are two type of questions
इसमें दो प्रकार के प्रश्न होते हैं

(i) Factorise 'a' into two successive integers
a को दो क्रमागत पूर्णांक के रूप में गुणनखंडित करें
If it is addition series then answer is greater one and
यदि श्रेणी जोड़ की है तो बड़ा वाला पूर्णांक उत्तर होगा तथा
If it is subtraction series then answer is smaller one.
यदि श्रेणी घटाव की है तो छोटा वाला पूर्णांक उत्तर होगा।

Ex. $\sqrt{56+\sqrt{56+\sqrt{56+....\infty}}} = 8$ [56 = 8×7, larger is ans]

Ex. $\sqrt{90-\sqrt{90-\sqrt{90....\infty}}} = 9$ [90 = 10×9, smaller is ans]

(ii) If 'a' can not factorise into two succesive integers
यदि a को दो क्रमागत पूर्णांक के रूप में गुणनखंडित नहीं किया जा सकता है तो

then $\sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm ....\infty}}} = \frac{\sqrt{1+4a} \pm 1}{2}$

Ex. $\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+....\infty}}} = \frac{\sqrt{1+4\times5}+1}{2} = \frac{\sqrt{21}+1}{2}$

Ex. $\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-....\infty}}} = \frac{\sqrt{1+4\times1}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

CONCEPT-02

(Square root expression inside square root

वर्ग मूल के अंदर वर्ग मूल का प्रसार)

In this type question try to make a square of expression inside square root.
इस प्रकार के प्रश्नों में वर्ग मूल के भीतर के व्यंजक का वर्ग बनाने की कोशिश करें।

Ex. $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}$

$= \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

CONCEPT-03

(If square root in denominator

यदि हर में वर्ग मूल हो)

In this type questions rationalise terms by multiply and divide by conjugate terms
इस प्रकार के प्रश्नों में पदों का परिमेयकरण संयुग्मी पदों से गुणा तथा भाग करके करें।

Ex. $2+\frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}$ equals to

HINTS:

$2+\frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{1}+\frac{\sqrt{3}+2}{-1}$

$= 2+\frac{6\sqrt{3}}{3}+2-\sqrt{3}-\sqrt{3}-2 = 2$

Remember this short formula:
इस लघु सूत्र को याद रखें:

$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 2\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$

Ex. If $x = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ and $y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ then (x + y) equals:

HINTS:

$x + y = 2\left(\frac{5+3}{5-3}\right) = 8$

@Baka_Maths by Aditya Ranjan

CONCEPT-04

(Smallest and greatest value
न्यूनतम तथा अधिकतम मान)

There are various type questions/इसमें कई प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं

(i) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{6}$

∴ We compare (number) LCM of 2, 3, 4 & 6

हम (संख्या) 2, 3, 4 & 6 का ल. स. से तुलना करेंगें

[∴ Here LCM of surds 2, 3, 4, 6 is 12]

$(2^{1/2})^{12}, (3^{1/3})^{12}, (4^{1/4})^{12}, (6^{1/6})^{12}$,

$= 2^6, 3^4, 4^3, 6^2$

$= 64, 81, 64, 36$

∴ Smallest is $\sqrt[6]{6}$ and greatest is $\sqrt[3]{3}$

(ii) $\sqrt{8}+\sqrt{3}, \sqrt{9}+\sqrt{2}, \sqrt{7}+\sqrt{4}, \sqrt{6}+\sqrt{5}$

Here sum of numbers are equal (8+3 = 9+2 = 7+4 = 6+5 = 11) then greatest of product of number terms will be greatest and smallest will be smallest.

यहां संख्याओं के योगफल बराबर होते हैं (8+3 = 9+2 = 7+4 = 6+5 = 11) तो जिन दो संख्याओं का गुणनफल सबसे छोटा होगा वह सबसे छोटी तथा जिन दो का गुणनफल सबसे बड़ा होगा वह सबसे बड़ी होगी।

⇒ 8×3 = 24, 9×2 = 18, 7×4 = 28, 6×5 = 30

Greatest is $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ and smallest is $\sqrt{9}+\sqrt{2}$

(iii) $\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

If difference of number same (Here 7 – 5 = 9 – 7 = 5 – 3 = 11 – 9) then smallest of product of numbers will be greatest and greatest of product of number will be smallest

यदि संख्याओं का अंतर समान हो (यहां 7 – 5 = 9 – 7 = 5 – 3 = 11 – 9) तो जिन दो संख्याओं का गुणनफल सबसे छोटा होगा वह सबसे बड़ी तथा जिन दो का गुणनफल सबसे बड़ा होगा वह सबसे छोटी होगी।

⇒ 7×5 = 35, 9×7 = 63, 5×3 = 15, 11×9 = 99

∴ Greatest is $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ and smallest is $\sqrt{11}-\sqrt{9}$

(iv) $\sqrt{8}+\sqrt{3}$ and $\sqrt{6}+\sqrt{4}$

If the product of two numbers is same (8 × 3 = 6 × 4 = 24), then the number whose sum is maximum will be the largest and the number whose sum is minimum will be the smallest.

यदि दो संख्याओं का गुणनफल समान हो (8 × 3 = 6 × 4 = 24) तो जिन दो संख्याओं का योग अधिकत्तम होगा वह सबसे बड़ी तथा जिन दो संख्याओं का योग न्यूनत्तम होगा वह सबसे छोटी होगी।

8 + 3 = 11, 6 + 4 = 10

∴ Greatest is $\sqrt{8}+\sqrt{3}$ and smallest is $\sqrt{6}+\sqrt{4}$

(v) $\sqrt{9}-\sqrt{5}$ and $\sqrt{15}-\sqrt{3}$

If the product of two numbers is same (9 × 5 = 15 × 3 = 45), then the number whose sum is maximum will be the largest and the number whose sum is minimum will be the smallest.

यदि दो संख्याओं का गुणनफल समान हो (9 × 5 = 15 × 3 = 45) तो जिन दो संख्याओं का योग अधिकत्तम होगा वह सबसे बड़ी तथा जिन दो संख्याओं का योग न्यूनत्तम होगा वह सबसे छोटी होगी।

9 + 5 = 14, 15 + 3 = 18

Greatest is $\sqrt{15}-\sqrt{3}$ and smallest is $\sqrt{9}-\sqrt{5}$

Some other important examples
कुछ अन्य महत्वपूर्ण उदाहरण

Ex. The value of the expression given below is:
नीचे दिए गए व्यंजक का मान है:

$$\frac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}-\frac{1}{\sqrt{(8-\sqrt{60})}}-\frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{84}}};$$

HINTS:

$$=\frac{1}{\sqrt{12-\sqrt{4\times35}}}-\frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{4\times15}}}-\frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{4\times21}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{5})^2-2\sqrt{7}\times\sqrt{5}}}-\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{5}\times\sqrt{3}}}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{3})^2+2\sqrt{7}\times\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

Rationalizing in above equation

$$\Rightarrow\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2}-\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}-\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 0$$

Ex. $\frac{\sqrt{29.16}}{\sqrt{1.1664}}+\frac{\sqrt{0.2916}}{\sqrt{116.64}}+\frac{\sqrt{0.0036}}{\sqrt{0.36}}=?$

HINTS:

$$=\frac{\sqrt{29.16}}{\sqrt{1.1664}}+\frac{\sqrt{0.2916}}{\sqrt{116.64}}+\frac{\sqrt{0.0036}}{\sqrt{0.36}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{10^4}{10^2}}+\sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{10^2}{10^4}}+\sqrt{1\times\frac{10^2}{10^4}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\times10^2}+\sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10^2}}+\sqrt{\frac{1}{10^2}}=5+\frac{1}{20}+\frac{1}{10}=\frac{103}{20}$$

Ex. $\sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{108+\sqrt{154+\sqrt{225}}}}}=?$

HINTS:

Remember, these types of questions are always to be solved from the right side.

ध्यान रखें, इस प्रकार के प्रश्नो के हमेशा दाएं तरफ से हल करना है

$$=\sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{108+\sqrt{154+15}}}}$$

$$=\sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{108+\sqrt{154+15}}}}$$

$$=\sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{121}}}=\sqrt{10+\sqrt{36}}=\sqrt{10+6}=4$$

@Bakaiti by Aditya Ranjan 260

ALGEBRA

बीज़गणित

08

Square Formulae/वर्ग सूत्र

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ or $(a - b)^2 + 4ab$
2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ or $(a + b)^2 - 4ab$
3. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
4. $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$
5. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
6. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
7. $\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{a^2 + b^2} = 2$
8. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
9. $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = 4$

Ex. $\frac{(867 + 289)^2 - (867 - 289)^2}{867 \times 289} = ?$

HINTS:

The value of the expression is 4.

10. $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

Ex. $\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x-3y}{2}\right)^2 = ?$

HINTS:

$= \frac{4x^2 + 9y^2 + 12xy}{4} - \frac{4x^2 + 9y^2 - 12xy}{4} = \frac{24xy}{4} = 6xy$

The value of the expression is $6xy$.

11. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
12. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

Ex. If $a + b + c = 10$ and $ab + bc + ca = 30$, then the value of $a^2 + b^2 + c^2$ is:

यदि $a + b + c = 10$ और $ab + bc + ca = 30$ है, तो $a^2 + b^2 + c^2$ का मान क्या होगा?

HINTS:

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow (10)^2 - 2(30) = 40$

Ex. If $x + y + z = 13$, $x^2 + y^2 + z^2 = 91$ and $xz = y^2$, then the difference between z and x is:

यदि $x + y + z = 13$, $x^2 + y^2 + z^2 = 91$ और $xz = y^2$ है, तो z और x के बीच अंतर ज्ञात करें।

HINTS:

Method-01:

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow 169 = 91 + 2(xy + yz + y^2)$

$\Rightarrow 3978 = 2y(x + z + y)$

$\Rightarrow 39 = y \times 13$

$\Rightarrow y = 3$

$(x - z)^2 = x^2 + z^2 - 2xz$

$\Rightarrow (x - z)^2 = 82 - 2 \times 9$

$\Rightarrow (x - z)^2 = 64$

$\Rightarrow x - z = 8$

Method-02:

put $x = 1$, $y = 3$ and $z = 9$.

Hence, $z - x = 9 - 1 = 8$

13. $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$
14. $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac - bc)$
15. $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

Ex. If $a + b + c = 10$; $a^2 + b^2 + c^2 = 38$, what is the value of $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$?

यदि $a + b + c = 10$; $a^2 + b^2 + c^2 = 38$, है, तो $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

$$ab + bc + ca = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$$

$$ab + bc + ca = \frac{62}{2} = 31$$

Now,

$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(38 - 31) = 14$

Ex. If the value of $(a + b - 2)^2 + (b + c - 5)^2 + (c + a - 5)^2 = 0$ then the value of $\sqrt{(b+c)^a + (c+a)^b - 1}$ is:

यदि $(a + b - 2)^2 + (b + c - 5)^2 + (c + a - 5)^2 = 0$ है, तो $\sqrt{(b+c)^a + (c+a)^b - 1}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

$(a + b - 2)^2 + (b + c - 5)^2 + (c + a - 5)^2 = 0$

$a + b = 2$ .....(1)

$b + c = 5$ .....(2)

$c + a = 5$ .....(3)

@Baka_260

Adding equation 1, 2 & 3

$\therefore 2(a+b+c) = 12$

$a+b+c = 6$ .....(4)

$a = 1, b = 1, c = 4$

$\therefore \sqrt{(b+c)^a + (c+a)^b - 1} = \sqrt{(5)^1 + (5)^1 - 1} = \sqrt{9} = 3$

Note: जब कभी भी तीन पदों के वर्गों का योगफल शून्य के बराबर हो तो तीनों पद individually शून्य के बराबर होते हैं।

16. $(ax+by+c)(ax+by-d) = px^2 + qy^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + r$

Ex. If $(2x+3y+4)(2x+3y-5)$ is equivalent to $(ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c)$, then what is the value of $\frac{(g+f-c)}{(abh)}$?

यदि $(2x+3y+4)(2x+3y-5)$, $(ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c)$ के समतुल्य है, तो $\frac{(g+f-c)}{(abh)}$ का मान ज्ञात करें।

$(2x+3y+4)(2x+3y-5) = ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c$

On comparing,

$a = 4, b = 9, c = -20, h = 6, g = -1, f = \left(-\frac{3}{2}\right)$

$$\frac{g+f-c}{abh} = \frac{-1-\frac{3}{2}+20}{4\times9\times6} = \frac{35}{432}$$

17. $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2) = a^4+a^2b^2+b^4$

Ex. If $a^4+a^2b^2+b^4 = 24$ and $a^2+ab+b^2 = 8$, then find ab.

यदि $a^4+a^2b^2+b^4 = 24$ और $a^2+ab+b^2 = 8$, तब ab ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$a^4+a^2b^2+b^4 = 24$

$$a^2-ab+b^2 = \frac{24}{8} = 3$$

$a^2-ab+b^2 = 3$ ...(i)

$a^2+ab+b^2 = 8$ ...(ii)

Subtracting eq^n (i) from eq^n (ii)

$-2ab = -5$

$ab = 2.5$

18. $a^4-b^4 = (a+b)(a-b)(a^2+b^2)$

19. $a^4-b^4 = (a^2)^2-(b^2)^2 = (a^2+b^2)(a^2-b^2)$

Some Important Result/कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

(i) $(a+b+c)^2+(a-b-c)^2 = 2\{a^2+(b+c)^2\}$

(ii) $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2 = 4a(b+c)$

(iii) $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2a(b+c+d)+2b(c+d)+2cd$

(iv) $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)$

(v) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(vi) $(b+c)(c+a)(a+b)+abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$

(vii) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b)$

(viii) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) = (b-c)(c-a)(a-b)$

(ix) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2$

(x) $(ax^2+by^2+cz^2)+k = 2(px+qy+rz)$ then $x = p/a, y = q/b, z = r/c$

(xi) $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd = (a+b)^2+(c+d)^2$

(xii) $(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+axby+bycz+axcz)$

$$= \frac{1}{2}\{(ax+by)^2+(by+cz)^2+(cz+ax)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2x^2+2b^2y^2+2c^2z^2+2axby+2bycz+2axcz)$$

Cube Formulae/घन सूत्र

1. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
   $= a^3+b^3+3ab(a+b)$
2. $a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$
3. $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
4. $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
   $= a^3-b^3-3ab(a-b)$
5. $a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$
6. $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
7. $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc$
8. $(ma+mb)^3+(na-nb)^3 = \{(m+n)a+(m-n)b\}\{(m^2+n^2-mn)a^2+2ab(m^2-n^2)+(m^2+n^2+mn)b^2\}$

Some Special Cases/कुछ विशेष स्थितियाँ

Special Case 1: If $a^2-ab+b^2 = 0$ then $a^3+b^3 = 0$

Special Case 2: If $a^2+a+1 = 0$ then $a^3-1 = 0$ or $a^3 = 1$

Special Case 3: If $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = 1$ then $a^3+b^3 = 0$

Special Case 4: If $\frac{1}{a}-\frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$ then $a^3+b^3 = 0$

Special Case 5: If $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = -1$ then $a^3-b^3 = 0$

Special Case 6: If $\frac{1}{b}+\frac{1}{a} = \frac{1}{a+b}$ then $a^3-b^3 = 0$

Special Case 7: If $ab(a+b) = 1$ then $\frac{1}{a^3b^3}-a^3-b^3 = 3$

Ex. If $8(x+y)^3-(x-y)^3 = (x+3y)(Ax^3+Bxy+Cy^2)$, then find the value of $(A-B-C)$ is:

यदि $8(x+y)^3-(x-y)^3 = (x+3y)(Ax^3+Bxy+Cy^2)$ है, तो $(A-B-C)$ का मान है:

@Baka_260

HINTS:

$(2x+2y)^3-(x-y)^3=\{(2x+2y)-(x-y)\}(4x^2+4y^2+8xy+x^2+y^2-2xy+2x^2-2y^2]$

$(x+3y)[x^2+6xy+3y^2]$

Here A = 7, B = 6, C = 3

A – B – C = 7 – 6 – 3 = – 2

9. $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$

Ex. If a = 999, then the value of $\sqrt[3]{a(a^2+3a+3)+1}$ is

HINTS:

As we know, $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$

Here, a = 999

Then, $\sqrt[3]{a(a^2+3a+3)+1}=(a+1)$

$\Rightarrow 999+1\Rightarrow 1000$

10. $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=(a-b)$ 'or' $\frac{a^3-b^3}{(a-b)}=(a^2+ab+b^2)$

Ex. If $(5\sqrt{5}x^3-3\sqrt{3}y^3)\div(\sqrt{5}x-\sqrt{3}y)=(Ax^2+By^2+Cxy)$, then the value of $(3A+B-\sqrt{15}C)$ is:

यदि $(5\sqrt{5}x^3-3\sqrt{3}y^3)\div(\sqrt{5}x-\sqrt{3}y)=(Ax^2+By^2+Cxy)$ है, तो $(3A+B-\sqrt{15}C)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

$\frac{(5\sqrt{5}x^3-3\sqrt{3}y^3)}{\sqrt{5}x-\sqrt{3}y}=(Ax^2+By^2+Cxy)$

$\frac{(\sqrt{5}x-\sqrt{3}y)(5x^2+3y^2+\sqrt{15}xy)}{(\sqrt{5}x-\sqrt{3}y)}$

$=(Ax^2+By^2+Cxy)$

Comparing both sides

$A=5, B=3, C=\sqrt{15}$

Then $\Rightarrow (3A+B-\sqrt{15}C)$

$=(3\times5+3-\sqrt{15}\times\sqrt{15})=18-15=3$

11. $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=(a+b)$ 'or' $\frac{a^3+b^3}{(a+b)}=(a^2-ab+b^2)$

Ex. If $27x^3-64y^3=(Ax-By)(Cx^2+Dy^2+12xy)$, then the value of 4A + B + 3C + 2D is:

यदि $27x^3-64y^3=(Ax-By)(Cx^2+Dy^2+12xy)$, है, तो 4A + B + 3C + 2D का मान ज्ञात करें।

HINTS:

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+B^2+AB)$

$(3x)^3-(4y)^3$

$=(3x-4y)(9x^2+16y^2+12xy)$

A = 3, B = – 4, C = 9, D = 16

$\Rightarrow 4\times3+(-4)+3(9)+2(16)$

$\Rightarrow 12-4+27+32=67$

12. $(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2$

Ex. What is the simplified form of the following expression?

निम्नलिखित व्यंजक का सरलीकृत रूप क्या है?

$\left(x-\frac{1}{y}\right)^3+\left(x+\frac{1}{y}\right)^3$

HINTS:

$2x\left(x^2+\frac{3}{y^2}\right)=2(x)^3+6(x)\left(\frac{1}{y}\right)^2=2x\left[x^2+\frac{3}{y^2}\right]$

13. $(a+b)^3-(a-b)^3=2b^3+6a^2b$

Ex. If $(2x-5y)^3-(2x+5y)^3=y[Ax^2+By^2]$, then what is the value of (2A – B)?

$(2x-5y)^3-(2x+5y)^3=y[Ax^2+By^2]-10y[4x^2+25y^2-20xy+25y^2+20xy+4x^2-25y^2]$

$\rightarrow A=-120$

$B=-250$

$2(-120)-(-250)=10$

14. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc$

Ex. If $A=\frac{(0.1)^3+(0.2)^3+(0.3)^2+3(0.005+0.016+0.027)+0.036}{(0.1)^2+(0.2)^2+(0.3)^2+0.04+0.06+0.12}$

then the value of 60A is:

यदि $A=\frac{(0.1)^3+(0.2)^3+(0.3)^2+3(0.005+0.016+0.027)+0.036}{(0.1)^2+(0.2)^2+(0.3)^2+0.04+0.06+0.12}$

है, तो 60A का मान ज्ञात कीजिए।

$\frac{(0.1)^3+(0.2)^3+(0.3)^2+3(0.005+0.016+0.027)+0.036}{(0.1)^2+(0.2)^2+(0.3)^2+0.04+0.06+0.12}$

$=\frac{0.216}{0.36}=0.6$

$\therefore 60A=60\times0.6=36$

15. $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

'or' $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}=(a+b+c)$

Ex. If $x+y+z=7$, $xy+yz+zx=8$, then what is the value of $x^3+y^3+z^3-3xyz$?

यदि $x+y+z=7$, $xy+yz+zx=8$ है, तो $x^3+y^3+z^3-3xyz$ का मान क्या होगा?

HINTS:

$=7(49-3\times8)$

$=7(49-24)$

$=7\times25=175$

@BaKa_260

Ex. If $a = -5$, $b = -6$, $c = 10$ then

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)} = ?$$

यदि $a = -5$, $b = -6$, $c = 10$ है, तो

$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

$$\frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3-ab-bc-ac)}{(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)}$$

$-[(-5)+(-6)+10] = 11-10 = 1$

16. $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2]$$

Ex. If $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=32$ and $a^3+b^3+c^3=189$, then the value of $abc-3$ is:

यदि $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=32$ और $a^3+b^3+c^3=189$ है, तो $abc-3$ का मान बताइए।

HINTS:

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=\frac{(a+b+c)}{2}[3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2]$$

$\Rightarrow 189-3abc = 3[3\times 32-36]$

$\Rightarrow 189-3abc = 3\times 60$

$abc-3 = 6$

17. $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ac)]$

Ex. If $a+b+c=6$ and $a^3+b^3+c^3-3abc=126$, then $ab+bc+ca$ is equal to:

यदि $a+b+c=6$ और $a^3+b^3+c^3-3abc=126$ है, तो $ab+bc+ca$ बराबर है:

Method-01:

$126 = 6[(6)^2-3(ab+bc+ac)]$

$ab+bc+ca = 5$

Method-02:

Put $a=5$, $b=1$, $c=0$ (given conditions verified)

$\therefore ab = 5\times 1 = 5$

18. $a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{(a+b+c)}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

Ex. If $x=32$, $y=33$ and $z=35$, then evaluate the expression $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

यदि $x=32$, $y=33$ और $z=35$ है, तो व्यंजक $x^3+y^3+z^3-3xyz$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$$\frac{100}{2}(1+4+9) = 700$$

Special Case-1:

If $a=b=c$

then $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

OR, $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

Ex. If $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ then find the value of $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$.

यदि $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ है, तो $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

Then,

$a=b=c$

Now,

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$$

$2+2+2=6$

Special Case-2:

If $a+b+c=0$ then $a^3+b^3+c^3=3abc$

Ex. If $a+b+c=0$ then find the value of $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=?$

यदि $a+b+c=0$ है, तो $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

$a+b+c=0 \mid b+c=-a$

$a+b=-c \mid c+a=-b$

Now,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{-a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c}=-3$$

Ex. If $(3x+1)^3+(x-3)^3+(4-2x)^3+6(3x+1)(x-3)(x-2)=0$, then what is the value of x?

यदि $(3x+1)^3+(x-3)^3+(4-2x)^3+6(3x+1)(x-3)(x-2)=0$ है, तो x का मान ज्ञात करें।

HINTS:

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$a+b+c=0$

$3x+1+x-3+4-2x=0$

$x=-1$

Special Case-3:

If two number are equal and third number is one more than the numbers.

यदि दो संख्याएँ बराबर हों और तीसरी संख्या उन संख्याओं से एक अधिक हो तो

$a^3+b^3+c^3-3abc = a+b+c$

@Baka_200

Ex. If a = b = 336 and c = 337 then find the value of $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

यदि a = b = 336 and c = 337 है, तो $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

a = b = 336 and c = 337

Here, two number are equal and third number is one more than the numbers.

Now, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a + b + c$

$= 336 + 336 + 337 = 1009$

Special Case-4:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = 9bd^2$$

Where a,b,c are in A.P. and common difference is d and middle term is b.

जहाँ a,b,c A.P. में है और सार्व अंतर d है और मध्य पद b है।

Ex. If a = 199, b = 200, c = 201 then find the value of $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

यदि a = 199, b = 200, c = 201 है, तो $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

Here, a = 199 b = 200 and c = 201 a, b, c are in A.P.

Because common difference = 200 – 199 = 1

d = 1

b = 200

Now,

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 9bd^2$

$= 9 \times 200 \times 1 = 1800$

Special Case-5:

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ba - ca$

$$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = 3d^2$$

Where a, b, c are in A.P. and common difference is d.

जहाँ a, b, c A.P. में हैं और सार्व अंतर d है।

Ex. If a = 2001, b = 2002 and c = 2003 then find the value of $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$.

यदि a = 2001, b = 2002 और c = 2003 है, तो $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

Here, a = 2001, b = 2002 and c = 2003 a, b and c are A.P

because common difference is

= 2002 – 2001 = 1

Now,

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3d^2$

$= 3 \times (1)^2 = 3$

Function & Inverse Function

फलन और व्युत्क्रम फलन

Based On Square Formulae/वर्ग सूत्र पर आधारित

- If $x + \frac{1}{x} = k$, then $x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2$
- If $x + \frac{1}{x} = k$ then, $x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{k^2 - 4}$
- $x^n + \frac{1}{x^n} = k$ then, $x^n - \frac{1}{x^n} = \pm\sqrt{k^2 - 4}$
- $x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm k\sqrt{k^2 - 4}$
- If $x - \frac{1}{x} = k$ then $x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 + 2$
- If $x - \frac{1}{x} = m$ then, $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{m^2 + 4}$
- $x^n - \frac{1}{x^n} = m$ then, $x^n + \frac{1}{x^n} = \pm\sqrt{m^2 + 4}$
- $x - \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm k\sqrt{k^2 + 4}$
- $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2$
- $x^8 + \frac{1}{x^8} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2$
- $ax + \frac{b}{x} = k \Rightarrow a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} = k^2 - 2ab$
- $ax - \frac{b}{x} = k \Rightarrow a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} = k^2 + 2ab$
- $ax + \frac{b}{x} = k$ then $ax - \frac{b}{x} = \pm\sqrt{k^2 - 4ab}$
- $ax - \frac{b}{x} = k \Rightarrow ax + \frac{b}{x} = \pm\sqrt{k^2 + 4ab}$

@Baka_200

Based on Cube Formulae/घन सूत्र पर आधारित

- If $x+\frac{1}{x}=a$, then $x^3+\frac{1}{x^3}=a^3-3a$
- If $x-\frac{1}{x}=b$, then $x^3-\frac{1}{x^3}=b^3-3b$
- $ax+\frac{b}{x}=k$, then $a^3x^3+\frac{b^3}{x^3}=k^3-3kab$
- $ax-\frac{b}{x}=k$, then $a^3x^3-\frac{b^3}{x^3}=k^3+3kab$

Special Case-1:

If $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ then $x^3+\frac{1}{x^3}=0$ or $x^6=-1$

Ex. If $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ then find the value of $x^{1012}+x^{1006}+x^{506}+x^{500}+x^{400}+x^{406}+x^{206}+x^{200}+x^6+5$

यदि $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ है, तो $x^{1012}+x^{1006}+x^{506}+x^{500}+x^{400}+x^{406}+x^{206}+x^{200}+x^6+5$ तो का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

We know that, $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ then $x^6=-1$.

Now,

$x^{1012}+x^{1006}+x^{506}+x^{500}+x^{400}+x^{406}+x^{206}+x^{200}+x^6+5=-1+5=4$

Special Case-2:

If $x+\frac{1}{x}=2$ then $x=1$.

Ex. If $x+\frac{1}{x}=2$ then find the value of $x^{121}+\frac{1}{x^{121}}$

यदि $x+\frac{1}{x}=2$ है तो $x^{121}+\frac{1}{x^{121}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

We know that, $x+\frac{1}{x}=2$ then x = 1

Hence, $x^{121}+\frac{1}{x^{121}}=1+1=2$

Special Case-3:

If $x+\frac{1}{x}=-2$ then $x=-1$

Ex. If $x+\frac{1}{x+2}=-4$ then find the value of $(x+2)^{231}+\frac{1}{(x+2)^{231}}$.

यदि $x+\frac{1}{x+2}=-4$ है, तो $(x+2)^{231}+\frac{1}{(x+2)^{231}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Given, $x+\frac{1}{x+2}=-4$

$\Rightarrow (x+2)+\frac{1}{(x+2)}=-2$

$\Rightarrow x+2=-1$

$\Rightarrow x=-3$

Now, $(x+2)^{231}+\frac{1}{(x+2)^{231}}$

$=(-1)^{231}+\frac{1}{(-1)^{231}}$

$=-1-1=-2$

Special Case-4:

If $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$, then

$x^2+\frac{1}{x^2}=0$ or $x^4+1=0$ or $x^4=-1$

Ex. If $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$; then find the value of $x^{96}+x^{100}+x^{112}+x^{116}+x^4+3$.

यदि $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$ है, तो $x^{96}+x^{100}+x^{112}+x^{116}+x^4+3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

$x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$ then $x^4=-1$

Now,

$=x^{96}+x^{100}+x^{112}+x^{116}+x^4+3.$

$=0+0+(-1)+3=2$

Special Case-5:

If $x+\frac{1}{x}=1$ then $x^3=-1$

$x^3+1=0$

Ex. If $x+\frac{1}{x}=1$ then find the value of $x^{103}+x^{100}+x^{90}+x^{87}+x^{60}+x^{57}+x^{50}+x^{47}+x^{9}+x^{6}+x^{3}+4$.

यदि $x+\frac{1}{x}=1$ है, तो $x^{103}+x^{100}+x^{90}+x^{87}+x^{60}+x^{57}+x^{50}+x^{47}+x^{9}+x^{6}+x^{3}+4$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

$x+\frac{1}{x}=1$ then $x^3=-1$

$$\underbrace{x^{103}+x^{100}}_{3}+\underbrace{x^{90}+x^{87}}_{3}+\underbrace{x^{60}+x^{57}}_{3}+\underbrace{x^{50}+x^{47}}_{3}+\underbrace{x^{9}+x^{6}}_{3}+x^3+4$$

$= 0+0+0+0+0+(-1)+4=3$

Special Case-6:

If $x+\frac{1}{x}=-1$ then $x^3=1$ or $x^3-1=0$

Ex. If $x+\frac{1}{x}=-1$ then find the value of $x^{51}+x^{45}+x^{21}+x^{15}+x^3+4$.

यदि $x+\frac{1}{x}=-1$ है, तो $x^{51}+x^{45}+x^{21}+x^{15}+x^3+4$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

We know that, if $x+\frac{1}{x}=-1$ then $x^3=1$

Now, $x^{51}+x^{45}+x^{21}+x^{15}+x^3+4$

$=(x^3)^{17}+(x^3)^{15}+(x^3)^7+(x^3)^5+x^3+4$

$=1+1+1+1+1+4=9$

Some Important Results/कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

If the value of $x+\frac{1}{x}$ or $x-\frac{1}{x}$ is given, then

- $x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

Tips: Answer must be a multiple of $x+\frac{1}{x}$

- $x^5-\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)$

Tips: Answer must be a multiple of $x-\frac{1}{x}$

- $x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2-2$

- $x^6-\frac{1}{x^6}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)$

$x^7+\frac{1}{x^7}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

Tips: Answer must be a multiple of $x+\frac{1}{x}$.

$x^7-\frac{1}{x^7}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)$

Tips: Answer must be a multiple of $x-\frac{1}{x}$.

Componendo & Dividendo/योगान्तरानुपात

If $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ then $\frac{a+b}{a-b}=\frac{x+y}{x-y}$

Special Case:

If $x=\frac{2ab}{a+b}$ then $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2$

Ex. If $x=\frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ then find the value of $\frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}}+\frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}}$?

यदि $x=\frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ है, $\frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}}+\frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}}$ तो का मान ज्ञात करें।

HINTS:

Using the concept explained above, we will get the result of the expression is 2.

$\frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}}+\frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}}=2$

Important Result Based on C & D Rules
योगान्तरानुपात पर आधारित महत्वपूर्ण परिणाम

1. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ Or

If $x+\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ then $x+\frac{1}{x}=\frac{2(a+b)}{(a-b)}$

2. If $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1\right)}=A\sqrt[3]{a^2}+B\sqrt[3]{a}+C$, Then

$A=0\ ;\ B=\frac{1}{a-1}\ ;\ C=\frac{-1}{a-1}$

Ex. If $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$ and a, b, c is a prime number, then find the value of a + b + c.

यदि $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$ और a, b, c एक अभाज्य संख्या है, तो a + b + c का मान ज्ञात करें।

@Baka_260

HINTS:

Using the result(3), a = 0, b = 1, c = –1

Hence, a + b + c = 0 + 1 – 1 = 0

3. If $xy = 1$ then $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} = 1$

Ex. If $x = \frac{\sqrt{87}-\sqrt{71}}{\sqrt{55}+\sqrt{39}}$ and $y = \frac{\sqrt{87}+\sqrt{71}}{\sqrt{55}-\sqrt{39}}$ then

find $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} = ?$

यदि $x = \frac{\sqrt{87}-\sqrt{71}}{\sqrt{55}+\sqrt{39}}$ और $y = \frac{\sqrt{87}+\sqrt{71}}{\sqrt{55}-\sqrt{39}}$ है, तो

$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

Here,

$$xy = \frac{\sqrt{87}-\sqrt{71}}{\sqrt{55}+\sqrt{39}} \times \frac{\sqrt{87}+\sqrt{71}}{\sqrt{55}-\sqrt{39}} = \frac{87-71}{55-39} = \frac{16}{16} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} = 1$$

Degree of Polynomial/बहुपद की घात

The degree of a polynomial is the highest power of the variable in a polynomial expression.

एक बहुपद की घात एक बहुपद व्यंजक में चर की उच्चतम घात है।

Example, $6x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 9$

Here, Degree = 4

Concept of Symmetricity/सममिति की अवधारणा

Whenever the degree of each term in an expression is same & they come in same numbers in the given expression, Apply the concept of symmetricity. i.e equate the each variable/terms to another and simplify the expression.

जब भी किसी व्यंजक में प्रत्येक पद की घात समान होती है और वे दिए गए व्यंजक में समान संख्या में आते हैं, तो सममिति की अवधारणा को लागू करें। यानी प्रत्येक चर/पद को दूसरे के बराबर करें और व्यंजक को सरल बनाएं।

Ex. If $a^2 = b + c$, $b^2 = c + a$ and $c^2 = a + b$ then find the value of $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$

HINTS:

Check the value a a = b = c = 2 in $a^2 = b + c$, $b^2 = c + a$ and $c^2 = a + b$ and these value in satisfying the equation.

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3} \Rightarrow 1$$

Ex. If $\frac{x^2}{by+cz} = \frac{y^2}{ax+cz} = \frac{z^2}{ax+by} = 1$ then find the value of

$$\frac{x}{x+a}+\frac{y}{y+b}+\frac{z}{z+a}$$

HINTS:

Check the value of $x = y = z = 2$ and $a = b = c = 1$ in above eqn and these value is satisying.

Put $x = y = z = 2$ & $a = b = c = 1$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+a}+\frac{y}{y+b}+\frac{z}{z+c}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2+1}+\frac{2}{2+1}+\frac{2}{2+1} = 2$$

- $\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)} = ab + bc + ca$
- $\frac{a^3\times(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3\times(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3\times(a+b)}{(c-a)(c-b)} = ab + bc + ca$
- $\frac{a\times(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{b\times(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c\times(a-b)^2}{(b-c)(c-a)} = a + b + c$
- If $x = a + \frac{1}{a}$ and $y = a - \frac{1}{a}$ then $\sqrt{x^4+y^4-2x^2y^2} = 4$

Some other important results/कुछ अन्य परिणाम

1. $(x^2 + ax + bx + ab) = (x + a)(x + b)$
2. $1 + A + B + AB = (1 + A)(1 + B)$
3. $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc$
4. If $xy = 1$ or $x = \frac{1}{y}$ then $\frac{1}{1+x^n}+\frac{1}{1+y^n} = 1$
5. If $a + b + c = 2s$, then $\frac{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$
6. If $x + y + z = 0$, then $\left(\frac{1}{x^2-yz}+\frac{1}{y^2-zx}+\frac{1}{z^2-xy}\right)$ $= 0$ $(x, y, z \neq 0)$
7. If $pq + qr + rp = 0$, then $\left(\frac{p^2}{p^2-qr}+\frac{q^2}{q^2-rp}+\frac{r^2}{r^2-pq}\right) = 1$
8. If $\left[\sqrt{(a^2+b^2+ab)}+\sqrt{(a^2+b^2-ab)}\right] = 1$,

then $(1 - a^2)(1 - b^2) = \frac{3}{4}$

@Baka_260

9. If $bc + ca + ab = abc$, then

$$\frac{b+c}{bc(a-1)}+\frac{c+a}{ca(b-1)}+\frac{a+b}{ab(c-1)} = 1$$

10. If $x^2 + y^2 = z + 1$, $y^2 + z^2 = x + 1$, $z^2 + x^2 = y + 1$, then xyz $= 1$ or $-\frac{1}{8}$

11. $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) = (b - a)(b - c)(c - a)$

12. $(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc = a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$

13. If $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ (where $a \neq b \neq c$) then abc is equal to ± 1

14. $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + x^2(a + b + c) + x(ab + bc + ca) + abc$

Two Important Concepts
दो महत्वपूर्ण अवधारणाएँ

Concept-01

Ex. If $x^2 + x = 19$, then what is the value of $(x + 5)^2 + \frac{1}{(x+5)^2} = ?$

यदि $x^2 + x = 19$ है, तो $(x + 5)^2 + \frac{1}{(x+5)^2}$ का मान क्या है?

HINTS:

Let $y = x + 5$

$\Rightarrow x = y - 5$

Now,

$(y - 5)^2 + (y - 5) = 19$

$y^2 + 25 - 10y + y - 5 = 19$

$y^2 + 20 - 9y = 19$

$y^2 - 1 = 9y$

$y - \frac{1}{y} = 9$

$\Rightarrow y^2 + \frac{1}{y^2} = 83$

$(x + 5)^2 + \frac{1}{(x+5)^2} = 83$

Ex. If $x^2 - 16x + 19 = 0$, then what is the value of $(x - 6)^2 + \frac{1}{(x-6)^2} = ?$

यदि $x^2 - 16x + 19 = 0$ है, तो $(x - 6)^2 + \frac{1}{(x-6)^2}$ का मान क्या है?

HINTS:

Let $y = x - 6$

$\Rightarrow x = y + 6$

Now, $(y + 6)^2 - 16(y + 6) + 59 = 0$

$y^2 + 36 + 12y - 16y - 96 + 59 = 0$

$y^2 - 4y = 1$

$y - \frac{1}{y} = 4$

$\Rightarrow y^2 + \frac{1}{y^2} = 18$

$(x - 6)^2 + \frac{1}{(x-6)^2} = 18$

Concept-02

Ex. If $a^3 + 3a^2 + 9a = 1$, then what is the value of $a^3 + \frac{3}{a}$?

यदि $a^3 + 3a^2 + 9a = 1$, तो $a^3 + \frac{3}{a}$ का मान क्या है?

HINTS:

$3(a^3 + 3a^2 + 9a = 1)$

$a^4 + 3a^3 + 9a^2 = a$

$a^4 - 27a = a - 3$

$a^4 = 28a - 3$

$a^4 + 3 = 28a$

$a^3 + \frac{3}{a} = 28$

Ex. If $a^2 + 3a + 3 = 0$ find the value of $a^3 + 6a^2 + 12a + 10 = ?$

यदि $a^2 + 3a + 3 = 0$ तो $a^3 + 6a^2 + 12a + 10$ का मान ज्ञात कीजिए?

HINTS:

$a^2 + 3a + 3 = 0$

$a^3 + 3a^2 + 3a = 0$

& $3a^2 + 9a + 9 = 0$

$a^3 + 6a^2 + 12a + 9 = 0$

$a^3 + 6a^2 + 12a + 10 = 1$

Ex. If $x^2 + 2 = 2x$, then the value of $x^4 - x^3 + x^2 + 2$ is:

यदि $x^2 + 2 = 2x$ तो $x^4 - x^3 + x^2 + 2$ का मान है:

HINTS:

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$x^4 - 2x^3 + 2x^2 = 0$

$x^3 - 2x^2 + 2x = 0$

$x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$

Factor Formulae/गुणनखंड सूत्र

1. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
2. $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$
3. $(x - a)(x + b) = x^2 - (a - b)x - ab$
4. $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$

@Baka_260

Quadratic Equation/द्विघात समीकरण

An equation of the form $ax^2 + bx + c = 0$, is called quadratic equation.

कोई $ax^2 + bx + c = 0$ प्रकार का समीकरण द्विघात समीकरण कहलाता है।

1. Two Roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ are

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो मूल हैं।

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ and } \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2. If α and β are the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$

यदि α और β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हो तो

(i) Sum of roots/मूलों का योगफल

$$(\alpha+\beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-\text{Coefficient of } x}{\text{Coefficient of } x^2}$$

(ii) Product of roots/मूलों का गुणनफल

$$(\alpha.\beta) = \frac{c}{a} = \frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}$$

3. If the roots α and β are known then the equation is given by $x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha.\beta) = 0$ यदि मूल α तथा β ज्ञात हों, तो द्विघात समीकरण $x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha.\beta) = 0$ होगा।

Ex. Find quadratic equation whose one roots is $2 + \sqrt{3}$.

द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका एक मूल $2 + \sqrt{3}$ है।

HINTS:

$\alpha = 2 + \sqrt{3}$

$\beta = 2 - \sqrt{3}$

Sum of roots $(\alpha + \beta) = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4$

Product of root $(\alpha . \beta) = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

Using Formula,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha . \beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

4. If a, b and c are rational numbers and one roots of quadratic equation is $a + \sqrt{b}$ then other roots is $(a - \sqrt{b})$ i.e (vice – versa) यदि a, b और c परिमेय संख्याएँ हैं और द्विघात समीकरण का एक मूल $a + \sqrt{b}$ है तो अन्य मूल $(a - \sqrt{b})$ होगा और इसका विपरीत भी सही होगा।

5. Maximum and Minimum value of a quadratic equation/ द्विघात समीकरण के अधिकतम तथा न्यूनतम मान

$F(x) = ax^2 + bx + c$

$$F(x)_{min} = \frac{4ac-b^2}{4a} \text{ When } a < 0 ;$$

$$F(x)_{max} = \frac{4ac-b^2}{4a} \text{ When } a > 0$$

Ex. Find the maximum value of the quadratic equation $2x^2 + 3x + 4 + 0$.

द्विघात समीकरण $2x^2 + 3x + 4 + 0$ के अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

When $a > 0$

$$f(x)_{max} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\times2\times4-(3)^2}{4\times2} = \frac{32-9}{8} = \frac{23}{8}$$

6. Nature of roots/मूलों की प्रकृति

(a) If $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ roots are real and equal.

Ex. For what value of m the roots of the equation $4x^2 + 6mx + 9 = 0$ are equal.

m के किस मान के लिए समीकरण $4x^2 + 6mx + 9 = 0$ के मूल बराबर हैं।

HINTS:

Standard eqⁿ. of quadratic equation

$ax^2 + bx + c = 0$ and $4x^2 + 6mx + 9 = 0$

comparing standard equation then we get

$a = 4, b = 6m$ and $c = 9$

If roots are equal

$\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow 36m^2 = 144$

$m = \pm 2$

(b) If $b^2 - 4ac > 0$ & not a perfect square $\Rightarrow$ roots are real, unequal.

Ex. $x^2 + 12x + 35 = 0$

HINTS:

Hence, $a = 1, b = 12, c = 35$

$D = b^2 - 4ac = 144 - 4 \times 1 \times 35 = 4$

$D > 0$

$\therefore$ Roots are real, unequal and rational.

Ex. (c) If $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ roots are imaginary

Ex. $\sqrt{2}t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$

Here, $a = \sqrt{2}, b = -3, c = 3\sqrt{2}$

$D = b^2 - 4ac = 9 - 24 = -15$

$D < 0$

$\therefore$ Roots are imaginary

@Baka_260

Conditions for Common Roots
उभनिष्ठ मूलों के लिए शर्तें

Consider two quadratic equations:

दो द्विघात समीकरण लेते है-

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$

$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$

(i) Condition for both root common.

दोनों मूल उभनिष्ठ होने की शर्त-

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

(ii) Condition for one root common

एक मूल उभनिष्ठ होने की शर्त-

$$(b_1c_2 - b_2c_1)(a_1b_2 - a_2b_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$$

Cubic Equation/त्रिघात समीकरण

If α, β and γ are the roots of cubic equation

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$/यदि α, β और γ घन समीकरण $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ के मूल है।

Then/तब

Sum of roots,

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -\frac{\text{Coeffioent of } x^2}{\text{Coefficiént of } x^3}$$

Sum of product of two roots,

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{Coefficient of } x}{\text{Coefficient of } x^3}$$

Product of roots,

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} = -\frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^3}$$

If α, β and γ are the roots of cubic equation, then the equation is, i.e.

यदि α, β और γ घन समीकरण के मूल हैं, तो समीकरण हैं

$$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$$

☆☆☆☆☆

@Baka_260

TRIGONOMETRY

त्रिकोणमिति

09

Basic Angular Systems/मूल कोणीय पद्धतियाँ

Sexagesimal System/षाष्टिक पद्धति

- $\frac{1}{90}$ of a right angle = 1°

  एक समकोण का $\frac{1}{90}$ = 1°

- $\frac{1}{60}$ of 1° = 1' [1 min.]

  1° का $\frac{1}{60}$ = 1' [1 मिनट]

- $\frac{1}{60}$ of 1' = 1" [1 sec.]

  1' का $\frac{1}{60}$ = 1" [1 सेकंड]

Ex. Convert degrees, minutes to decimal degrees.

941° 27' 8"

डिग्री, मिनट को दशमलव डिग्री में बदलें।

941° 27' 8".

HINTS:

$$941° 27' 8" = 941° + \frac{27}{60} + \frac{8}{60 \times 60} = 941° + \frac{9°}{20} + \frac{1°}{450}$$

$$= 941° + 0.45° + 0.0022° = 941.452°$$

Ex. Convert the decimal degrees to dgree, minutes and seconds.

48.63°.

दशमलव अंशों को डिग्री, मिनट और सेंकड में बदलें।

48.63°.

HINTS:

48.63° → D°M'S"

D° = 48°

M' = 0.63° × 60 = 37.8

M' = 37'

S" = 0.8 × 60 = 48"

D°M'S" = 48.63° = 48°37'48"

Circular System/वृत्तीय पद्धति

Measurement of Angles	
x degrees	$\left(\frac{\pi}{180} \times x\right)$ radians
x radians	$\left(\frac{180}{\pi} \times x\right)$ degrees
$1°c\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$	57°16'22"
1°c (π = 3.141592...)	57°17'21"
1°	0.01746 radian
$l = r\theta$ Where l = length of arc r = radius of arc θ = angle on centre (θ is always in radians	

Ex. Convert the radian measure to degree measure/ रेडियन माप को डिग्री माप में बदलें।

$\frac{-53\pi}{10}$

HINTS:

$\frac{-53\pi}{10}$

We know that,

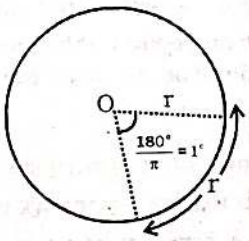
1 radian = $\frac{180°}{\pi}$

$$\frac{-53\pi}{10} \times \frac{180°}{\pi} = 18 \times (-53) = -954°$$

Radian System/रेडियन पद्धति

- $\frac{\text{Circumference}}{\text{Diameter}}$ = Fixed Number

  = π (Irrational number)

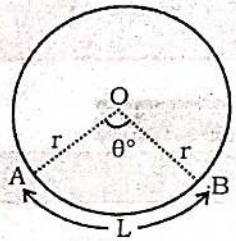


$2\pi r \rightarrow 360°$

@Bakal260

$r \rightarrow \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$ = 1 radian (1^c)

Circle के radius के बराबर की arc centre पर 1 radian का angle बनाएगी।



$\overline{AB} = L = 2\pi r \times \frac{\theta°}{360°}$

$L = r \times \frac{\pi\ \theta°}{180°}$

$L = r \times \theta^c$ Where, $\theta^c = \theta° \times \frac{180°}{\pi}$

Ex. A rail road curve is to be laid out on a circle. What radius should be used if the track is to change direction by 25° a distance of 40 meters.

एक वृत्त पर एक रेल रोड कर्व बिछाया जाना है। यदि ट्रैक को 25°, 40 मीटर की दूरी से दिशा बदलनी है तो किस त्रिज्या का उपयोग किया जाना चाहिए।

HINTS:

Given, Length of the arc = 40 m

$\theta = 25° = 25 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{36}$ radian

We know that, $\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow r = \frac{l}{\theta}$

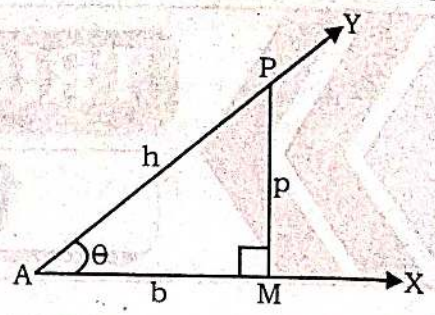
$= \frac{40}{\frac{5\pi}{36}} = \frac{40 \times 36 \times 7}{5 \times 22} = 91.64m$

So, radius of track should be 91.64m

Trigonometric Ratios/त्रिकोणमिति अनुपात

Consider an acute angle $\angle YAX = \theta$ with initial side AX and terminal side AY. Let P be any point on the terminal side AY. PM perpendicular from P on AX to get the right angled trianlge AMP in which $\angle PAM = \theta$.

माना एक न्यूनकोण $\angle YAX = \theta$ है। जिसमें प्रारम्भिक भुजा AX तथा अन्तिम भुजा AY है। भुजा AY पर कोई बिन्दु P है। PM बिन्दु P से भुजा AX पर लम्ब इस प्रकार है कि कोण AMP समकोण है जिसमें $\angle PAM = \theta$ है।



In the figure,

p = perpendicular/लंब

b = base/आधार

h = hypotaneous/कर्ण

By the 'pythagoras theorem'

$p^2 + b^2 = h^2$

Note: h is always greater than that of p and b.

(i) $\sin\theta = \frac{\text{Perpendicular / लम्ब}}{\text{Hypotenuse / कर्ण}} = \frac{p}{h}$

(ii) $\cos\theta = \frac{\text{Base / आधार}}{\text{Hypotenuse / कर्ण}} = \frac{b}{h}$

(iii) $\tan\theta = \frac{\text{Perpendicular / लम्ब}}{\text{Base / आधार}} = \frac{p}{b}$

(iv) $\text{Cosec}\theta = \frac{\text{Hypotenuse / कर्ण}}{\text{Perpendicular / लम्ब}} = \frac{h}{p}$

(v) $\sec\theta = \frac{\text{Hypotenuse / कर्ण}}{\text{Base / आधार}} = \frac{h}{b}$

(vi) $\cot\theta = \frac{\text{Base / आधार}}{\text{Perpendicular / लम्ब}} = \frac{b}{p}$

Important Pythagorean triplets.

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)	(8, 15, 17)	(9, 40, 41)
(11, 60, 61)	(12, 35, 37)	(13, 89, 85)	(16, 63, 65)	(20, 21, 29)
(28, 45, 53)	(33, 56, 65)	(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(48, 55, 73)
(65, 72, 97)	(20, 99, 101)	(60, 91, 109)	(15, 112, 113)	(44, 117, 125)
(88, 105, 137)	(17, 144, 145)			

Relations Between Trigonometric Ratios
त्रिकोणमिति अनुपात के बीच सम्बन्ध

(i) (a) $\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$

(b) $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

(c) $\sin\theta \cdot \text{cosec}\theta = 1$

(ii) (a) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$

(b) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

(c) $\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$

(iii) (a) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$

(b) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

(c) $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$

(iv) (a) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(b) $\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

(c) $\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\tan\theta}$

(v) (a) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(b) $\cos\theta = \cot\theta \cdot \sin\theta$

(c) $\sin\theta = \frac{\cos\theta}{\cot\theta}$

Values of Trigonometric Ratios of Special Angles
(विशेष कोणों के त्रिकोणमिति अनुपात के मान)

(i) $\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos 75°$

(ii) $\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin 75°$

(iii) $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72°$

(iv) $\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72°$

(v) $\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54°$

(vi) $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54°$

(vii) $\sin 22\frac{1°}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(viii) $\cos 22\frac{1°}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Some Trigonometric Ratios of Angles
(कुछ कोणों के त्रिकोणमिति अनुपात)

Values of the trigonometric ratios for some special angles are given below:
कुछ विशेष कोणों के लिए त्रिकोणमिति अनुपातों के मान नीचे दिए गए हैं:

Ratio of Standard Angles																	
Degree	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	(ND) ∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	(ND) ∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\cot\theta$	(ND) ∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	(ND) ∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	(ND) ∞
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	(ND) ∞	-2	$-\sqrt{2}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	-1	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	(ND) ∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\operatorname{cosec}\theta$	(ND) ∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	(ND) ∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	(ND) ∞

@Baka_260

Trigonometric Identities/त्रिकोणमिति सर्वसमिकाएँ

A. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

B. $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

Note: If $(\sec\theta + \tan\theta) = k$, then $(\sec\theta - \tan\theta) = 1/k$

$\Rightarrow \sec\theta = \frac{k^2+1}{2k}$ & $\tan\theta = \frac{k^2-1}{2k}$

C. $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta) = 1$

Note: If $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = p$, then $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta) = \frac{1}{p}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{p^2+1}{2p}$ & $\cot\theta = \frac{p^2-1}{2p}$

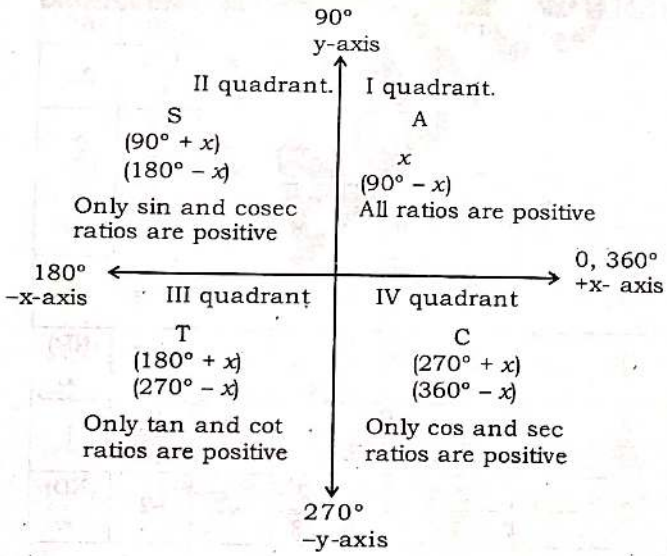
If $\sec\theta + \tan\theta = \frac{a}{b}$

then, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \frac{a+b}{a-b}$

Trigonometric Ratios in Terms of other Trigonometric Ratios
त्रिकोणमिति अनुपात दूसरे त्रिकोणमिति के रूप में

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2-1}}$
$\operatorname{cosec}\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\operatorname{cosec}\theta$

Sign of Trigonometric Ratios
त्रिकोणमिति अनुपातों के चिन्ह



(i) First Quadrant/प्रथम चतुर्थांश

All trigonometric ratios are positive/सभी त्रिकोणमिति अनुपात धनात्मक होते हैं।

(ii) Second Quadrant/द्वितीय चतुर्थांश

$\sin\theta$ and $\operatorname{cosec}\theta$ are positive./$\sin\theta$ और $\operatorname{cosec}\theta$ धनात्मक होते हैं।

(iii) Third Quadrant/तृतीय चतुर्थांश

$\tan\theta$ and $\cot\theta$ are positive./$\tan\theta$ और $\cot\theta$ धनात्मक होते हैं।

(iv) Fourth Quadrant/चतुर्थ चतुर्थांश

$\cos\theta$ and $\sec\theta$ are positive./$\cos\theta$ और $\sec\theta$ धनात्मक होते हैं।

$\Rightarrow$ 90°, 270° ..... (will convert to an odd multiple of 90°)

$\Rightarrow$ 0°, 180°, 360° ..... (Will not convert to an even multiple of 90°)

Remember:

In Quadrant:	I	II	III	IV
T-ratios:	All	sin	tan	cos → +Ve

@Baka_260

Trigonometric Ratios of Some Special Angles
कुछ विशेष कोणों के त्रिकोणमिति अनुपात

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$	$\operatorname{cosec}(90°-\theta)=\sec\theta$
$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$	$\sec(90°-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$
$\tan(90°-\theta)=\cot\theta$	$\cot(90°-\theta)=\tan\theta$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$	$\operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$
$\cos(-\theta)=\cos\theta$	$\sec(-\theta)=\sec\theta,$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$

$\sin(90°+\theta)=\cos\theta$	$\operatorname{cosec}(90°+\theta)=\sec\theta$
$\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$	$\sec(90°+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$
$\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$	$\cot(90°+\theta)=-\tan\theta$

$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$	$\operatorname{cosec}(270°+\theta)=-\sec\theta$
$\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$	$\sec(270°+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$
$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$	$\cot(180°+\theta)=\cot\theta$

Ex: $\dfrac{\sin(270°+\theta).\cos(360°+\theta).\tan(170°+\theta).\sin 60°}{\cos(180°+\theta).\sin(270°-\theta).\cot(260°+\theta).\cos 30°}$

HINTS:

$$=\frac{-\cos\theta\cos\theta\tan(180°+\theta-10°)\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\theta\cos\theta\cot(270°+\theta-10°)\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{-1\times\tan(\theta-10°)}{\tan(\theta-10°)}=-1$$

Ex. Find the value of cosec (1020°)

cosec (1020°) का मान ज्ञात करें।

HINTS:

$=\operatorname{cosec}(3\times360°-60°)$

$=-\operatorname{cosec}60°=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$

When sum of two angles are given
जब दो कोणों का योगफल दिया हो

A. If A + B = 90°,

(i) sinA secB = 1

(ii) cosA cosecB = 1

(iii) tanA tanB = 1

(iv) cotA cotB = 1

(v) $\sin^2A+\sin^2B=1$

Ex. If $\tan2\theta.\tan7\theta=1$ then find the value of $\sin3\theta+\cos12\theta$.

यदि $\tan2\theta.\tan7\theta=1$ है, तो $\sin3\theta+\cos12\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$2\theta+7\theta=90°$

$\Rightarrow\theta=10°$

Now,

$\sin3\theta+\cos12\theta$

$\sin30°+\cos120°$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

B. If A + B = 180°,

sinA cosecB = 1

C. If A + B = 45° = 225°,

(i) (1 + tanA) (1 + tanB) = 2

(ii) (1 – cotA) (1 – cotB) = 2

Ex. $\left[1+\tan\left(22\frac{1}{2}^\circ+x-y\right)\right]\left[1+\tan\left(22\frac{1}{2}^\circ+y-x\right)\right]$

HINTS:

Here, $22\frac{1}{2}^\circ+x-y+22\frac{1}{2}^\circ+y-x=45°$

Hence,

$\left[1+\tan\left(22\frac{1}{2}^\circ+x-y\right)\right]\left[1+\tan\left(22\frac{1}{2}^\circ+y-x\right)\right]=2$

Ex. Find the value of (1 + tan11°) (1 + tan 21°) (1 + tan 24°) (1 + tan 34°) (1 + tan 45°)

(1 + tan11°) (1 + tan 21°) (1 + tan 24°) (1 + tan 34°) (1 + tan 45°) का मान ज्ञात करें।

HINTS:

(1 + tan 11°) (1 + tan 21°) (1 + tan 24°) (1 + tan 34°) (1 + tan 45°)

$\Rightarrow2\times2=4$

D. If A + B = 135°,

(i) (1 – tanA) (1 – tanB) = 2

(ii) (1+ CotA) (1 + CotB) = 2

Ex. If $x+y=135°$ then find $\left(1+\tan\frac{x}{3}\right)\left(1+\tan\frac{y}{3}\right)$.

यदि $x+y=135°$ तो $\left(1+\tan\frac{x}{3}\right)\left(1+\tan\frac{y}{3}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS:

ATQ, $x+y=135$

@Baka_200

On dividing both the sides by 3, we get-

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=\frac{135}{3}\Rightarrow\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=45^\circ$$

Hence, $\left(1+\tan\frac{x}{3}\right)\left(1+\tan\frac{y}{3}\right)=2$

Some useful results/कुछ उपयोगी परिणाम

(A)

1. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=2$ 'or' $\sin\alpha+\sin\beta=2$
   $\rightarrow \alpha=\beta=90^\circ \leftarrow$
2. $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=2$ 'or' $\sin\alpha+\cos\beta=2$
   $\rightarrow \alpha=90^\circ \& \beta=0^\circ \leftarrow$
3. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=2$ 'or' $\cos\alpha+\cos\beta=2$
   $\rightarrow \alpha=\beta=0^\circ \leftarrow$

(B)

1. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=0$ when $\alpha=\beta=0$
2. $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=0$ when $\alpha=0$ & $\beta=90^\circ$
3. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=0$ when $\alpha=\beta=90^\circ$

Identities based on Sum & Difference of angle of T-Ratio

त्रिकोणमिति अनुपात के कोणों का योग तथा अंतर पर आधारित सर्वसमिकाएँ

(a) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$
(b) $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$
(c) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$
(d) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$
(e) $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$
(f) $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$
(g) $\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$
(h) $\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$
(i) $\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$

Multiple and Sub-multiple Trigonometric function of 2A

2A के गुणक तथा उपगुणक त्रिकोणमितीय फलन

- $\sin 2A=2\sin A.\cos A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
- $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$
- $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1$
  $=1-2\sin^2 A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
- $\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1=1-2\sin^2\frac{A}{2}$
  $=\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$
- $1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}$
- $1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}$
- $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
- $\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$
- $\cot 2A=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$

Trigonometric function of 3A

3A के त्रिकोणमितीय फलन

- $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$
- $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$
- $\tan 3A=\left(\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\right)$
- $\cot 3A=\left(\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}\right)$

Transformation of a product into sum or difference

(गुणन का योग या अन्तर में परिवर्तन)

(1) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A$
(2) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 B$
(3) $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$
(4) $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$
(5) $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$
(6) $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

@Baka_260

Transformation of sum or difference into product
(योग अथवा अन्तर का गुणन में परिवर्तन)

$$\sin C+\sin D=2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)$$

Some Important Results
(कुछ महत्वपूर्ण परिणाम)

(1) $\sin A.\sin 2A.\sin 4A=\frac{1}{4}\sin 3A$

(2) $\cos A.\cos 2A.\cos 4A=\frac{1}{4}\cos 3A$

(3) $\tan A.\tan A.\tan 4A=\tan 3A$

(4) $\sin(60°-A).\sin A.\sin(60°+A)=\frac{1}{4}\sin 3A$

(5) $\cos(60°-A).\cos A.\cos(60°+A)=\frac{1}{4}\cos 3A$

(6) $\tan(60°-A).\tan A.\tan(60°+A)=\tan 3A$

(7) $\sin^2(60°-A)+\sin^2 A+\sin^2(60°+A)=\frac{3}{2}$

(8) $\cos^2(60°-A)+\cos^2 A+\cos^2(60°+A)=\frac{3}{2}$

Some Standard identities in triangle
(त्रिभुज की कुछ मानक सर्वसमिकाएँ)

(A) If $A+B+C=180°$ 'or' π,

(1) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(2) $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}=1$

(3) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(4) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

(5) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

(B) If $A+B+C=90°$ 'or' $\frac{\pi}{2}$ then,

$\cot A+\cot B+\cot C=\cot A.\cot B.\cot C$

Results to find constant values
अचर मान ज्ञात करने के लिए परिणाम

(1) $a\sin\theta+b\cos\theta=c$ &
$b\sin\theta-a\cos\theta=d$ 'or' $a\cos\theta-b\sin\theta=d$
$\Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$

(2) $a\sec\theta\pm b\tan\theta=c$, $b\sec\theta\mp a\tan\theta=d$
$\Rightarrow a^2-b^2=c^2-d^2$

(3) $a\,\mathrm{cosec}\,\theta\pm b\cot\theta=c$, $b\,\mathrm{cosec}\,\theta\mp a\cot\theta=d$
$\Rightarrow a^2-b^2=c^2-d^2$

Ex. If $p\sec\theta-q\tan\theta=10$ and $p\tan\theta-q\sec\theta=8$ then find the value of p^2-q^2+2.

यदि $p\sec\theta-q\tan\theta=10$ और $p\tan\theta-q\sec\theta=8$ है तो p^2-q^2+2 का ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Using formula(2),

$\Rightarrow p^2-q^2=10^2-8^2$

$\Rightarrow p^2-q^2=36$

Adding both the side's '2'

$\Rightarrow p^2-q^2+2=38$

Important Facts Useful for Solving Question on Trigonometry
त्रिकोणमिति के प्रश्नों को हल करने में मदद करने वाले महत्वपूर्ण तथ्य

(1) $(\sin^2 A+\cos^2 A-\sin A\cos A)(\sin A+\cos A)=\sin^3 A+\cos^3 A$

(2) $\left(\frac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2=\tan^2\theta$

(3) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\sec\theta-\tan\theta$

(4) $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\mathrm{cosec}\,\theta+\cot\theta$

(5) $\sqrt{\frac{\mathrm{cosec}\,\theta+1}{\mathrm{cosec}\,\theta-1}}=\sec\theta+\tan\theta$

(6) $\sqrt{\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta}}=\sec\theta+\tan\theta$

(7) $\sqrt{\frac{\mathrm{cosec}\,\theta+\cot\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta-\cot\theta}}=\mathrm{cosec}\,\theta+\cot\theta$

(8) $(\mathrm{Cosec}-\mathrm{Cot}\,\theta)^2=\frac{1-\mathrm{Cos}\,\theta}{1+\mathrm{Cos}\,\theta}$, $0°<\theta<90°$

(9) $\frac{\tan\theta_1+\cot\theta_2}{\tan(90-\theta_1)+\cot(90-\theta_2)}=\tan\theta_1.\cot\theta_2$

(10) $\tan\theta(1+\sec 2\theta)(1+\sec 4\theta)(1+\sec 8\theta)=\tan 8\theta$

(11) $\sec^4\theta-\tan^4\theta=\sec^2\theta+\tan^2\theta=1+2\tan^2\theta$

@Baba2go

(12) $\text{cosec}^4\theta - \cot^4\theta = \text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta = 1 + 2\cot^2\theta$
$= 2\text{cosec}^2\theta - 1$

(13) $\frac{\text{Cos}\,\theta + \text{Sin}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta - \text{Sin}\,\theta} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

(14) If $\text{cosec}\theta - \sin\theta = m$ and $\sec\theta - \cos\theta = n$ then
$(m^2n)^{2/3} + (mn^2)^{2/3} = 1$

(15) If $\cot\theta + \tan\theta = x$ and $\sec\theta - \cos\theta = y$ then
$(x^2y)^{2/3} - (xy^2)^{2/3} = 1$

(16) If $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$ then $\sin\theta = \cos^2\theta$ and $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$
and $\cos^{12}\theta + 3\cos^{10}\theta + 3\cos^8\theta + \cos^6\theta + 2\cos^4\theta + 2\cos^2\theta - 2 = 1$

(17) If $\tan\theta = 1 - a^2$ then $\sec\theta + \tan^3\theta\cos\theta\,\text{cosec}\theta = (2-a^2)^{3/2}$

(18) If $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ then $\sin 2\theta = 2$

(19) If $\text{cosec}\theta + \cot\theta = m$ and $\text{cosec}\theta - \cot\theta = n$ then $mn = 1$

(20) If $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ and $\frac{x}{a}\sin\theta - \frac{y}{b}\cos\theta = 1$ then
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$

(21) If $x = a\cos^3\theta$ and $y = b\sin^3\theta$ then $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$

(22) If $\cos A + \cos^2 A = 1$, then $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$

(23) If $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$ then $2\sin\theta - \cos\theta = 2$

(24) If $\text{cosec}\,x - \sin x = a^3$ and $\sec x - \cos x = b^3$ then
$a^2b^2(a^2+b^2) = 1$

(25) If $\cot x(1+\sin x) = 4m$ and $\cot x(1-\sin x) = 4n$ then
$m^2 - n^2 = mn$

(26) If $\text{cosec}\,\theta - \sin\theta = l$ and $\sec\theta - \cos\theta = m$, then
$l^2m^2(l^2+m^2+3) = 1$

(27) If $x = a\sin\theta$ and $y = b\tan\theta$ then $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$

(28) $x = r\sin A\cos C$, $y = r\sin A\sin C$ and $z = r\cos A$
then $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

(29) If $\tan\theta + \sin\theta = m$ and $\tan\theta - \sin\theta = n$, then
$m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

(30) (i) (a) $\sin1°.\sin2°.\sin3°.\sin4°.....\sin180° = 0$
(b) $\sin1°.\sin2°.\sin3°.\sin4°.....$to
Greater than $\sin 180° = 0$

(ii) (a) $\cos1°.\cos2°.....\cos90° = 0$
(b) $\cos1°.\cos2°.....$to (greater than $\cos90°$) $= 0$

(iii) (a) $\tan1°.\tan2°.....\tan89° = 1$

(iv) $\text{Sin}^2\theta + \text{Sin}^2(\theta + x) + ...+ \text{Sin}^2[90 - (\theta + x)] + \text{Sin}^2(90 - \theta) = \frac{\text{Total terms}}{2}$

Ex. 1. $\text{Sin}^2 5° + \text{Sin}^2 10° + \text{Sin}^2 15° + ...+ \text{Sin}^2 85° + \text{Sin}^2 90°$

$\text{Total terms} = \frac{90-5}{5} + 1 = 18$

$\text{Sum} = \frac{\text{Total terms}}{2} = \frac{18}{2} = 9$

2. $\text{Sin}^2 5° + \text{Sin}^2 6° + ... + \text{Sin}^2 84° + \text{Sin}^2 85°$

$\text{Total terms} = \frac{85-5}{1} + 1 = 81$

$\text{Sum} = \frac{\text{Total terms}}{2} = \frac{81}{2} = 40\frac{1}{2}$

Max/Min Values of Trigonometric Functions
त्रिकोणमिति फलनों के अधिकतम/न्यूनतम मान

A. $m\sin\theta \pm n\cos\theta$

(i) Maximum value/अधिकतम मान $= \sqrt{m^2+n^2}$

(ii) Minimum value/न्यूनतम मान $= -\sqrt{m^2+n^2}$

Ex: Find the maximum and minimum value of $9\sin\theta + 40\cos\theta$.

$9\sin\theta + 40\cos\theta$ का अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$9\sin\theta + 40\cos\theta$.

Maximum value $= \sqrt{(9)^2+(40)^2} = \sqrt{81+1600} = 41$

Minimum value $= -\sqrt{(9)^2+(40)^2} = -\sqrt{1681} = -41$

B. $a\sin^2\theta + b\cos^2\theta$

(i) Maximum value/अधिकतम मान = Max [a, b]

(ii) Minimum value/न्यूनतम मान = Min [a, b]

Ex. Find the minimum value of $12\sin^2\theta + 23\cos^2\theta$

$12\sin^2\theta + 23\cos^2\theta$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए

HINTS:

$12\sin^2\theta + 23\cos^2\theta$

Maximum value = 23

Minimum value = 12 + 0 = 12

C. $a\sin^2\theta + b\operatorname{cosec}^2\theta$

$a\tan^2\theta + b\cot^2\theta$

$a\cos^2\theta + b\sec^2\theta$

(i) Minimum value/न्यूनतम मान = $2\sqrt{ab}$, when $a \geq b$

(ii) Minimum value/न्यूनतम मान = $(a + b)$, when $a \leq b$

Ex. (i) Find the minimum value of $16\tan^2\theta + 4\cot^2\theta$.

$16\tan^2\theta + 4\cot^2\theta$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Minimum value = $2\sqrt{ab}$

= $2\sqrt{16\times4} = 16$

(ii) Find the minimum value of $5\cos^2\theta + 8\sec^2\theta$.

$5\cos^2\theta + 8\sec^2\theta$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Minimum value = $a + b$ when $b \geq a$

= $5 + 8 = 13$

D. $\sin^n\theta \cdot \cos^n\theta$

When, n is odd/जब n विषम हो,

(i) Maximum value/अधिकतम मान = $+\frac{1}{2^n}$

(ii) Minimum value/न्यूनतम मान = $-\frac{1}{2^n}$

When, n is even/जब n सम हो,

(i) Maximum value/अधिकतम मान = $+\frac{1}{2^n}$

(ii) Minimum value/न्यूनतम मान = 0

Ex. Find the maximum and minimum value of $\sin^6\theta \cdot \cos^6\theta$.

$\sin^6\theta \cdot \cos^6\theta$ का अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Maximum value = $\sin^6\theta \cdot \cos^6\theta$.

= $\frac{\pm1}{2^6} = \frac{1}{64}$

Minimum value = 0

(ii) Find the maximum and minimum value of $\sin^5\theta \cdot \cos^5\theta$.

$\sin^5\theta \cdot \cos^5\theta$ का अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Maximum value = $\sin^5\theta \cdot \cos^5\theta$.

Here, n = 5 (odd)

Maximum value = $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

Minimum value = $-\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{32}$

@Baka_260

★★★★★

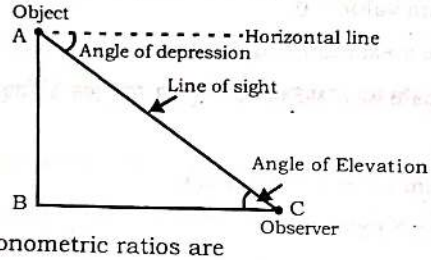
HEIGHT & DISTANCE

ऊँचाई और दूरी

10

The height and distance problems are solved with the help of trigonometric ratios of angle of elevation in a right-angled triangle.

ऊँचाई एवं दूरी के प्रश्न समकोण त्रिभुज के उन्नयन कोण के त्रिकोणमिति अनुपात की मदद से हल किये जाते हैं।



Trigonometric ratios are

$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$, $\cos\theta = \frac{BC}{AC}$,

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$, $\sec\theta = \frac{AC}{BC}$

$\text{cosec}\theta = \frac{AC}{AB}$, $\cot\theta = \frac{BC}{AB}$

In most of the problems of height and distance, we come across the two special right-angled traingles as follow :

ऊंचाई और दूरी की अधिकांश प्रश्नों में, हमें दो विशेष समकोण त्रिभुज मिलते हैं जो इस प्रकार हैं:

(i) Angle of elevation is 30° or 60°.

ऐसे त्रिभुज जिसमें उन्नयन कोण 30° या 60° होता है।

(ii) Angle of elevation is 45°

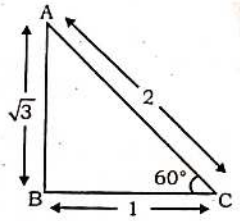
ऐसे त्रिभुज जिसमें उन्नयन कोण 45° होता है।

Ex. The angle of elevation of the top of a building at distance of 70 m from its foot on a horizontal plane is found to be 60°. Find the height of the building.

क्षैतिज तल पर किसी इमारत के आधार से 70 मीटर की दूरी पर उसके शीर्ष का उन्नयन कोण 60° पाया जाता है। भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

HINTS:

In ΔABC



Given that,

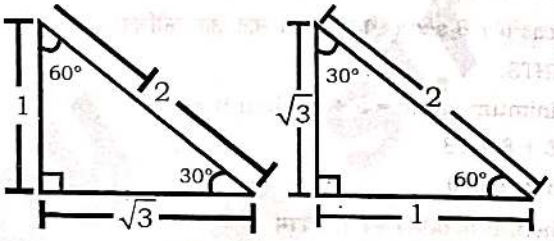
1 unit (BC) = 70 meter

then,

$\sqrt{3}$ unit (AB) = $70\sqrt{3}$ meter

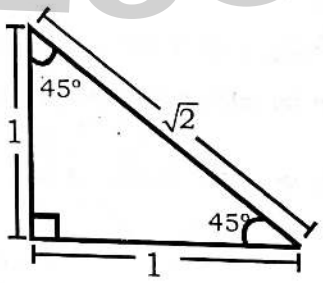
If one of the angle of a right-angled triangle is 30°, the other acute angle must be 60° and the ratio of the sides will be shown as follows :

यदि किसी समकोण त्रिभुज का एक कोण 30° है, तो दूसरा न्यून कोण 60° होगा और भुजाओं का अनुपात इस प्रकार दिखाया जाएगा:



If one of the angle of a right-angled triangle is 45°, then the other acute angle will also be 45° and the ratio of the sides will be as shown below :

यदि किसी समकोण त्रिभुज का एक कोण 45° है, तो दूसरा न्यून कोण भी 45° होगा और भुजाओं का अनुपात इस प्रकार दिखाया जाएगा:



30°-60° Relation

In more than 50% of height and distance problems in which two right-angled triangles are formed, angles of elevation or angles of depression will be 30° and 60°.

ऊँचाई और दूरी की 50 प्रतिशत से अधिक प्रश्नों में जिसमें दो समकोण त्रिभुज बनते हैं, उन्नयन कोण या अवनमन कोण 30° और 60° होंगे।

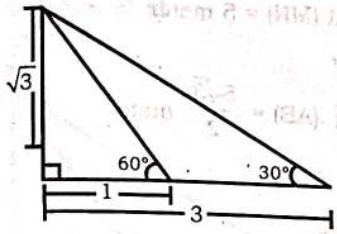
In these height and distance problems in which two angles of elevation or angles of depression are 30° or 60°. In these problems two right-angled triangles will be formed. If one of the side of these two right angled triangle is common or of equal length, the other side will be in the ratio 1 : 3.

ऊँचाई और दूरी के ऐसे प्रश्न जिनमें दो उन्नयन कोण या अवनमन कोण 30° या 60° होते हैं। ऐसे प्रश्नों में दो समकोण त्रिभुज बनते हैं। यदि इन दो समकोण त्रिभुज की एक भुजा उभयनिष्ठ या समान लंबाई की हो, तो दूसरी भुजा 1: 3 के अनुपात में होगी।

@Baka_260

Some Important Results

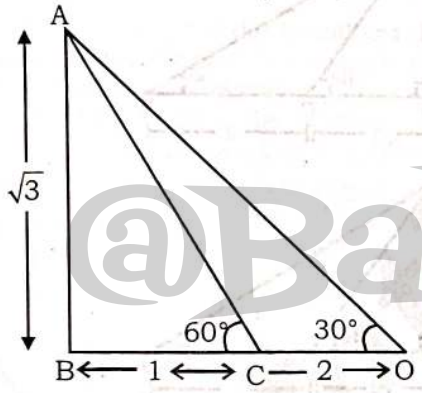
(a)



Ex. The angle of elevation of the top from the starting position of a 43.5 m tall tower to a woman standing on the ground floor was 60°. It rises in a straight line from the position of the tower in such a way that the angle of elevation of the tower becomes 30° from its final position. How far did she move from her initial position?

43.5 मीटर ऊंचे टावर की प्रारंभिक स्थिति से भूतल पर खड़ी एक महिला तक शीर्ष का उन्नयन कोण 60° था। यह टावर की स्थिति से एक सीधी रेखा में इस प्रकार चलती है कि टावर का उन्नयन कोण उसकी अंतिम स्थिति से 30° हो जाता है। वह अपनी आरंभिक स्थिति से कितनी दूर चली गई?

HINTS:



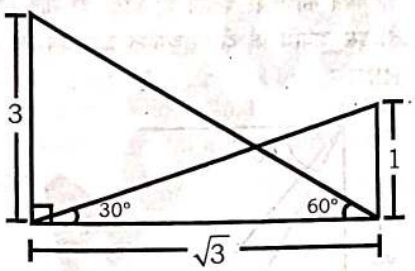
Given that,

$\sqrt{3}$ unit (AB) = 43.5 meter

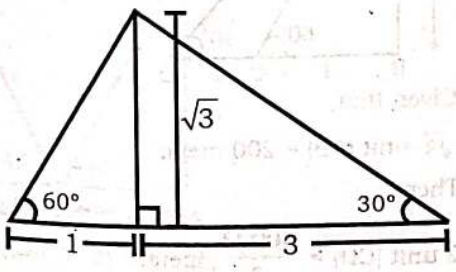
Then,

2 unit (CO) = $29\sqrt{3}$ meter

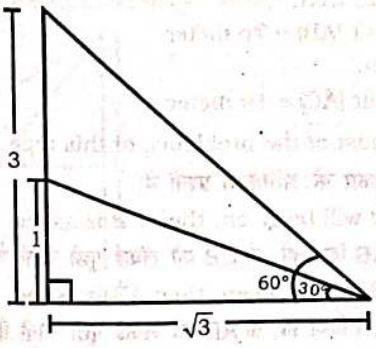
(b)



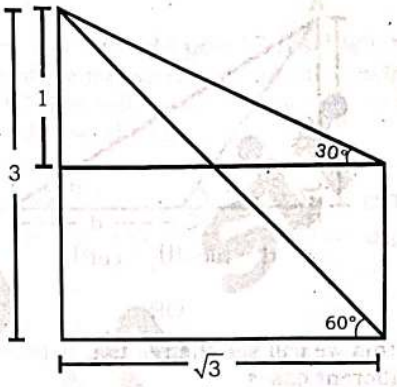
(c)



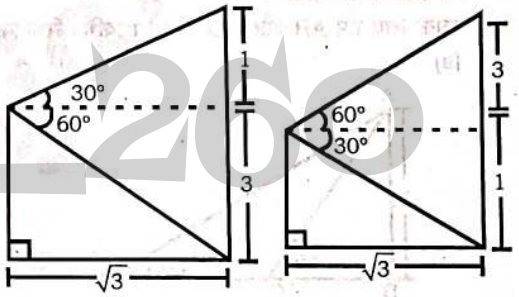
(d)



(e)



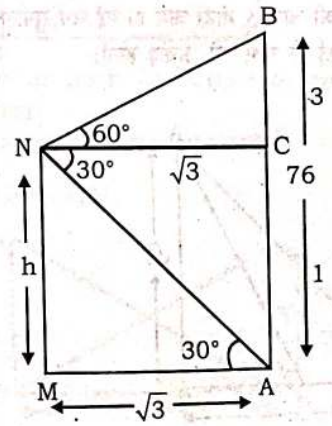
(f)



Ex. A vertical pole and vertical tower are placed on a flat ground such that the angle of elevation of the tower from the top of the pole is 60° and the angle of depression of the base of the tower from the top of the pole is 30°. If the height of the tower is 76 m, then find the height of the pole (in m).

एक ऊर्ध्वाधर खंभा और ऊर्ध्वाधर टॉवर को समतल जमीन पर इस प्रकार रखा गया है कि खंभे के शीर्ष से टॉवर का उन्नयन कोण 60° है और खंभे के शीर्ष से टॉवर के आधार का अवनमन कोण 30° है। यदि टावर की ऊंचाई 76 मीटर है, तो खंभे की ऊंचाई (मीटर में) ज्ञात करें।

HINTS:



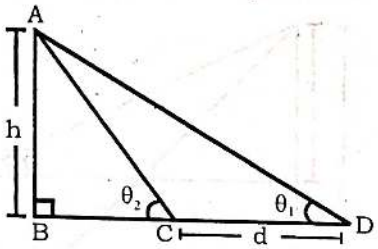
@Baka_260

Given that,
4 unit (AB) = 76 meter
Then,
1 unit (AC) = 19 meter

In most of the problems, of this type
इस प्रकार के अधिकांश प्रश्नों में,

(i) If AB will be given, then CB is asked
यदि AB दिया हो, तो CB की लंबाई पूछी जाती है।

(ii) If CB will be given, then AB is asked.
यदि CB दिया हो, तो AB की लंबाई पूछी जाती है।

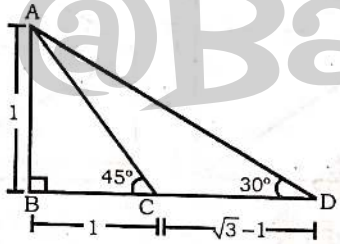


$d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$

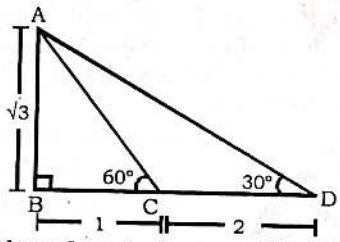
OR

For this we will see the relation between AB and CD in different cases.
इसके लिए हम AB और CD के मध्य विभिन्न स्थितियों में संबंध देखते हैं।

(a)

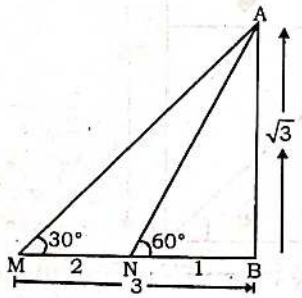


(b)



Ex. Shadow of a pole decreased by 5 m when Sunil altitude increase form 30° to 60° then height of the pole will be :
एक खंभे की छाया 5 मीटर कम हो गई जब सुनील की ऊंचाई 30° से 60° तक बढ़ गई तो खंभे की ऊंचाई होगी:

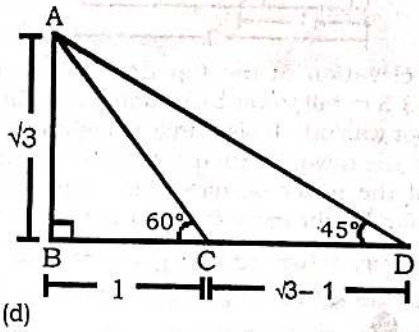
HINTS:



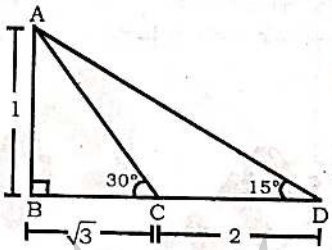
Given than,
2 unit (MN) = 5 meter
Then,

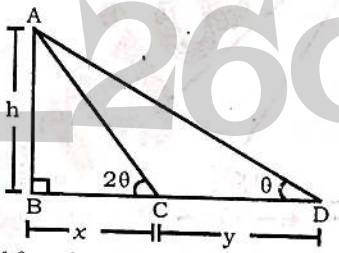
$29\sqrt{3}$ (AB) = $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ meter

(c)



(d)

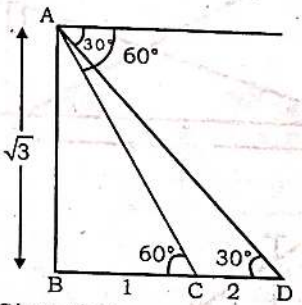




$h^2 = y^2 - x^2$

Ex. A man standing at the top of the tower of height 200 m observes a car at an angle of depression of 60° after some time angle of depression becomes 30°. The distance travelled by the car during this period is.
200 मीटर ऊंचे टावर के शीर्ष पर खड़ा एक व्यक्ति एक कार को 60° के अवनमन कोण पर देखता है, थोड़ी देर बाद अवनमन कोण 30° हो जाता है। इस अवधि के दौरान व्यक्ति द्वारा तय की गई दूरी है।

HINTS:



Given that,

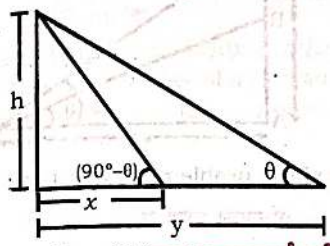
$\sqrt{3}$ unit (AB) = 200 meter

Then,

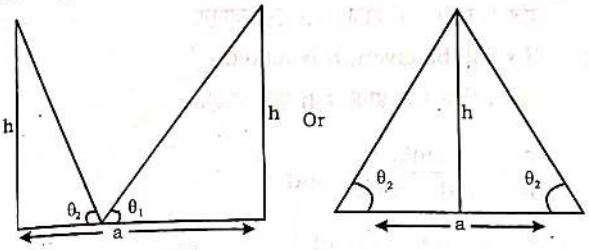
2 unit (CD) = $\frac{400\sqrt{3}}{3}$ meter

If both angles of elevation are complementary
यदि दोनों उन्नयन कोण पूरक हों तो

$h^2 = xy$ or $h = \sqrt{xy}$



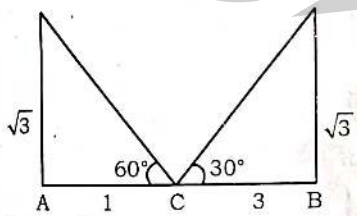
An Important Result/एक महत्त्वपूर्ण परिणाम



$a = h(\cot\theta_2 + \cot\theta_1)$

Ex. Two poles of equal height stand on either side of 60 meters wide roadway. At a point in the roadway between the pillars, the elevation of the top of poles are 30° and 60° what will be the height of the pillars?
60 मीटर चौड़ी सड़क के दोनों ओर समान ऊंचाई के दो खंभे खड़े हैं। खंभों के बीच सड़क के एक बिंदु पर, खंभों के शीर्ष की ऊंचाई 30° और 60° है, खंभों की ऊंचाई क्या होगी?

HINTS:

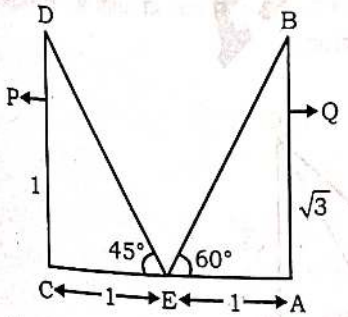


Given that,
4 unit (AB) = 60 meter
Then,

$\sqrt{3}$ unit = $15\sqrt{3}$ meter

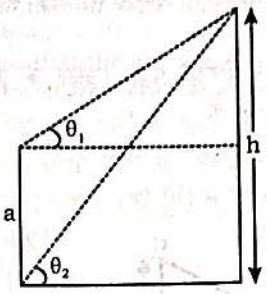
Ex. Exactly midway between the foot of two toweres P and Q, the angles of elevation of their tops are 45° and 60° respectively. What is the ratio of the height of P and Q?
दो टावरों P और Q के आधार के ठीक मध्य में, उनके शीर्षों का उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° है। P और Q की ऊंचाई का अनुपात क्या है?

HINTS:



Ratio between P : Q = 1 : $\sqrt{3}$

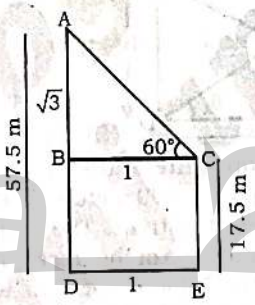
Important Result/महत्त्वपूर्ण परिणाम



$$h = \frac{a\cot\theta_2}{\cot\theta_2 - \cot\theta_2}$$

Ex. From the top of an upright pole 17.5 m high, the angle of elevation of the top an upright tower was 60°. If the tower was 57.5 m tall, how far away (in m) from the foot of the pole was the foot of the tower?
17.5 मीटर ऊंचे एक सीधे खंभे के शीर्ष से, एक सीधे टॉवर के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° था। यदि टॉवर 57.5 मीटर लंबा था, तो टॉवर का निचला सिरा खंभे के निचले सिरे से कितनी दूरी पर (मीटर में) था?

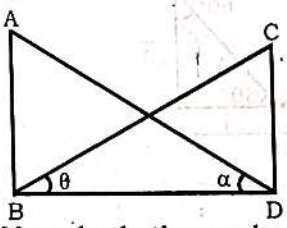
HINTS:



Given that,
$\sqrt{3}$ unit (AB) = 40 meter
Then,

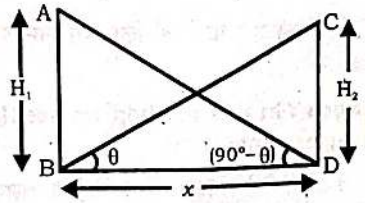
1 unit (DE) = $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ meter

In this type, we will study the question in which the figure will be formed as shown below :
इस प्रकार से हम ऐसे प्रश्नों का अध्ययन करेंगे जिसमें चित्र निम्नलिखित प्रकार से बनते हैं।



(i) $\theta + \alpha = 90°$ or both the angle of elevation are complementary.
$\theta + \alpha = 90°$ या दोनों उन्नयन कोण पूरक होते हैं।

$x^2 = H_1H_2$ or $x = \sqrt{H_1H_2}$

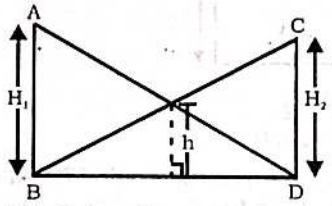


@Baka_260

(ii) Height of the point of intersection of the lines joining from foot of one to top of the other from horizontal line is h.

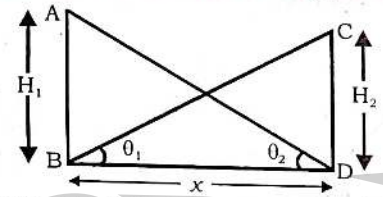
एक के पाद को दूसरे के शीर्ष से मिलाने वाली रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु की क्षैतिज रेखा से ऊँचाई h हो तो

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{H_1}+\frac{1}{H_2}$$



(iii) If both angles of elevation are not complementary, then we will solve these problem by using the right-angled triangles ABD and BCD.

यदि दोनों उन्नयन कोण पूरक न हो तो हम ऐसे प्रश्नों को दो समकोण त्रिभुजों ABD और BCD का प्रयोग करते हुए हल करते हैं।

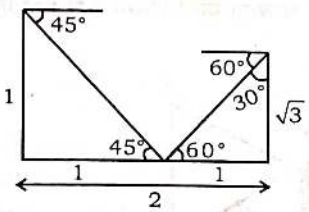


Ex. Two trees are along the opposite sides of a road. Distance between the two trees is 400 meters. There is a point on the road between the trees. The angle of depression of the point from the top of the trees are 45° and 60° if the height of the tree. Which makes 45° angle is 200m then what will be the height of the other trees?

दो पेड़ एक सड़क के विपरीत किनारों पर हैं। दोनों पेड़ों के बीच की दूरी 400 मीटर है। इन पेड़ों के बीच सड़क पर एक बिंदु है। यदि एक पेड़ की ऊंचाई 200 मीटर है और पेडों के शीर्ष से बिंदु का अवनमन कोण 45° और 60° है। तो अन्य पेड़ों की ऊंचाई कितनी होगी?

HINTS:

ATQ,



1 unit = 200

2 unit = 400

Then,

Height of the other tree = $200\sqrt{3}$

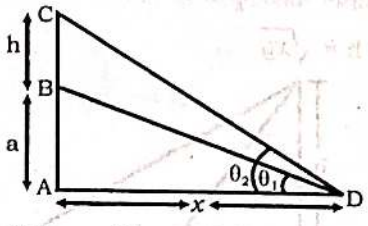
✍ To solve this type of question, we can use following methods.

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए हम निम्नलिखित विधियों का प्रयोग कर सकते हैं-

First Methods : In this method we use the two right-angled triangles separately.

प्रथम विधि : इसमें हम दो समकोण त्रिभुज अलग-अलग मानते हैं।

Second Method : Given $\angle ADB = \theta_1$, and $\angle ADC = \theta_2$



In most of the problems of this type

इस प्रकार के अधिकांश प्रश्नों में -

(i) If h will be given, x is asked

यदि h दिया गया होगा तो x पूछा जाएगा

(ii) If x will be given, h is asked

यदि x दिया गया होगा तो h पूछा जाएगा

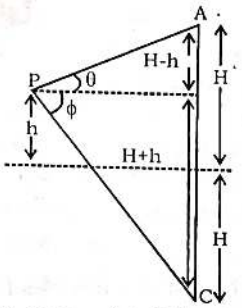
$$\frac{a}{h}=\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2-\tan\theta_1} \text{ and}$$

$$h = x(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$

✍ The angle of elevation of a cloud at height h above the level of water in a lake is θ and the angle of the depression of its image in the lake is ϕ. Then the height of the cloud above the surface of the lake is:

एक झील में पानी के स्तर से h ऊँचाई से बादल का उन्नयन कोण θ है और झील में उसकी छवि का अवनमन कोण ϕ है। तब झील की सतह के ऊपर बादल की ऊंचाई है:

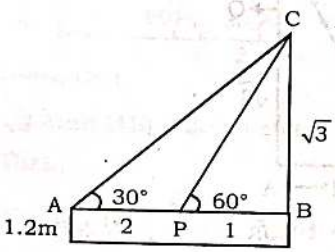
$$H=h\left(\frac{\cot\theta+\cot\phi}{\cot\theta-\cot\phi}\right)$$



Ex. A man of height 1.2 m walks towards a building of height 49.2 m. If the angle of elevation of the building changes from 30° to 60°, the find the distance travelled by the men?

1.2 मीटर ऊंचाई वाला एक व्यक्ति 49.2 मीटर ऊंची इमारत की ओर चलता है। यदि इमारत का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है, तो व्यक्ति द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए?

HINTS:



Given that,

$\sqrt{3}$ unit (BC) = 48 meter

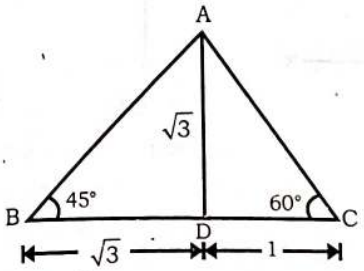
Then,

2 unit (AP) = $32\sqrt{3}$ meter

Ex. A pilot in an aeroplane at an altitude of 200 m observes two points lying on either side of a river. If the angles of the angles of despersion of the two points be 45° and 60°, then the width of the river is.

200 मीटर की ऊंचाई पर एक हवाई जहाज में एक पायलट नदी के दोनों किनारों पर स्थित दो बिंदुओं को देखता है। यदि दो बिंदुओं के फैलाव के कोणों का कोण 45° और 60° है, तो नदी की चौड़ाई है।

HINTS:



Given that,

$\sqrt{3}$ unit (AD) = 200 meter

Then,

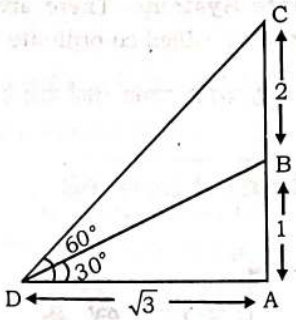
$\sqrt{3}+1$ unit (BC) = $200\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$ meter

★★★★★

Ex. From a distance of 78 m from the base of an unfinished tower, the angle of elevation of the top of the unfinished tower is 30°. How high (in m) should the tower be made so that the angle of elevation of the top of the finished tower from the same point becomes 60° ?

एक अधूरे टावर के आधार से 78 मीटर की दूरी से, अधूरे टावर के शीर्ष का उन्नयन कोण 30° है। टावर को कितना ऊंचा (मीटर में) बनाया जाना चाहिए ताकि उसी बिंदु से तैयार टावर के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° हो जाए?

HINTS:



Given that,

$\sqrt{3}$ unit (AD) = 78 meter

Then,

2 unit (BC) = $52\sqrt{3}$ meter

@Baka_260

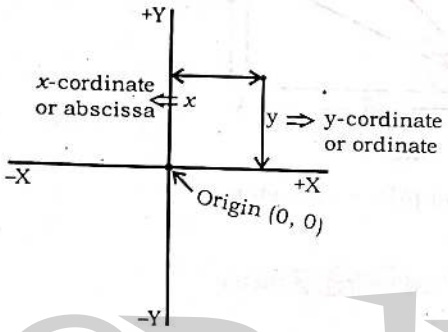
CO-ORDINATE GEOMETRY

निर्देशांक ज्यामिति

11

Rectangular Coordinate System - There are two mutually perpendicular lines, called co-ordinate axes.

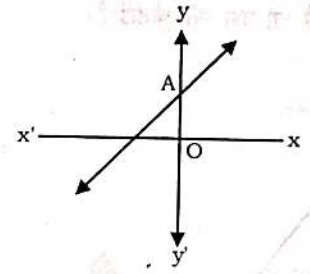
आयताकार निर्देशांक प्रणाली - दो परस्पर लंबवत रेखाएँ होती हैं, जिन्हें निर्देशांक अक्ष कहा जाता है।



SOME IMPORTANT POINT/ कुछ महत्वपूर्ण बिंदु

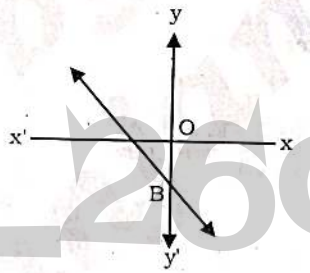
- The abscissa of a point is its perpendicular distance from y-axis.
  किसी बिंदु का भुज उसकी y- अक्ष से लंबवत् दूरी होती है।
- The ordinate of a point is its perpendicular distance from x-axis.
  किसी बिंदु का कोटि उसकी x-अक्ष से लम्बवत् दूरी होती है।
- The abscissa of every point situated on the right side of x-axis is positive and the abscissa of every point situated on the left side of y - axis is negative
  y-अक्ष के दाई ओर स्थित प्रत्येक बिंदु का भुज धनात्मक होता हे और y-अक्ष के बाई ओर स्थित प्रत्येक बिंदु का भुज ऋणात्मक होता है
- The ordinate of every point situated above x-axis is positive and that of every point below *x*-axis is negative
  x-अक्ष के ऊपर स्थित प्रत्येक बिंदु कोटि धनात्मक होती है और *x*-अक्ष के नीचे स्थित प्रत्येक बिंदु की कोटि ऋणात्मक होती है
- The abscissa of every point on y-axis is zero
  y-अक्ष पर प्रत्येक बिंदु का भुज शून्य होता है
- The ordinate of every point on *x* - axis is zero
  x- अक्ष पर प्रत्येक बिंदु की कोटि शून्य होती है
- Co-ordinates of the origin are O = (0,0)
  मूल बिंदू के निर्देशांक 0 = (0, 0) हैं।

(i)



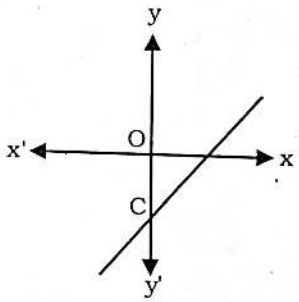
y Intercept = OA

(ii)



y Intercept = OB

(iii)



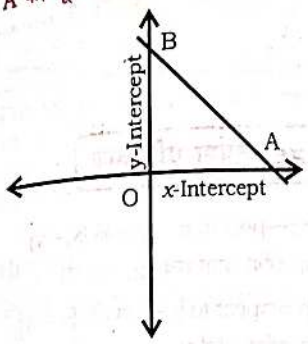
y Intercept = OC

- For *x*-axis y intercept
  x अक्ष के लिए y अंत:खण्ड = 0
- For every line parallel to y-axis, y intercept
  y- अक्ष के समानांतर प्रत्येक रेखा के लिए y अंत:खण्ड = 0
- y intercept is –
  अत: खण्ड y होगा-
  i. Positive, If measured above the origin (Fig. (i))
  धनात्मक, अगर मूल बिंदु के ऊपर मापा जाता है।(Fig (i))
  ii. Negative, If measured below the origin (Fig (ii),(iii))
  ऋणात्मक, यदि मूल बिंदू के नीचे मापा जाता है।(Fig (ii),(iii))

@Baka_260

x- Intercept/*x*- अंतःखण्ड

If a line meets the *x*-axis at point A, then the distance of point A from the origin 0 (i.e = OA) is called *x*-intercept.
यदि एक रेखा बिंदु A पर *x*- अक्ष को काटती है, तो मूल बिंदु 0 से बिंदु A की दूरी (अर्थात = OA) को *x*-अंतःखण्ड कहा जाता है।



(fig. 1)

For y axis, x intercept = 0
y अक्ष के लिए, *x* अंतःखण्ड = 0

For every line parallel to *x* axis; *x*-intercept = 0
x अक्ष के समानांतर प्रत्येक रेखा के लिए; *x*-अंतः खण्ड = 0

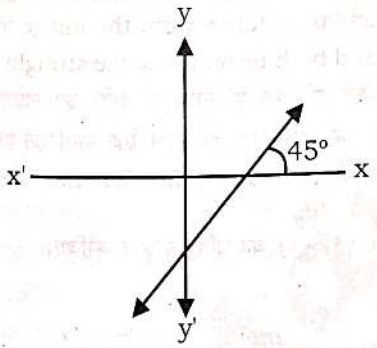
(i) Positive, If measured above the origin
धनात्मक, अगर मूल बिंदु के ऊपर मापा जाता है

(ii) Negative If measured below the origin.
ऋणात्मक अगर मूल बिंदु के नीचे मापा जाता है।

Inclination and Slope/झुकाव और ढलाव

The angle which a straight line makes with the positive direction of x-axis (measured in the anti clockwise direction) is called inclination of the line.
एक सीधी रेखा x- अक्ष की धनात्मक दिशा (वामावर्त दिशा में मापी गई) के साथ जो कोण बनाती है, उसे रेखा का झुकाव कहा जाता है।

The inclination of line is usually denoted by θ (theta)
रेखा के झुकाव को आमतौर पर θ (थीटा) द्वारा निरूपित किया जाता है



Inclination, θ = 45°

Distance Formula/दूरी सूत्र

(a) Distance of point (x, y) from origin/मूल बिंदु से बिंदु (x, y) की दूरी = $\sqrt{x^2+y^2}$

(b) Distance between two points $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$/ दो बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Ex. If the distance between two points (k + 1, 9) and (4, -6) is 17 units then find the value of k.
यदि दो बिंदुओं (k + 1, 9) और (4, -6) के बीच की दूरी 17 इकाई है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

(k + 1, 9) (4, – 6)

A B

Using distance formula–

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\Rightarrow 17 = \sqrt{(4-k-1)^2+(-6-9)^2}$$

On Solving, k = (11, –5)

Section formula/विभाजन सूत्र

(a) The coordinate of a point which internally divides the line joined by the point (x_1, y_1) and (x_2, y_2) in the ratio m : n, then –

उस बिंदु के निर्देशांक जो बिंदु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से जुड़ने वाली रेखा को m : n के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करते हैं, तब –

$$x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n}, y = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

m n

(x_1, y_1) R (x, y) (x_2, y_2)

(b) If R (x, y) divides the line segment externally in the ratio m : n then
यदि R (x, y) रेखाखंड को m : n के अनुपात में बाह्य रूप से विभाजित करता है, तो

$$x = \frac{mx_2-nx_1}{m-n}, y = \frac{my_2-ny_1}{m-n}$$

P Q R

(x_1, y_1) (x_2, y_2) (x, y)

m

n

Note: If point is mid-point then m = n = 1
यदि बिंदु मध्य-बिंदु हैं तो m = n = 1

$$x = \frac{x_2+x_1}{2}, y = \frac{y_2+y_1}{2}$$

Ex. Find the coordinates of the point which divides the line joining (5, – 2) and (9, 6) internally in the ratio 1 : 3.
उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो (5, -2) और (9, 6) को जोड़ने वाली रेखा को आंतरिक रूप से 1 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है।

HINTS:

$$x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n} = \frac{1(9)+3(5)}{1+3} = \frac{24}{4} = 6$$

$$y = \frac{my_2+ny_1}{m+n} = \frac{1(6)+3(-2)}{1+3} = \frac{0}{4} = 0$$

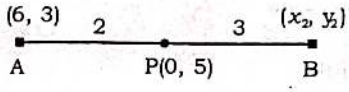
the coordinates of the required point (6, 0)

@Baka_260

Ex. A line segment AB with coordinates A(6, 3) is divided by a point P(0, 5) in the ratio of 2 : 3 find the coordinates of B?

निर्देशांक A(6, 3) वाला एक रेखा खंड AB को बिंदु P(0, 5) से 2 : 3 के अनुपात में विभाजित किया जाता है, B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए?

HINTS:



$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$\Rightarrow 0 = 2x_2 + 6 \times 3$

$\Rightarrow -9 = x_2$

$$\Rightarrow y = \frac{mx_2 + ny_1}{m+n}$$

$$\Rightarrow 5 = \frac{2 \times y_2 + 3 \times 3}{5}$$

$\Rightarrow 25 - 9 = 2y_2$

$\Rightarrow 8 = y_2$

$\therefore B(x_2, y_2) = (-9, 8)$

Ex. What is the mid-point of MN between the points M(2, 6) and N(8, 4)?

बिंदु M(2, 6) और N(8, 4) के बीच MN का मध्य-बिंदु क्या है?

HINTS:



Using Midpoint formula,

$$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$x = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

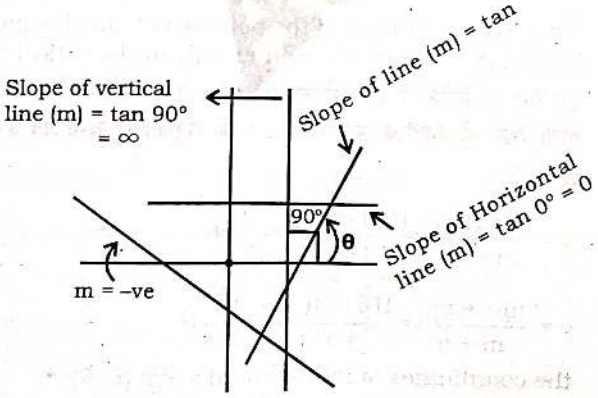
$$y = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

The midpoint of MN is (5, 5)

Slope of line (m)/रेखा की प्रणवता

Tangent (tan) of angle between line and +ve x –axis

रेखा और +ve x –अक्ष के बीच के कोण की Tangent(tan)



(a) Slope of line/रेखा की प्रवर्णता in general form $ax + by + c = 0$, then $m = -\left(\frac{\text{Coefficient of } x}{\text{Coefficient of } y}\right) = -\left(\frac{a}{b}\right)$

(b) Slope of line passing through (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is – (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता है–

$$\text{Slope, } m = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

Mirror Image/दर्पण प्रतिबिम्ब

(a) Mirror Image of (x, y) with respect to x – Axis is (x, – y)

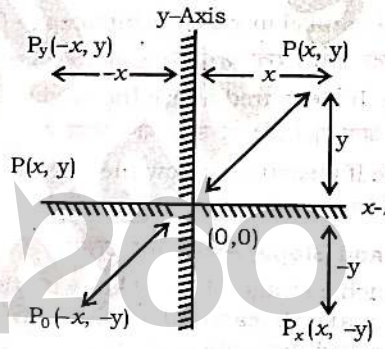
x – अक्ष के परित: (x, y) का दर्पण प्रतिबिम्ब (x, –y) है।

(b) Mirror Image of (x, y) with respect to y – Axis is (– x, y)

y – अक्ष के परित: (x, y) का दर्पण प्रतिबिम्ब (–x, y) है।

(c) Mirror Image of (x, y) with respect to origin is (–x, – y)

मूल बिंदु के परित: (x, y) का दर्पण प्रतिबिम्ब (–x, –y) है।



Note: Use this concept to find the coordinates of the image of a point,

किसी विंदु के प्रतिबिम्ब का निर्देशांक ज्ञात करने के लिये इस अवधारणा का उपयोग करें,

The perpendicular distance from the point to the mirror and the perpendicular distance from the image to the mirror are equal and both lie on the same straight line.

बिंदु से दर्पण की लंबवत दूरी एवं प्रतिबिम्ब से दर्पण की लंबवत दूरी आपस में बराबर होती है और दोनों एक ही सरल रेखा पर स्थित होती है।

Ex. Find the reflection of the point G(5, +3) across the line $x = 1$.

रेखा $x = 1$ पर बिंदु G(5, +3) का प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

HINTS:

We know that,

Reflection = 2 × Mirror point – Given point.

$= 2 \times 1 - (+3) = 2 - 3 = -1$

Reflection = (– 1, 3)

Angle between two lines of slope m_1 and m_2 is θ than

$$\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$$

If line are parallel then $\theta = 0°$

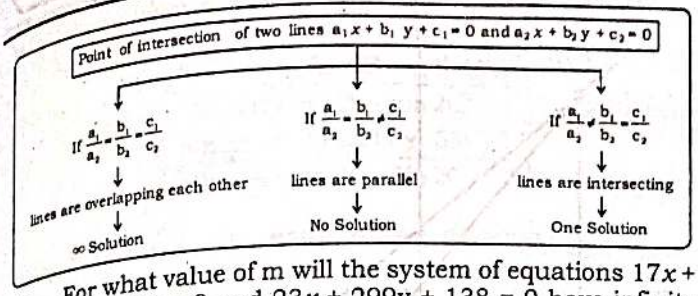
$\therefore \tan 0° = 0 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow m_1 = m_2$

If lines are perpendicular then $\theta = 90°$

$\therefore 90° = \infty = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$\Rightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 . m_2 = -1$

@Baka_200



Ex. For what value of m will the system of equations $17x + my + 102 = 0$ and $23x + 299y + 138 = 0$ have infinite number of solutions?

m के किस मान के लिए समीकरण $17x + my + 102 = 0$ और $23x + 299y + 138 = 0$ की प्रणाली के अनंत हल होंगे?

HINTS:

Given system of equations,

$17x + my + 102 = 0$

$23x + 299y + 138 = 0$

Using conditions for having infinite solutions –

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\therefore \frac{17}{23} = \frac{m}{299} \Rightarrow m = \frac{299 \times 17}{23} = 221$$

Ex. For what value of m will the system of equations $18x - 72y + 13 = 0$ and $7x - my - 17 = 0$ have no solution?

m के किस मान के लिए समीकरण $8x - 72y + 13 = 0$ और $7x - my - 17 = 0$ की प्रणाली का कोई हल नहीं होगा।

HINTS:

Given system of equations,

$18x - 72y + 13 = 0$

$7x - my - 17 = 0$

Using conditions for having no solutions –

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\therefore \frac{18}{7} = \frac{-72}{-m} \Rightarrow m = \frac{72 \times 7}{18} = 4 \times 7 = 28$$

Ex. If two lines $3x + 4y = 16$ and $6x + ky = 19$ having unique solution then find the value of k.

यदि दो रेखाओं $3x + 4y = 16$ और $6x + ky = 19$ का समाधान अद्वितीय है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Given system of equations,

$3x + 4y = 16$

$6x + ky = 19$

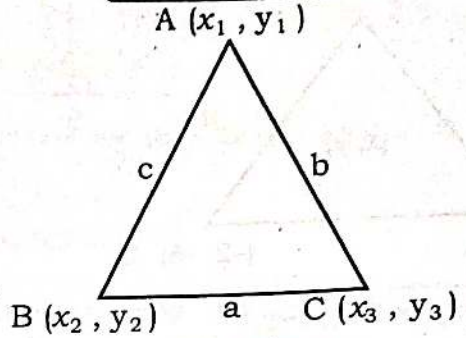
Using conditions for having no solutions –

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{6} \neq \frac{4}{k} = \frac{16}{19}$$

$$\Rightarrow k = \frac{19}{4}$$

TRIANGLE/ त्रिभुज



- Area of ΔABC / ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

- Coordinates of centroid/केन्द्रक के निर्देशांक

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

- Coordinates of incentre/अन्त: केन्द्र के निर्देशांक

$$= \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}\right)$$

Ex. Find Area of triangle whose coordinates of the vertices A, B and C are respectively (3, 4) (–4, 3) and (8, 6).

उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A, B और C के निर्देशांक क्रमश: (3, 4) (–4, 3) और (8, 6) हैं।

HINTS:

$x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_3 = 8$ and $y_1 = 4$, $y_2 = 3$, $y_3 = 6$

Area of triangle

$$= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|3(3 - 6) - 4(6 - 4) + 8(4 - 3)\right|$$

$$= \left|\frac{-9}{2}\right| = \frac{9}{2} \text{ sq. unit}$$

Ex. Find centroid of the triangle whose coordinates of the vertices are respectively (3, 8) (5, 6) and (7, 4).

उस त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष के निर्देशांक क्रमश: (3, 8), (5, 6) और (7, 4) हैं।

HINTS:

$$\text{Centroid, } G = \left\{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right\}$$

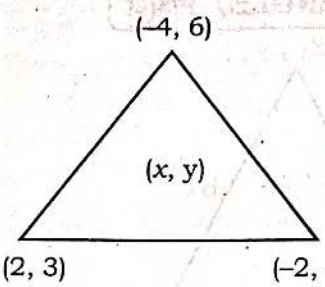
$$= \left(\frac{3+5+7}{3}, \frac{8+6+4}{3}\right) = (5, 6)$$

Ex. Find Incentre of the triangle whose coordinates of the vertices are respectively (–4, 6), (2, 3) and (–2, –5).

उस त्रिभुज का अंत:केन्द्र ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष के निर्देशांक क्रमश: (–4, 6), (2, 3) और (–2, –5) हैं।

@Baka_260

HINTS:



$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$a = \sqrt{(2+2)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ units

$b = \sqrt{(-2+4)^2 + (-5-6)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ units

$c = \sqrt{(2+4)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ units

Let coordinates of the Incentre = (x_c, y_c)

$$x_c = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c} = \frac{4\sqrt{5}(-4) + 5\sqrt{5}(2) + 3\sqrt{5}(-2)}{4\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5}} = -1$$

$$y_c = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c} = \frac{4\sqrt{5}(6) + 5\sqrt{5}(3) + 3\sqrt{5}(-5)}{4\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5}} = 2$$

Thus, coordinates of the incentre is (– 1, 2).

Ex. Find the coordinates of vertex C of triangle ABC if the coordinates of other two vertex A and B are (-2 , 5) and (4 , -4) and coordinates of centroid is (3, -2).

त्रिभुज ABC के शीर्ष C के निर्देशांक ज्ञात करें यदि अन्य दो शीर्ष A और B के निर्देशांक (-2, 5) और (4, -4) हैं तथा केन्द्रक के निर्देशांक (3, -2) हैं।

HINTS:

Let the coordinates of the vertex C (x, y)

Here, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $y_1 = 5$, $y_2 = -4$

and X = 3, Y = –2

$$\text{Centriod } (X, Y) = \left\{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right\}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{-2+4+x}{3} \Rightarrow x = 7$$

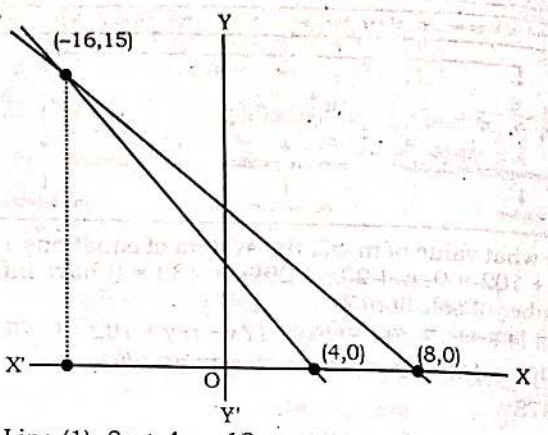
$$\Rightarrow -2 = \frac{5-4+y}{3} \Rightarrow y = -7$$

Hence coordinates of the vertex C is (7, – 7).

Ex. Find the area of triangle which is formed by three lines $3x + 4y = 12$, $5x + 8y = 40$ and $x-$ axis?

त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो तीन रेखाओं $3x + 4y = 12$, $5x + 8y = 40$ और x-अक्ष से बनता है।

HINTS:



Line (1), $3x + 4y = 12$

Put y = 0, then x = 4

Line(1) cuts x–Axis at (4,0)

Line (2), $5x + 8y = 40$

Put y = 0, then x = 8

Line(2) cuts x–Axis at (4,0)

Base = 8 - 4 = 4 Unit

To find height, we have to find the intersection point of both the lines and the value of y will be considered as height in this point.

$3x + 4y = 12$ ----[1]

$5x + 8y = 40$ ----[2]

Solving [1] and [2], We get y = 15

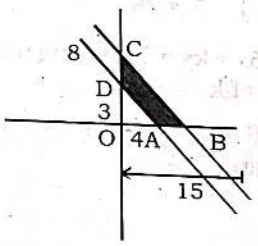
So, Height = 15 unit

Area of triangle = $\frac{1}{2} \times 4 \times 15 = 30$ sq unit

Ex. Find the area of quadrilateral formed by four lines $8x + 15y = 120$, $3x + 4y = 12$, x-axis and y-axis

चार रेखाओं $8x + 15y = 120$, $3x + 4y = 12$, x-अक्ष और y-अक्ष से बने चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS:



$8x + 15y = 120$

$$\frac{x}{15} + \frac{y}{8} = 1$$

Similarly,

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

Area of quadrilateral ABCD, $\Rightarrow$ Ar Δ OBC – Ar Δ OAD

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 15 \times 8 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \Rightarrow 54 \text{ sq.unit}$$

Coordinates of circumcentre/परिकेन्द्र के निर्देशांक

$$= \left(\frac{x_1 \sin 2A + x_2 \sin 2B + x_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \frac{y_1 \sin 2A + y_2 \sin 2B + y_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right)$$

Coordinates of orthocentre/लम्बकेन्द्र के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1 \tan A + x_2 \tan B + x_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}, \frac{y_1 \tan A + y_2 \tan B + y_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C} \right)$$

The equation of a line passing through points (x_1, y_1) and (x_2, y_2)

बिन्दु (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से होकर गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)(x - x_1)$$

Ex. Find the equation of the line whose end point are (3, 2) and (4, 5).

उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके अंतिम बिंदु (3, 2) और (4, 5) हैं

HINTS:

(3, 2) (4, 5)

A B

ATQ,

Slope of line $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{4-3} = \frac{3}{1} = 3$

Equation of line, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 2 = 3(x - 3)$

$\Rightarrow 3x - y = 7$

Ex. The equation of straight line on a point (3, – 5) and slope is 2.

एक बिंदु (3,-5) पर सीधी रेखा और ढलान 2 का समीकरण होगा।

HINTS:

Equation of line, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - (-5) = 2(x - 3)$

$\Rightarrow 2x - y - 11 = 0$

The coordinate of point of intersection of two lines $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ is

दो रेखाओं $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु का निर्देशांक

$$= \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$

Perpendicular distance of a line ax + by + c=0 from a point (x, y) is

रेखा $ax + by + c = 0$ की बिन्दु (x, y) से लम्बवत दूरी

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ex. From the point (3, 4) a line perpendicular to the line $2x + y + 3 = 0$ is drawn. Find the coordinates of the foot of the perpendicular and also find perpendicular distance.

एक बिंदु (3,4) से रेखा $2x + y + 3 = 0$ पर लंबवत एक रेखा खींची जाती है। लम्ब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए और लम्बवत दूरी भी ज्ञात कीजिए।

HINTS:

C (3, 4)

A P B

equation of line AB $\Rightarrow 2x + y + 3 = 0$ .....(i)

slope $\Rightarrow y = (-2)x - 3$

$m_1 = +2$

slope of CP $= \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

equation of CP $\Rightarrow (y - 4) = \frac{1}{2}(x - 3)$

$\Rightarrow x - 2y = -5$ ..... (ii)

On solving equation (i) & (ii) we get

$x = \frac{-11}{5}$, $y = \frac{7}{5}$

$D = \frac{2 \times 3 + 1 \times 4 + 3}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$

$D = \frac{13}{\sqrt{13}}$

The perpendicular distance between parallel line $ax + by + c_1 = 0$ and $ax + by + c_2 = 0$ is:

समांतर रेखा $ax + by + c_1 = 0$ तथा $ax + by + c_2 = 0$ के बीच लम्बवत दूरी

$$= \left| \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Ex. Distance between the lines $2x + 3y + 5 = 0$ and $4x + 6y + 1 = 0$ is:

रेखाओं $4x + 6y + 1 = 0$ और $2x + 3y + 5 = 0$ के बीच की दूरी है

HINTS:

Given line is –

$2x + 3y + 5 = 0$ .....Line(1)

$4x + 6y + 1 = 0 \Rightarrow 2x + 3y + \frac{1}{2} = 0$ .....Line(2)

The distance between the given line is –

$$D = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{5 - \frac{1}{2}}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{9}{2\sqrt{13}}$$

CIRCLE/वृत्त

Equation of circle when center is origin/वृत्त का समीकरण जब केंद्र मूल बिंदु हो –

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Where, r is radius/जहाँ, r त्रिज्या है

Standard equation of a circle

Equation of circle having center (–g, –f) is/केंद्र (–g, –f) वाले वृत्त का समीकरण है –

$x^2 + y^2 - 2gx + 2fy + c = 0$,

& Radius/त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

If θ be the angle between two straight linesa$_1x + b_1y + c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$,then–

यदि दो सीधी रेखाओं $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, के बीच का कोण θ हो, तो –

$$\tan\theta = \left| \frac{a_1b_2 - a_1b_2}{a_1b_2 + a_1b_2} \right|$$

@Baka260

PERCENTAGE

प्रतिशतता

12

Percentage/प्रतिशत: Percentage refers to " Per hundred" i.e., 37% means 37 out of hundred or $\frac{37}{100}$. Percentage is denoted by '%'.

प्रतिशत का शाब्दिक अर्थ "प्रति सौ" से है अर्थात 37% का मतलब सौ में से 37 या $\frac{37}{100}$ है। प्रतिशत को '%' से दर्शाया जाता है।

In other words, it can be said that 'percentage is that fraction whose every denominator is 100 and fraction is any fixed amount, this fixed amount is called per hundred.

दूसरे शब्दों में इसे कहा जा सकता है कि प्रतिशत वह अंश है जिसका प्रत्येक हर 100 और भिन्न कोई निश्चित राशि होती है, यह निश्चित राशि प्रति सैकड़ा कहलाती है।

जैसे $P\% = \frac{P}{100}$ तथा $19\% = \frac{19}{100}$

Basic Concepts / मूलभूत सिद्धान्त

(i) If you have to find the y% of a number x then,

यदि आपको किसी संख्या x का y% ज्ञात करना हो तो,

$$y\% \text{ of } x = x \times \frac{y}{100}$$

जैसे- 600 का 30% $= 600 \times \frac{30}{100} = 180$

(ii) If x is to be expressed as percentage of y, then required percentage

यदि किसी एक राशि x को राशि y के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करना है, तब अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{x}{y} \times 100\%$

Ex. 40 kg is what % of 160 kg $\Rightarrow \frac{40}{160} \times 100 = 25\%$

Ex. 180 is what % of 125

$$\Rightarrow \frac{180}{125} \times 100\% = 144\%$$

(iii) If you have to find x is what % less or more than y, then

यदि आपको यह पता लगाना है कि x, y से कितना % कम या अधिक है, तो

$$\text{Required \%} = \frac{|(y-x)|}{y} \times 100\%$$

Ex: 99 is what % less than 135

$$= \frac{(135-99)}{135} \times 100\% = 26\frac{2}{3}\%$$

This can also be solved by taking ratios:

99 : 135

Simplified form :

11 : 15

(−4)

$$\Rightarrow \frac{4}{15} \times 100 = 26\frac{2}{3}\%$$

Ex. 24 is what percent more than 20

$$\Rightarrow \frac{(24-20)}{20} \times 100 = 20\%$$

This can also be solved by taking ratios:

24 : 20

Simplified form :

6 : 5

(+1)

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$$

(iv) $x\%$ of y = y% of $x \rightarrow \frac{x}{100} \times y = \frac{y}{100} \times x$

Ex. 10% of 20 = 20% of 10

$$\Rightarrow 20 \times \frac{10}{100} = 10 \times \frac{20}{100}$$

$$\Rightarrow 2 = 2$$

(v) (p + q)% of x = p% of x + q% of x.

Ex. Find 111% of 500

(100% + 10% + 1%) of 500

= 100% of 500 + 10% of 500 + 1% of 500

= 500 + 50 + 5 = 555.

(vi) If a fraction is to be converted into a percentage, multiply the fraction by 100 and put a '%' sign.

यदि किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलना हो तो भिन्न को 100 से गुणा करके % का चिन्ह लगा देते है, जैसे $\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times 100\% = 80\%$

(vii) To convert a percentage to a fraction or decmial fraction: Remove the % sign and divide by 100.

किसी प्रतिशत को भिन्न या दशमलव भिन्न में परिवर्तित करने के लिए % का चिन्ह हटाकर 100 से भाग कर देते हैं।

जैसे- $10\% = \frac{10}{100} = 0.1$

@Baka_260

Fraction to Percentage Conversion
(भिन्न से प्रतिशत रूपांतरण)

Fraction	Percentage	Decimal
1	100%	100%
$\frac{1}{2}$	50%	50%
$\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}\%$	33.33%
$\frac{1}{4}$	25%	25%
$\frac{1}{5}$	20%	20%
$\frac{1}{6}$	$16\frac{2}{3}\%$	16.66%
$\frac{1}{7}$	$14\frac{2}{7}\%$	14.28%
$\frac{1}{8}$	$12\frac{1}{2}\%$	12.5%
$\frac{1}{9}$	$11\frac{1}{9}\%$	11.11%
$\frac{1}{10}$	10%	10%
$\frac{1}{11}$	$9\frac{1}{11}\%$	9.09%
$\frac{1}{12}$	$8\frac{1}{3}\%$	8.33%
$\frac{1}{13}$	$7\frac{9}{13}\%$	7.69%
$\frac{1}{14}$	$7\frac{1}{7}\%$	7.14%
$\frac{1}{15}$	$6\frac{2}{3}\%$	6.66%
$\frac{1}{16}$	$6\frac{1}{4}\%$	6.25%
$\frac{1}{17}$	$5\frac{15}{17}\%$	5.88%
$\frac{1}{18}$	$5\frac{5}{9}\%$	5.55%
$\frac{1}{19}$	$5\frac{5}{19}\%$	5.26%
$\frac{1}{20}$	5%	5%
$\frac{1}{24}$	$4\frac{1}{6}\%$	4.16%
$\frac{1}{25}$	4%	4%
$\frac{1}{40}$	$2\frac{1}{2}\%$	2.5%

Derived fraction from base fractions
(आधार भिन्न से व्युत्पन्न भिन्न)

❖ $\frac{1}{4} = 25\%$

$\downarrow \times 3$

$\frac{3}{4} = 75\%$

❖ $\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$, $\frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}\%$

❖ $\frac{1}{5} = 20\%$, $\frac{2}{5} = 40\%$, $\frac{3}{5} = 60\%$, $\frac{4}{5} = 80\%$

❖ $\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$, $\frac{5}{6} = 5 \times 16\frac{2}{3}\% = 83\frac{1}{3}\%$

❖ $\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$, $\frac{2}{7} = 28\frac{4}{7}\%$, $\frac{4}{7} = 57\frac{1}{7}\%$, $\frac{5}{7} = 71\frac{3}{7}\%$

'OR' $\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$, $\frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7} = 100\% - 14\frac{2}{7}\% = 85\frac{5}{7}\%$

❖ $\frac{1}{8} = 12\frac{1}{2}\%$, $\frac{3}{8} = 37\frac{1}{2}\%$, $\frac{5}{8} = 62\frac{1}{2}\%$,

'OR' $\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8} = 100\% - 12\frac{1}{2}\% = 87\frac{1}{2}\%$

❖ $\frac{1}{9} = 11\frac{1}{9}\%$, $\frac{2}{9} = 22\frac{2}{9}\%$, $\frac{4}{9} = 44\frac{4}{9}\%$, $\frac{5}{9} = 55\frac{5}{9}\%$,

$\frac{7}{9} = 77\frac{7}{9}\%$

'OR' $\frac{8}{9} = 1 - \frac{1}{9} = 100\% - 11\frac{1}{9}\% = 88\frac{8}{9}\%$

❖ $\frac{1}{11} = 9\frac{1}{11}\%$, $\frac{2}{11} = 18\frac{2}{11}\%$, $\frac{5}{11} = 45\frac{5}{11}\%$, $\frac{7}{11} = 63\frac{7}{11}\%$,

$\frac{10}{11} = 90\frac{10}{11}\%$

❖ $\frac{1}{15} = 6\frac{2}{3}\%$, $\frac{11}{15} = 11 \times 6\frac{2}{3}\% = 73\frac{1}{3}\%$

❖ $\frac{1}{16} = 6\frac{1}{4}\%$, $\frac{11}{16} = 11 \times 6\frac{1}{4}\% = 68\frac{3}{4}\%$

❖ $\frac{1}{24} = 4\frac{1}{6}\%$, $\frac{1}{48} = 2\frac{1}{12}\%$, $\frac{17}{48} = 17 \times 2\frac{1}{12}\% = 35\frac{5}{12}\%$

❖ $\frac{1}{16} = 6\frac{1}{4}\%$, $\frac{13}{16} = 13 \times 6\frac{1}{4}\% = 81\frac{1}{4}\%$

'OR' $\frac{13}{16} = 1 - \frac{3}{16} = 100\% - 18\frac{3}{4}\% = 81\frac{1}{4}\%$

@Baka_260

Important points/ महत्वपूर्ण बिंदु

(i) When x is increased by $x\%$, total value will be-

जब x को $x\%$ से बढ़ाया जाता है तब कुल मान-

$10 + 10 \times 10\% = 10\overset{\curvearrowleft}{.}100 = 11.00\%$

$20 + 20 \times 20\% = 20\overset{\curvearrowleft}{.}400 = 24.00\%$

$30 + 30 \times 30\% = 30\overset{\curvearrowleft}{.}900 = 39.00\%$

$40 + 40 \times 40\% = 40\overset{\curvearrowleft}{.}1600 = 56.00\%$

$50 + 50 \times 50\% = 50\overset{\curvearrowleft}{.}2500 = 75.00\%$

$60 + 60 \times 60\% = 60\overset{\curvearrowleft}{.}3600 = 96.00\%$

$70 + 70 \times 70\% = 70\overset{\curvearrowleft}{.}4900 = 119.00\%$

$80 + 80 \times 80\% = 80\overset{\curvearrowleft}{.}6400 = 144.00\%$

Note: $x.x^2$ अर्थात् हम पहले x लिखेंगें फिर decimal लगा के दी गई संख्या का वर्ग लिखेंगें। यदि x^2 3 या 4 digit का है तो उसके 2 digit decimal के right में रहेंगें और बाकी decimal के left अर्थात् x को carry दे देंगें।

(ii) When x is decreased by $x\%$, total value will be-

जब x को $x\%$ से घटाया जाता है तब कुल मान-

$10 - 10 \times 10\% = 9$

$20 - 20 \times 20\% = 16$

$30 - 30 \times 30\% = 21$

$40 - 40 \times 40\% = 24$

$50 - 50 \times 50\% = 25$

$60 - 60 \times 60\% = 24$

$70 - 70 \times 70\% = 21$

$80 - 80 \times 80\% = 16$

$90 - 90 \times 90\% = 9$

$100 - 100 \times 100\% = 0$

(iii) (a) $pq.pqpq...\% = \frac{pq}{(100-1)} = \frac{pq}{99}$

Ex. $23.23\% = \frac{23}{99}$

$18.18\% = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$

(b) $pq.2pq\% = \frac{pq}{(100-2)} = \frac{pq}{98}$

Ex. $28.57\% = \frac{28}{98} = \frac{2}{7}$

$33.66\% = \frac{33}{98}$

(c) $pq.3pq\% = \frac{pq}{(100-3)} = \frac{pq}{97}$

Ex. $14.42\% = \frac{14}{97}$

$11.33\% = \frac{11}{97}$

Important Concepts/ महत्वपूर्ण सिद्धान्त

CONCEPT-01

(Successive Percentage Change क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन)

When two or more percentage changes are applied to a quantity consecutively, the percentage change is called a "successive percentage change." Here, the final change is not the simple addition of two or more percentages. In a successive percentage change, a quantity is changed by some percentage, and the obtained new quantity is changed by another percentage, i.e., both the percentages are not applied to the same actual value.

जब किसी मात्रा में दो या दो से अधिक क्रमागत प्रतिशत परिवर्तन होते हैं, तो प्रतिशत परिवर्तन को "क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन" कहा जाता है। यहां, अंतिम परिवर्तन दो या दो से अधिक प्रतिशतों का साधारण जोड़ नहीं है। क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन में, एक मात्रा को कुछ प्रतिशत से बदल दिया जाता है, और प्राप्त नई मात्रा को दूसरे प्रतिशत से बदल दिया जाता है, यानी, दोनों प्रतिशत एक ही वास्तविक मूल्य पर लागू नहीं होते हैं।

(i) If a number is increased by a% and then it is decreased by b%, then resultant change in percentage will be $\left(a - b - \frac{ab}{100}\right)\%$

यदि किसी संख्या में a% की वृद्धि की जाती है और फिर इसे b% से घटा दिया जाता है, तो प्रतिशत में परिणामी परिवर्तन $\left(a - b - \frac{ab}{100}\right)\%$ होगा

(Negative sign for decrease, Positive sign for increase)
(घटने के लिए ऋणात्मक, वृद्धि के लिए धनात्मक)

(ii) If a number is decreased by a% and then it is increased by b%, then net increase or decrease percent is

यदि किसी संख्या में a% की कमी की जाती है और फिर इसे b% से बढ़ा दिया जाता है, तो शुद्ध वृद्धि या कमी प्रतिशत है

$\left(-a + b - \frac{ab}{100}\right)\%$

(Negative sign for decrease, Positive sign for increase)

(iii) If a number is first decreased by a% and then by b%, then net decrease percent is

यदि किसी संख्या में पहले a% और फिर b% की कमी की जाती है, तो शुद्ध कमी प्रतिशत है।

$\left(-a - b + \frac{ab}{100}\right)\%$ (-ve sign for decrease)/(-ve संकेत कमी के लिए)

(iv) If a number is first increased by a% and again increased by b%, then total increase percent is

यदि किसी संख्या में पहले a% की वृद्धि की जाती है और फिर b% की वृद्धि की जाती है, तो कुल वृद्धि प्रतिशत है

$\left(a + b + \frac{ab}{100}\right)\%$

@Baka_260

Note/ ध्यान दें

Types of percentage → 1%, 2%, 4%, 7% .... (Apply Successive Method)

→ $11\frac{1}{9}\%, 12\frac{1}{2}, 16\frac{2}{3}\%$.... (Apply Ratio Method)

Ex. Length and breadth of a rectangle are increased by 10% and 20% respectively. What will be the percentage increase in the area of rectangle?

एक आयत की लंबाई और चौड़ाई 10% तथा 20% तक बढ़ जाती है। इसके क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए?

HINTS:

By Successive percentage formula

$$\%\text{increase} = 10 + 20 + \frac{10\times 20}{100} = 32\%$$

By Ratio Method

$10\% = \frac{+1}{10}$ and $20\% = \frac{+1}{5}$

L	:	10	11
B	:	5	6
Area = L × B		50	66
	⇒	25	33

(+8)

$$\%\text{ increase} = \frac{8}{25}\times 100 = 32\%$$

Ex. Base of a triangle is increased by $33\frac{1}{3}\%$ and its height is reduced by $16\frac{2}{3}\%$. Find the percentage change in area of triangle?

त्रिभुज का आधार $33\frac{1}{3}\%$ बढ़ जाता है और इसकी ऊंचाई $16\frac{2}{3}\%$ कम हो जाती है। तब त्रिभुज के क्षेत्रफल में प्रतिशत परिवर्तन ज्ञात कीजिए?

HINTS:

If the given % value is mixed fraction, apply ratio approach

$33\frac{1}{3}\% = \frac{+1}{3}$, $16\frac{2}{3}\% = \frac{-1}{6}$

B	:	3	4
H	:	6	5
Area = $\frac{1}{2}$B × H →		18	20
	⇒	9	10

(+1)

$$\frac{1}{9}\times 100 = 11\frac{1}{9}\%$$

Ex. Length of cuboid is increased by 20%, breadth is increase by 30% and height is decreased by 50%. Find effect on volume.

घनाभ की लंबाई 20% बढ़ जाती है, चौड़ाई 30% बढ़ जाती है और ऊंचाई 50% तक कम हो जाती है। आयतन पर प्रभाव पड़ता है।

3 varriable के प्रश्नों में 2 varriable formula 2 times apply कर सकते है अथवा Ratio Method उपयोग करें

$20\% = \frac{+1}{5}$ $30\% = \frac{+3}{10}$ & $50\% = \frac{-1}{2}$

L →	5	6
B →	10	13
H →	2	1
V = LBH →	100	78

(-22)

$$\%\text{ decrease} = \frac{22}{100}\times 100 = 22\%$$

Ex. A number is first increased by 40% and then decreased by 25%, again increased by 15% and then decreased by 20%. What is the net increase or decrease percent in the number?

एक संख्या में पहले 40% की वृद्धि हुई और फिर 25% की कमी हुई, फिर से 15% की वृद्धि हुई और फिर 20% की कमी हुई। संख्या में कुल वृद्धि या कमी के प्रतिशत को ज्ञात करें।

HINTS:

इस प्रकार के प्रश्नों को successive percentage के formulae से solve करना lengthy होता है इसलिए ratio method का प्रयोग करें।

$40\% = \frac{+2}{5}$, $25\% = \frac{-1}{4}$, $15\% = \frac{+3}{20}$, $20\% = \frac{-1}{5}$

5	:	7
4	:	3
20	:	23
5	:	4
500	:	483

$$\%\text{ decrease} = \frac{17}{500}\times 100\% = 3.4\%$$

CONCEPT-02
(Series Method)

Series method का प्रयोग हम तब करते है जब किसी initial value में successive परिवर्तन करके कोई final value प्राप्त करते है, initial अथवा final में से कोई एक value दी गई होती है और दूसरी पूछी जाती है।

Ex. The population of a city is 25000. If it is increasing at the rate of 10% every year. Then population of city after two year is?

एक शहर की जनसंख्या 25000 है। यदि यह प्रति वर्ष 10% की दर से बढ़ रहा है तो दो साल बाद शहर की आबादी क्या होगी?

HINTS:

$10\% = \frac{1}{10} \overset{+}{=} \frac{11}{10}$

Population after 2 year

$$= 25000 \times \frac{11}{10}\times\frac{11}{10} = 30250$$

@Baka_260

Ex. When a number is successively decreased by 25 percent, 40 percent and 20 percent, then it becomes 32,904. what is the number?

जब किसी संख्या में क्रमश: 25 प्रतिशत, 40 प्रतिशत और 20 प्रतिशत की कमी की जाती है, तो यह 32,904 हो जाती है। वह संख्या कौन-सी है?

HINTS:

$25\% = \frac{-1}{4} = \frac{3}{4}$, $40\% = \frac{-2}{5} = \frac{3}{5}$, $20\% = \frac{-1}{5} = \frac{4}{5}$

$N \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = 32904$

$\Rightarrow N = 91400$

Ex. A geek gave 40% of his retirement money to his wife. He also gave 20 % of the remaining amount to each of his 3 sons. 50 % of the amount now left was spent on miscellaneous items and the remaining amount of Rs. 1,20,000 was deposited in the bank. How much money did the geek get as retirement money?

एक मूर्ख ने अपनी सेवानिवृत्ति के पैसे का 40% अपनी पत्नी को दे दिया। उसने शेष राशि का 20% अपने 3 पुत्रों में से प्रत्येक को दिया। अब बची हुई राशि का 50% विविध मदों पर खर्च किया गया और शेष 1,20,000 रुपये की राशि बैंक में जमा कर दी गई। मूर्ख को सेवानिवृत्ति राशि के रूप में कितना पैसा मिला?

HINTS:

Let geek get Rs.x as retirement money.

$x \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = 1,20,000$

$\Rightarrow x = 10,00000$

CONCEPT-03

If a number is increased by x% and then it is reduced by x% again, then percentage change will be a decrease of $\frac{x^2}{100}$%.

यदि कोई संख्या x% बढ़ाई जाती है और फिर x% घटायी जाती है, तो प्रतिशत बदलाव (कमी) होगा $\frac{x^2}{100}$%

Ex. X's salary is increased by 20% and then decreased by 20%. What is the change in salary?

X के वेतन में 20% की वृद्धि हुई और फिर 20% की कमी हुई, वेतन में क्या परिवर्तन हुआ?

HINTS:

$\frac{x^2}{100}\% = \frac{20 \times 20}{100} = 4\%$ decrease

CONCEPT-04

(Applicaiton of AB-rule)

Study the below statements carefully.

नीचे दिए गए कथनों को ध्यान पूर्वक पढ़ें।

If the cost of an article is increased by A%, then how much to decrease the consumption of article, so that expenditure remains same is given by

यदि किसी वस्तु की कीमत में A% की वृद्धि की जाती है, तो वस्तु की खपत को कितना कम किया जाए, ताकि व्यय समान रहे

'OR'

If the income of a man is A% more than another man, then income of another man is less in comparison to the 1st man by

यदि एक आदमी की आय दूसरे आदमी की तुलना में A% अधिक है, तो दूसरे आदमी की आय पहले आदमी की तुलना में कितनी कम है?

If the cost of an article is decreased by A%, then the increase in consumption of article to maintain the expenditure will be?

यदि किसी वस्तु की लागत में A% की कमी की जाती है, तो व्यय को बनाए रखने के लिए वस्तु की खपत में वृद्धि होगी?

'OR'

If 'x' is A% less than 'y'. then y is what % more than 'x' by

Required% = (increase)

यदि 'x', 'y' से A% कम है। तो y 'x' से कितने प्रतिशत अधिक है।

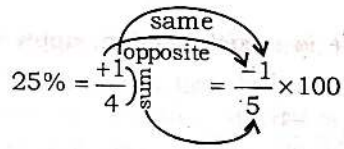
In such kinds of questions, apply AB - Rule.

इस प्रकार के प्रश्नों में AB - Rule का प्रयोग करें।

Ex. A's income is 25% more than income of B. Income of B is how much percent less than income of A?

A की आय B की आय से 25% अधिक है। B की आय A की आय से कितने प्रतिशत कम है?

HINTS:

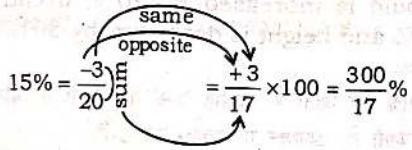


$\Rightarrow$ Income of B is 20% less than A.

Ex. Rita's Income is 15% less than Richa's income. By what percent is Richa's income more than Rita's income.

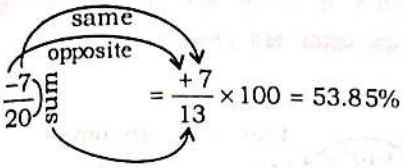
रीता की आय ऋचा की आय से 15% कम है। ऋचा की आय रीता की आय से कितने प्रतिशत अधिक है?

HINTS:



Ex. Due to fall in manpower, the production in a company decrease by 35%. By what percentage should the working hours be increased to restore the original production?
जनशक्ति में हुई कमी के कारण, एक कंपनी में उत्पादन में 35% की कमी आती है। मूल उत्पादन को बहाल करने के लिए काम के घंटों को कितना प्रतिशत तक बढ़ाया जाना चाहिए?

HINTS:



$35\% = \frac{-7}{20} = \frac{+7}{13} \times 100 = 53.85\%$

Ex. The price of sugar is increased by 25%. Then by how much percentage the consumption decreases so that expenditure remains same.
चीनी की कीमत में 25% की वृद्धि हुई है। तो फिर उपभोग कितने प्रतिशत कम हो जाए ताकि व्यय समान रहे?

HINTS:

$25\% = \frac{+1}{4} \quad \frac{-1}{5} \times 100 = 20\%$

CONCEPT-05
(Price, Consumption & Expenditure)

Price × consumption = Expenditure

⇒ If Expenditure is constant then

$$\text{Price} \propto \frac{1}{\text{Consumption}}$$

Ex. The price of rice increases from Rs.45 per kg to Rs.63 per kg. If its consumption is reduced by 20%, then by what percent does the expenditure on it increase?
चावल की कीमत 45 रुपये प्रति किलो से बढ़कर 63 रुपये प्रति किलो हो गई है। यदि इसकी खपत में 20% की कमी कर दी जाए, तो इस पर होने वाले व्यय में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

HINTS:

$20\% = \frac{-1}{5}$

Price :	45	63
or	5	7
cons :	5	4
Exp. = P × C :	25	28

(+3)

$\frac{3}{25} \times 100 = 12\%$

Ex. The price of an item is reduced by 20%. As a result, customer can get 2 kg more of it for Rs.360. Find
एक वस्तु की कीमत 20% कम हो जाती है। जिसके चलते, ग्राहक 360 रुपये में 2 किग्रा अधिक वस्तु खरीद सकते हैं। ज्ञात कीजिए।

(i) The Initial price (in Rs.) per kg of the item.
वस्तु का प्रारंभिक मूल्य (रु. में) प्रति किग्रा

(ii) The reduced price (in Rs.) per kg of the item.
वस्तु का घटा हुआ मूल्य (रु. में) प्रति किग्रा

(iii) New quantity which can be purchased in Rs.360
वस्तु की वह नई मात्रा जो 360 रूपये में खरीदी जा सकती है

(iv) Initial quantity which can be purchased in Rs.360
वस्तु की वह प्रारंभिक मात्रा जो 360 रूपये में खरीदी जा सकती है

HINTS:

$20\% = \frac{-1}{5}$

P ⟶ 5 4
C ⟶ 4 5
(+1)
2 kg

We have, 1 unit = 2 kg

(i) Initial price = $\frac{360}{4 \times 2}$ = Rs.45 kg

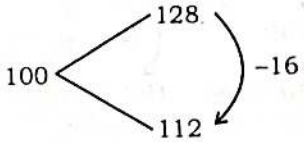
(ii) Reduced price = $\frac{360}{5 \times 2}$ = Rs.36 kg

(iii) New Quantity = 5 × 2 = 10 kg

(iv) Initial Quantity = 4 × 2 = 8 kg

Ex. The price of a commodity increases by 28% However, the expenditure on it increases by 12%. What is the percentage increase or decrease in its consumption?
किसी वस्तु की कीमत में 28% की वृद्धि होती है तथापि, उसके व्यय में 12% की वृद्धि होती है, उसकी खपत में कितने प्रतिशत वृद्धि या कमी होती है?

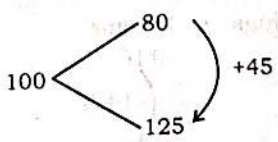
HINTS:



$= \frac{16}{128} \times 100 = 12.5$ decrease

Ex. When the price of an item was reduced by 20%, its sales increased by x%. If there is an increase of 25% in the receipt of the revenue then the value of x is:
जब किसी वस्तु की कीमत 20% कम हो गई, तो उसकी बिक्री x% बढ़ गई। यदि राजस्व प्राप्ति में 25% की वृद्धि होती है तो x का मान है:

HINTS:

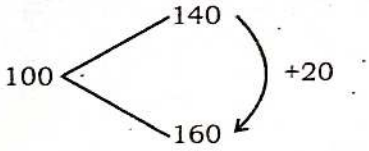


$\frac{45}{80} \times 100 = 56.25\%$

Ex. The base of a triangle is increased by 40%. By what percentage (correct to two decimal places) should its height be increased so that the area increases by 60%?

एक त्रिभुज के आधार में 40% की वृद्धि की गई। इसकी ऊँचाई कितने प्रतिशत (दो दशमलव स्थानों तक सही) बढ़ाई जानी चाहिए ताकि क्षेत्रफल में 60% की वृद्धि हो जाए?

HINTS:



$= \frac{20}{140} \times 100 = \frac{100}{7} = 14.28\%$

CONCEPT-06

(Income, Expenditure & Savings)

Income = Expenditure + Savings

Ex. A man spends $\frac{2}{3}$rd of his income. If his income increase by 14% and the expenditure increases by 20%, then the percentage increase in his savings will be

एक व्यक्ति अपनी आय का $\frac{2}{3}$ भाग खर्च करता है। यदि उसकी आय में 14% वृद्धि हो जाती है और व्यय में 20% की वृद्धि हो जाती है, तो व्यक्ति की बचत मे कितने प्रतिशत वृद्धि होगी?

HINTS:

Income		Exp.		Savings
300		200		100
+14% (+42)		+20% (+40)		(+2)
342	–	240	=	102

$= \frac{2}{100} \times 100 = 2\%$

Ex. Rupa's savings are 16% of her expenditure. If her savings increase by 25% and expenditure increases by 10.5%, then the percentage increase in her income is:

रूपा की बचत उसके व्यय का 16% है। यदि उसकी बचत में 25% की वृद्धि होती है और व्यय में 10.5% की वृद्धि होती है, तो उसकी आय में प्रतिशत वृद्धि है:

HINTS:

Let Expenditure = 100

Exp.		Savings		Income
100		16		116
+10.5% (10.5)		+25% (4)		(+14.5)
110.5	+	20	=	130.5

% Increment = $\frac{14.5}{116} \times 100 = 12.5\%$

Ex. The monthly expenditure of a person is 40% more than his monthly savings. If his monthly income increases by 40% and monthly expenditure increases by 60%, then he saves Rs 2,070 more in a month. What is his initial monthly expenditure (in Rs)?

एक व्यक्ति का मासिक व्यय उसकी मासिक बचत से 40% अधिक है। यदि उसकी मासिक आय में 40% की वृद्धि होती है और मासिक व्यय में 60% की वृद्धि होती है, तो वह एक महीने में 2,070 रुपये अधिक बचाता है। उसका प्रारंभिक मासिक खर्च (रुपये में) क्या है?

HINTS:

Savings		Exp.		Income
100	+40%	140		240
(12	+60%	(+ 84	+40%	(+96
112	=	224	–	336

$\frac{2070}{12} \times 140 = \text{Rs.}24150$

CONCEPT-07

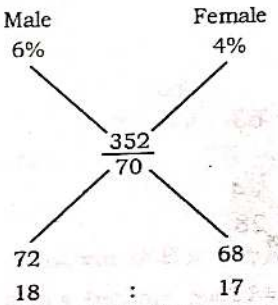
(Population Based Questions)

Ex. The total numbers of males and females in a town is 70,000. If the number of males increased by 6% and that of the females is increased by 4%, then the total numbers of males and females in the town would become 73520. What is the difference between the number of males and females in the town, in the beginning?

एक कस्बे में पुरूषों और महिलाओं की कुल संख्या 70,000 है। यदि पुरूषों की संख्या में 6% और महिलाओं की संख्या में 4% की वृद्धि कर दी जाए, तो कस्बे में पुरूषों और महिलाओं की कुल संख्या 73520 हो जाएगी। कस्बे में पुरूषों और महिलाओं की आरंभिक संख्या में क्या अंतर है?

HINTS:

Method-01



Given that, 35 unit = 70,000

Then required difference,

(18 – 17) unit = 2000

Method-02

2% of M + 4% of M + 4% of W = 3520

2% of M + 2800 = 3520

2% of M = 720

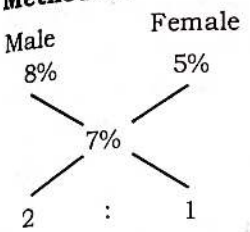
$\Rightarrow$ M = 36000 & W = 34000

Difference = 2000

Ex. The population of a village was 9600. In a year with the increase in population of males by 8% and that of females by 5%, the population of the village becomes 10272. What was the number of males in the village before increase?
एक गांव की जनसंख्या 9600 थी। एक वर्ष में पुरूषों की जनसंख्या में 8% और महिलाओं की संख्या में 5% की वृद्धि के साथ, गांव की जनसंख्या 10272 हो जाती है। वृद्धि से पहले गांव में पुरूषों की संख्या कितनी थी।

HINTS:

Method-01



$$\text{Male} = \frac{9600}{3} \times 2 = 6400$$

Method-02

5% of M + 3% of M + 5% of F = 672

$\Rightarrow$ 5% of 9600 + 3% of M = 672

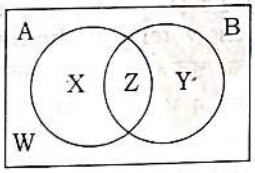
3% of M = 672 – 480 =192

100% of M = 6400

CONCEPT-08
(Venn Diagram)

Venn Diagram in case of two elements

दो तत्वों के मामले में वेन आरेख



Where/जहाँ

X = number of elements that belong to set A only

X = उन तत्वों की संख्या जो केवल सेट A से संबंधित हैं

Y = number of elements that belong to set B only

Y = उन तत्वों की संख्या जो केवल सेट B से संबंधित हैं

Z = number of elements that belong to set A and B both

Z = उन तत्वों की संख्या जो सेट A और B दोनों से संबंधित हैं

W = number of elements that belong to none of the sets A or B

W = उन तत्वों की संख्या जो किसी भी सेट A या B से संबंधित नहीं हैं

Tip: Always start filling values in the Venn diagram from the innermost value.

वेन आरेख में हमेशा अंतरतम भाग से मान भरना शुरू करें।

Ex. In a college, 200 students are randomly selected. 140 like tea, 120 like coffee and 80 like both tea and coffee.
एक कॉलेज में, 200 छात्रों को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। 140 को चाय पसंद है, 120 को कॉफी पसंद है और 80 को चाय और कॉफी दोनों पसंद हैं।

(i) How many students like only tea?
कितने छात्र केवल चाय पसंद करते हैं?

(ii) How many students like only coffee?
कितने छात्र केवल कॉफी पसंद करते हैं?

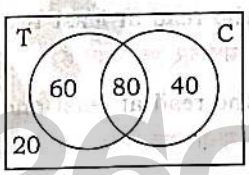
(iii) How many students like neither tea nor coffee?
कितने विद्यार्थियों को न तो चाय और न ही कॉफी पसंद है?

(iv) How many students like only one of tea or coffee?
कितने विद्यार्थियों को चाय या कॉफी में से केवल एक ही पसंद है?

(v) How many students like at least one of the beverages?
कितने विद्यार्थियों को कम से कम एक पेय पदार्थ पसंद है?

HINTS:

The given information may be represented by the following Venn diagram, where T = tea and C = coffee.
दी गई जानकारी को निम्नलिखित वेन आरेख द्वारा दर्शाया जा सकता है, जहां T = चाय और C = कॉफी।



(i) Number of students who like only tea = 60
केवल चाय पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 60

(ii) Number of students who like only coffee = 40
केवल कॉफी पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 40

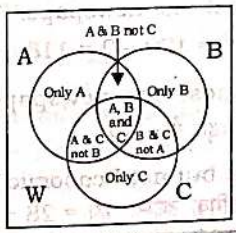
(iii) Number of students who like neither tea nor coffee = 20
उन छात्रों की संख्या जो न तो चाय और न ही कॉफी पसंद करते हैं = 20

(iv) Number of students who like only one of tea or coffee = 60 + 40 = 100
चाय या कॉफी में से केवल एक को पसंद करने वाले छात्रों की संख्या = 60 + 40 = 100

(v) Number of students who like at least one of tea or coffee = n (only tea) + n (only coffee) + n (both tea & coffee) = 60 + 40 + 80 = 180
चाय या कॉफी में से कम से कम एक पसंद करने वाले छात्रों की संख्या = n(केवल चाय) + n(केवल कॉफी) + n(चाय और कॉफी दोनों) = 60 + 40 + 80 = 180

Venn Diagram in case of three elements

तीन तत्वों के मामले में वेन आरेख



W = number of elements that belong to none of the sets A, B and C

W = उन तत्वों की संख्या जो किसी भी सेट A, B और C से संबंधित नहीं है

Ex. In a class there are 120 students, 60 read Times of India, 55 read Hindu and 45 read Economic Times. If 19 students read Times of India and Hindu, 12 read Hindu and Economic Times and 15 students read Economic Times E and Times of India. If there are 4 students who read all the three newspapers, then find:

एक कक्षा में 120 छात्र हैं, 60 टाइम्स ऑफ इंडिया पढ़ते हैं, 55 हिंदू पढ़ते हैं और 45 इकोनॉमिक टाइम्स पढ़ते हैं। यदि 19 छात्र टाइम्स ऑफ इंडिया और हिंदू पढ़ते हैं, 12 छात्र हिंदू और इकोनॉमिक टाइम्स पढ़ते हैं और 15 छात्र इकोनॉमिक टाइम्स और टाइम्स ऑफ इंडिया पढ़ते हैं। यदि 4 ऐसे छात्र हैं जो तीनों समाचार पत्र पढ़ते हैं, तो ज्ञात कीजिए:

(i) Those who read only Times of India/वे जो केवल टाइम्स ऑफ इंडिया पढ़ते हैं

(ii) Those who read only Hindu/जो केवल हिन्दू पढ़ते हैं

(iii) Those who read exactly one newspaper/वे जो बिल्कुल एक समाचार पत्र पढ़ते हैं

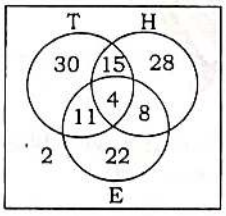
(iv) Those who read at least two newspaper/वे जो कम से कम दो समाचार पत्र पढ़ते हैं

(v) Those who read at least one newspaper/जो कम से कम एक समाचार पत्र पढ़ते हैं

(vi) Those who read at most one newspaper/वे जो अधिकतम एक समाचार पत्र पढ़ते हैं

(vii) Those who read Hindu but not Economic Times/वे जो हिंदू पढ़ते हैं लेकिन इकोनॉमिक टाइम्स नहीं

HINTS:



W = 2

(i) Those who read only Times of India/वे जो केवल टाइम्स ऑफ इंडिया पढ़ते हैं = 30

(ii) Those who read only Hindu/जो केवल हिन्दू पढ़ते हैं = 28

(iii) Those who read exactly one newspaper/वे जो बिल्कुल एक समाचार पत्र पढ़ते हैं = 30 + 28 + 22 = 80

(iv) Those who read at least two newspaper/वे जो कम से कम दो समाचार पत्र पढ़ते हैं = 15 + 11 + 8 + 4 = 38

(v) Those who read at least one newspaper/जो कम से कम एक समाचार पत्र पढ़ते हैं = 120 – 2 = 118

(vi) Those who read at most one newspaper/वे जो अधिकतम एक समाचार पत्र पढ़ते हैं = 82

(vii) Those who read Hindu but not Economic Times/वे जो हिंदू पढ़ते हैं लेकिन इकोनॉमिक टाइम्स नहीं = 28 + 15 = 43

CONCEPT-09

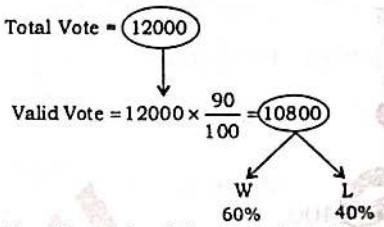
(Question Based on Election)

Ex. In an election between two candidates, one got 60% of the total valid votes, 90% of the votes were valid. If the total number of votes was 12000, then what was the number of valid votes that the other candidate got?

दो उम्मीदवारों के बीच एक चुनाव में, एक को कुल 60% विधिमान्य मत प्राप्त हुए, 90% मत विधिमान्य थे। यदि कुल मतों की संख्या 12000 थी, तो दूसरे उम्मीदवार को मिले विधिमान्य मतों की संख्या क्या थी?

HINTS:

Method-1 (Chain Method)



Number of valid votes that the other candidate got
दूसरे उम्मीदवार को मिले वैध वोटों की संख्या

$$= 10800 \times \frac{40}{100} = 4320$$

Method-2 (Series Method)

Number of valid votes that the other candidate got

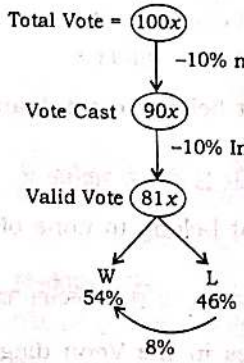
$$= 12000 \times \frac{90}{100} \times \frac{40}{100} = 4320$$

Ex. In a two-candidate election, 10% of the voters did not cast their ballots, 10% of the votes casted were found invalid. The winning candidate received 54% of the valid votes and a 1620-vote majority. Find the number of people on the voter list who have registered to vote.

दो उम्मीदवारों के चुनाव में, 10% मतदाताओं ने अपना मत नही दिया। दिए गए मतों में से 10% अवैध मत पाए गए। विजेता उम्मीदवार को वैध मतों का 54% प्राप्त हुआ और वह 1620 मतों से विजयी हुआ। मतदाता सूची में उन लोगों की संख्या ज्ञात कीजिए जिन्होंने मतदान करने के लिए पंजीकरण कराया हुआ है।

HINTS:

Method-1 (Chain Method)



$$81x \times \frac{8}{100} = 1620$$

$x = 250$

TV = 25000

Method-2 (Series Method)

Let the number of enrolled voters = x

$$x \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{8}{100} = 1620$$

$$\Rightarrow x = 25000$$

Ex. Two candidates participated in an election. 20% voters did not cast their votes and 2000 votes were declared invalid. Winner candidate got 60% of valid votes and got elected by 1200 number of votes. Find the total number of votes in voter list.

एक चुनाव में दो उम्मीदवारों ने भाग लिया। 20% मतदाताओं ने अपने वोट नहीं डाले और 2000 वोट अवैध घोषित किए गए। विजेता उम्मीदवार को 60% वैध मत मिले और 1200 मतों से निर्वाचित हुआ। मतदाता सूची में कुल मतों की संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$$\left(x \times \frac{4}{5} - 2000\right) \times \frac{1}{5} = 1200$$

$$\frac{4}{5}x - 2000 = 6000$$

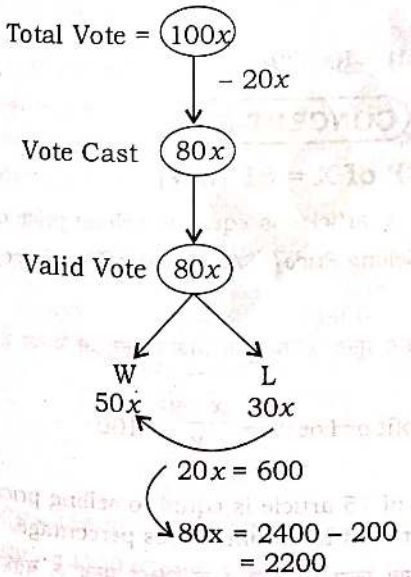
$$\frac{4}{5}x = 8000$$

$$x = 10000$$

Ex. In a election two candidates participated. 20% of population did not vote. 200 votes declared invalid and the winner got fifty percent of voting list and won by 800 votes. Calculate the valid votes.

एक चुनाव में 2 उम्मीदवारों ने भाग लिया। 20% आबादी ने मतदान नहीं किया। 200 मत अवैध घोषित हो गये और विजेता को मतदाता सूची के 50% वोट मिले और 800 मतों से चुनाव जीत गया। वैध मतों की संख्या ज्ञात करो।

HINTS:



CONCEPT-10

(Questions Related to Student Passing & Failure)

Ex. A student scored 32% marks and failed by 6 marks. If he had scored 36% then he would have passed by 2 marks. Find-

एक छात्र ने 32% अंक प्राप्त किए और 6 अंकों से फेल हो गया। यदि उसने 36% अंक प्राप्त किए होते तो वह 2 अंकों से उत्तीर्ण हो गया होता। ज्ञात कीजिए-

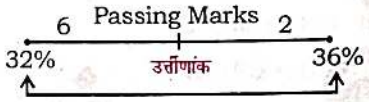
(i) What is the passing marks/उत्तीर्ण अंक (स्कोर)

(ii) Maximum marks of the exam/परीक्षा का अधिकतम अंक

(iii) Passing percentage/उत्तीर्ण प्रतिशत

(iv) Student's marks/छात्र के अंक

HINTS:



4% = 8

$\therefore$ 32% = 64

(i) Passing Marks = 64 + 6 = 70

(ii) Max. Marks = $\frac{8}{4} \times 100 = 200$

(iii) Passing percentage = $\frac{70}{200} \times 100 = 35\%$

(iv) Student's marks = 32% = 64

CONCEPT-11

(Questions Based on Commission)

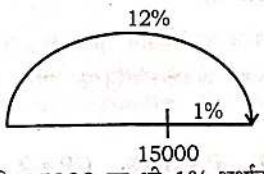
Ex. A company give 12% commission to his salesman on total sales and 1% bonus on the sales over ₹15000. If the salesman deposit ₹52,350 after deducting his commission from total sales. Find

एक कंपनी अपने सेल्समैन को कुल बिक्री पर 12% कमीशन देती है और 15000 से अधिक की बिक्री पर 1% बोनस देती है, यदि विक्रेता कुल बिक्री से अपने कमीशन में कटौती के बाद रु. 52,350 जमा करता है, ज्ञात कीजिए

(i) Total sales./कुल बिक्री

(ii) Total commission of salesman./सेल्समैन का कुल कमीशन

HINTS:



Salesman को यदि 15000 पर भी 1% अर्थात 150 मिल जाये तो उसे कुल sale पर 13% Commission मिल जायेगा।

(i) Total sales = $\frac{(52\,350 - 150)}{87} \times 100 = 60000$

(ii) Total commission of salesman
= 12% of 15000 + 13% of 45000
= 1800 + 5850 = 7650

PROFIT & LOSS

लाभ और हानि

13

Some Common Terms/कुछ सामान्य शर्तें

CP (Cost price/क्रय मूल्य) The price at which we buy any things./वह कीमत जिस पर हम कोई वस्तु खरीदते हैं।

SP (Selling price/विक्रय मूल्य) The price at which we sell things./वह कीमत जिस पर हम वस्तु बेचते हैं।

If SP > CP Profit (लाभ) = SP – CP

If CP > SP Loss (हानि) = CP – SP

$$\text{Profit\%} = \left(\frac{\text{Profit}}{\text{Cost Price}}\right)\times 100$$

$$\text{Loss\%} = \left(\frac{\text{Loss}}{\text{Cost Price}}\right)\times 100$$

Important Concepts/महत्वपूर्ण अवधारणाएँ

CONCEPT-01

(Basic Concept)

Ex. A product is bought at Rs. 20 and sold at Rs. 50. Find profit percent.

एक उत्पाद 20 रुपये में खरीदा जाता है और 50 रुपये में बेचा जाता है। लाभ प्रतिशत ज्ञात करें।

HINTS:

Profit = 50 – 20 = 30

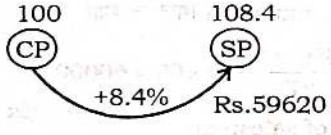
$$\text{Profit \%} = \frac{30}{20}\times 100 = 150\%$$

Ex. The selling price of a mobile phone is Rs 59,620 and it was sold at 8.4% profit. The cost price (in Rs) of the mobile phone is:

एक मोबाइल फोन का विक्रय मूल्य 59,620 रुपये है और इसे 8.4% लाभ पर बेचा गया। मोबाइल फोन का लागत मूल्य (रु में) है:

HINTS:

SP = 59620, P = 8.4%, CP = ?

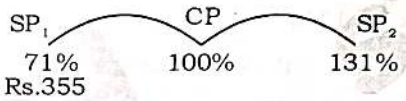


$$CP = \frac{596200}{1084}\times 100 = 55000$$

Ex. If an article is sold for Rs. 355, there is a loss of 29%. At what price (in Rs) should it be sold to gain 31% of profit?

यदि एक वस्तु को 355 रुपये में बेचा जाता है, तो 29% की हानि होती है। 31% लाभ प्राप्त करने के लिए इसे किस कीमत पर (रु में) बेचा जाना चाहिए?

HINTS:

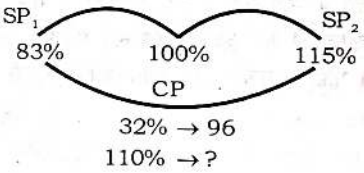


$$\frac{355}{71\%}\times 131\% = 655$$

Ex. The difference in selling prices of an article when sold at 15% profit and 17% loss is ₹ 96. If it is sold at 10% profit, then what is the selling price ?

जब कोई वस्तु 15% लाभ और 17% की हानि पर बेचीं जाती है तो इसके विक्रय मूल्य में ₹ 96 का अंतर आता है, यदि इसे 10% लाभ पर बेचा जाये तो विक्रय मूल्य क्या होगा?

HINTS:



$$110\% = \frac{96}{32}\times 110 = \text{Rs.}330$$

CONCEPT-02

(CP of X = SP of Y)

If cost price of 'x' articles is equal to selling price of 'y' articles, then Selling Price/विक्रय मूल्य = x, Cost Price/क्रय मूल्य = y

यदि 'x' वस्तु का क्रय मूल्य 'y' वस्तु के विक्रय मूल्य के बराबर है, तो

$$\text{Hence, Profit or Loss\%} = \frac{x-y}{y}\times 100$$

Ex. The cost price of 15 article is equal to selling price of 10 article. Then find the profit or loss percentage.

15 वस्तुओं का लागत मूल्य 10 वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर है। तब लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात करें।

HINTS:

$CP \times 15 = SP \times 10$

$\frac{CP}{SP} = \frac{2}{3}) +1$

$\text{Profit\%} = \frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$

CONCEPT-03

(Profit or Loss = CP or SP)

Ex. By selling two articles for ₹800, a person gains the cost price of 5 articles. The profit percent is :

800 रुपये में दो लेख बेचकर, एक व्यक्ति 5 लेखों की लागत मूल्य का लाभ प्राप्त करता है। लाभ प्रतिशत है:

HINITS:

Let CP of article be Rs.1

$P = 5CP = 5 \qquad CP = 2$

$\therefore P\% = \frac{5}{2} \times 100 = 250\%$

CONCEPT-04

(Profit or loss on selling price)

Ex. If a person calculates his profit% on selling price and according to him, his profit is 20%. Find his actual profit%.

यदि कोई व्यक्ति विक्रय मूल्य पर अपने लाभ % की गणना करता है और उसके अनुसार, उसका लाभ 20% है। उसका वास्तविक लाभ% ज्ञात करें।

P = 20% on SP

$= \frac{1 \to P}{5 \to SP}$ i.e., CP = SP – P = 5 – 1 = 4

$\text{Profit\% on CP} = \frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$

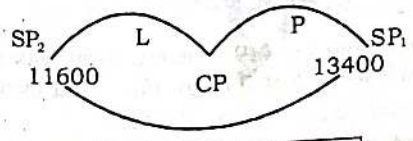
CONCEPT-05

(Profit Obtained is X- Times of the loss incurred)

Ex. The profit made by selling an article for ₹ 13400 is equal to the amount of loss incurred on selling the same article at ₹ 11600. What will be the profit if it is sold for ₹ 14,750 (in ₹)

एक वस्तु को ₹13400 में बेचने से होने वाला लाभ, ₹11600 में उसी वस्तु को बेचने पर हुए हानि के बराबर है। अगर इसे ₹14,750 (₹ में) बेचा जाता है तो क्या लाभ होगा।

HINTS:



$CP = SP_2 + L = SP_1 - P$

$\frac{1800}{2} = 900$

CP = 11600 + 900 = 12500 or 13400 – 900 = 12500

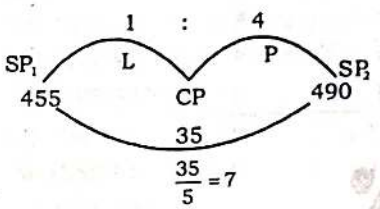
SP = 14750 (Given)

P = 14750 – 12500 = 2250

Ex. A shopkeeper sold an article for ₹ 455 at a loss (in ₹). If he sells it for ₹ 490, then he would gain an amount four times the loss. At what price (in ₹) should he sell the article to gain 25% ?

एक दुकानदार को किसी वस्तु को ₹455 में बेचने पर कुछ रुपये की हानि होती है। यदि वह इसे ₹490 में बेचता तो उसे हानि से चार गुने के बराबर लाभ होता। 25% लाभ प्राप्त करने के लिए, उसे वस्तु को किस मूल्य पर (₹ में) बेचना चाहिए?

HINTS:



CP = 455 + 1×7 = 462 or 490 – 4 × 7 = 462

$SP = \frac{462}{100} \times 125 = 577.5$

CONCEPT-06

(Number of Articles)

Ex. A person bought some articles at rate of 11 for ₹10 and sold them at the rate of 10 for ₹11. Find the profit/loss %.

₹10 में 11 की दर से कुछ वस्तु खरीदी गयी और ₹11 में 10 की दर से बेच दी गई। लाभ/हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए?

HINTS:

Method-01

		Price		Article
100	CP →	$10_{\times 10}$	:	$11_{\times 10}$
121	SP →	$11_{\times 11}$	:	$10_{\times 11}$

$\text{profit\%} = \frac{21}{100} \times 100\% = 21\%$

Method-02:

CP		SP
$\frac{10}{11}$	:	$\frac{11}{10}$
100	:	121

P% = 21%

Ex. A trader bought some orange at 7 for ₹ 11 . He sold all at 2 for ₹3. Thereby he losses ₹30. Find number of oranges sold.

₹11 में 7 की दर से कुछ संतरे खरीदे और ₹3 में 2 की दर से बेच दिये ऐसा करने से ₹30 की हानि हुई तो बताएँ उसने कितने संतरे बेचे?

HINTS:

		P		A
22	CP →	$11_{\times 2}$	:	$7_{\times 2}$
21	SP →	$3_{\times 7}$	:	$2_{\times 7}$

Rs.1 loss → 14 articles

Rs.30 loss → 14× 30 = 420 articles

Ex. A shopkeeper bought 60 pencils at a rate of 4 for Rs. 5 and another 60 pencils at a rate of 2 for Rs 3. He mixed all the pencils and sold them at a rate of 3 for Rs 4. Find his gain or loss percentage.

एक दुकानदार ने 5 रुपये में 4 की दर से 60 पेंसिलें खरीदीं और 60 पेंसिलें, 3 रुपये में 2 की दर से खरीदीं। उस ने सभी पेंसिलों को मिलाकर 4 रूपये में 3 की दर से बेच दिया। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात करें।

HINTS:

Method-01

		P	A
	CP_1	5	4
	CP_2	$3_{\times 2}$	$2_{\times 2}$
33	CP	$11_{\times 3}$	$8_{\times 3}$
32	SP	$4_{\times 8}$	$3_{\times 8}$

$$\text{Loss} = \frac{1}{33} \times 100\% = 3\frac{1}{3}\%$$

नोट: इस प्रकार के प्रश्नों मे दिए गए वस्तुओं की संख्या का LCM लेकर खरीदते एवं बेचते समय वस्तुओं की संख्या को समान करते हैं।

Method-02:

$$\text{CP} : \text{SP}$$

$$\frac{5}{4}\times 60 + \frac{3}{2}\times 60 : \frac{4}{3}\times 120$$

$$75 + 90 : 160$$

$$165 : 160$$

$$\text{Loss}\% = \frac{5}{165}\times 100\% = 3\frac{1}{3}\%$$

CONCEPT-07

(Average Concept on CP)

Ex. A man bought three articles for ₹ 6,000 each. He sold the articles respectively at 15% profit, 12% profit and 15% loss. The total percentage profit/loss he earned is:

एक व्यक्ति ने तीन वस्तुओं में से प्रत्येक को ₹6000 में खरीदा। उसने इन वस्तुओं को क्रमश: 15% लाभ, 12% लाभ और 15% हानि पर बेचा। उसे कुल कितने प्रतिशत का लाभ या हानि हुआ/हुई?

HINTS:

D →	1st	2nd	3rd
Profit →	15%	12%	−15%

$$\text{Profit}\% = \frac{15 + 12 - 15}{3} = 4\%$$

Ex. A fruit merchant bought some bananas. One fifth of them got rotten and was thrown away. He sold two fifth of the bananas with him at 15% profit and the remaining bananas with him at 10% profit. Find his overall loss or profit percent?

एक फल विक्रेता ने कुछ केले खरीदे। उनमें से $\frac{1}{5}$ सड़ गए और उन्हें फेंक दिया गया। उसके पास बचे हुए केलों में से $\frac{2}{5}$ को उसने 15% लाभ पर और शेष केलों को 10% लाभ पर बेचा। कुल लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात करें।

HINTS:

Let the merchent bought 25 bananas.

Data →	5	8	12
P/L →	−100%	+15%	+10%

$$\text{P/L}\% = \frac{-500 + 120 + 120}{25} = \frac{-260}{25} = -10.4\%$$

CONCEPT-08

(When SP is Same)

Direct Formula

$$\text{P/L}\% = \frac{100(x + y) + 2xy}{200 + x + y}$$

If profit is of x% and loss is also of x% then,

$$\text{L}\% = \frac{-x^2}{100}$$

Ex. Two horses were sold at ₹1599 each. First was sold at 25% profit and second at 20% loss. Find the overall profit or loss %.

दो घोड़े में से प्रत्येक को ₹1599 की दर से बेचा गया। उनमें से पहले घोड़े को 25% लाभ पर तथा दूसरे को 20% हानि पर बेचा गया। पूरे सौदे में लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात करें।

HINTS:

Method-01

		CP	SP
I ⇒	25% = $\frac{+1}{4}$	$4_{\times 4}$	$5_{\times 4}$
II ⇒	20% = $\frac{-1}{5}$	$5_{\times 5}$	$4_{\times 5}$
		41	40

$$\text{Loss}\% = \frac{1}{41}\times 100\% = 2.43\%$$

Note: To make the SP same in both cases take the LCM of 5 and 4.

Method-02

$$\text{P/L}\% = \frac{100(x + y) + 2xy}{200 + x + y}$$

$$= \frac{100(25 - 20) + 2 \times 25 \times (-20)}{200 + 25 - 20} = 2.43\%$$

Ex. Two horses were sold for ₹1920 each. First was sold at 20% loss and second at 20% profit. Find over all profit or loss.

दो घोड़े 1920 रूपये प्रत्येक के दर से बेचा जाता है। एक को 20% हानि तथा दूसरे को 20% लाभ पर बेचा जाता है। कुल कितने रुपये का लाभ या हानि हुआ ?

HINTS:

$$\text{L}\% = \frac{-x^2}{100} = \frac{-20^2}{100} = 4\%$$

@Baka_260

CONCEPT-09

(CP of 1st article = SP of 2nd article)

Ex. A shopkeeper sold two items. The selling price of the first item equals the cost price of the second item. He sold the first item at a profit of 20% and the second item at a loss of 10%. What is his overall profit/loss percent?
एक दुकानदार दो वस्तुएँ बेचता है। पहली वस्तु का विक्रय मूल्य दूसरी वस्तु के क्रय मूल्य के बराबर है। उसने पहली वस्तु 20% के लाभ और दूसरी वस्तु को 10% की हानि पर बेचा। कुल लाभ या हानि प्रतिशत क्या है?

HINTS:

		CP	SP
I	$\Rightarrow 20\% = \frac{+1}{5}$	$5_{\times 5}$	$6_{\times 5}$
II	$\Rightarrow -10\% = \frac{-1}{10}$	$10_{\times 3}$	$9_{\times 3}$
		55	57

$$P\% = \frac{2}{55}\times 100\% = \frac{40}{11}\% = 3\frac{7}{11}\%$$

Note: To equate the SP of 1st with CP of 2nd, take the LCM of 6 and 10.

CONCEPT-10

$$\frac{P_1}{Q_1\times(100\pm P_1/L_1)\%} = \frac{P_2}{Q_2\times(100\pm P_2/L_2)\%}$$

Ex. By selling 3 dozen oranges for Rs 405, a trader loses 25%. How many oranges should he sell for 288 if he needs to earn a profit of 20% in the transaction?
रूपये 405 में 3 दर्जन संतरे बेचकर किसी व्यापारी को 25% की हानि होती है। यदि वह सौदे में 20% का लाभ प्राप्त करना चाहता है, तो उसे 288 रूपये में कितने संतरे बेचने चाहिए?

HINTS:

$$\frac{405}{12\times 3\times 75\%} = \frac{228}{x\times 120\%} \Rightarrow x = 16$$

Ex. By selling 18 table fans for ₹11,664 a man incurs a loss of 10%. How many fans should be sell for ₹17,424 to earn 10% profit?
18 टेबल पंखों को ₹11,664 में बेचने के बाद एक व्यक्ति को 10% की हानि होती है। 10% का लाभ कमाने के लिए उसे ₹17,424 में कितने पंखे बेचने चाहिए?

HINTS:

$$\frac{11664}{18\times 90} = \frac{17424}{x\times 110}$$

$x = 22$

CONCEPT-11

(Dishonest Shopkeeper)

बेइमानी

Buying खरीदते वक्त बेइमानी

Selling बेचते वक्त बेइमानी

A dishonest shopkeeper sells his goods at C.P. but uses false weight, then his profit =
एक बेईमान दुकानदार अपना माल क्रय मूल्य पर बेचता है। लेकिन झूठे वजन का उपयोग करता है, फिर उसका

Gain%/लाभ%

$$= \frac{\text{True weight} - \text{False weight}}{\text{False weight}}\times 100$$

Ex. A dishonest shopkeeper promises to sell his goods at its CP but he uses 30% less weight. Find his profit % ?
एक बेईमान दुकानदार अपनी लागत मूल्य पर अपना माल बेचने का वादा करता है लेकिन वह 30% कम वजन का उपयोग करता है। उसका लाभ% ज्ञात कीजिये?

HINTS:

Method-01

Let SP = 1000

True weight = 1000, False weight = 700

$$\text{Gain/लाभ\%} = \frac{300}{700}\times 100 = 42\frac{6}{7}\%$$

Method-02

CP 700 → SP 1000 (+300)

$$P\% = \frac{3}{7}\times 100\% = \frac{300}{7}\% = 42\frac{6}{7}\%$$

Ex. A dishonest shopkeeper promises to sell his goods at 44% loss but he uses 910g weight instead of 1 kg. Find his actual loss percent ? (approx.)
एक बेईमान दुकानदार 44% नुकसान पर अपने माल को बेचने का वादा करता है लेकिन वह 1 किलो के बजाय 910 ग्राम वजन का उपयोग करता है। उसका वास्तविक नुकसान प्रतिशत क्या होगा? (लगभग)

HINTS:

CP	SP
100	56
910	1000
91	56

(−35)

$$L\% = \frac{35}{91}\times 100\% = 38.4\%$$

Ex. A shopkeeper marks up his goods 35% above the CP and gives 23% discount to the customer. at the time of buying he uses 1120g instead of 1kg and At the time of selling the goods he gives 880g weight instead of 1kg. find his profit %?
एक दुकानदार लागत मूल्य से 35% ऊपर अपने माल को चिह्नित करता है और ग्राहक को 23% की छूट देता है। खरीदने के समय वह 1 किलो के बजाय 1120 ग्राम का उपयोग करता है और सामान बेचने के समय वह 1 किलो के बजाय 880 ग्राम वजन देता है। उसका लाभ% ज्ञात कीजिये?

@Bka_260

HINTS:

CP	SP
100	135
100	77
1000	1120
880	1000
1000	1323

+323

$$P = \frac{323}{1000} \times 100\% = 32.3\%$$

CONCEPT-12

CP_1 ——— SP_1
| |
| |
CP_2 ——— SP_2

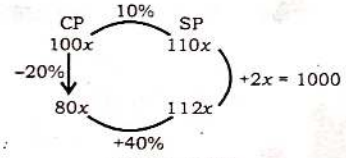
In these type of questions two situations are given. In the first case, an article is bought and sold at some P/L% and in the second case, it is given that if the article was bought at a certain percent less or more and sold it for a certain rupees more or less then buyer would have made a certain P/L%. CP of the article is to be found.

इस प्रकार के प्रश्नों में दो स्थितियाँ दी गई होती हैं। पहली स्थिति में कोई वस्तु कुछ क्रय मूल्य पर खरीद कर किसी निश्चित लाभ/हानि% पर बेची जाती है, दूसरी स्थिति में यह दिया जाता है कि यदि वह वस्तु एक निश्चित प्रतिशत कम या ज्यादा पर खरीदी गई होती और उसे एक निश्चित रुपये कम या ज्यादा पर बेचा गया होता तो खरीदार को एक निश्चित लाभ/हानि% होता। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात करना होता है।

Ex. A man bought an article and sold it at a gain of 10%. If he had bought the article at 20% less and sold it for ₹1000 more, he would have made a profit of 40%. The cost price of the article (in ₹) is:

एक आदमी ने एक वस्तु को खरीदा और उसे 10% की लाभ पर बेचा। यदि उसने 20% कम में वस्तु खरीदा होता और इसे ₹1000 अधिक मे बेचा होता, तो उसने 40% का लाभ कमाया होता। वस्तु का क्रय मूल्य (₹ में) ज्ञात करें।

HINTS:

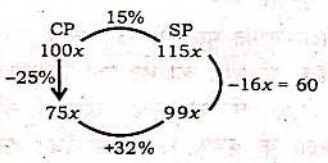


$$CP = \frac{1000 \times 100x}{2x} = 50000$$

Ex. A person sold a house at 15% profit. If he had purchased it for 25% less & sold it for ₹ 60 less, then there would have been a profit of 32%. Find the cost price of house.

एक व्यक्ति ने एक मकान 15% लाभ पर बेचा। यदि उसने इसे 25% कम में खरीदा होता और ₹ 60 कम पर बेचता तो उसे 32% लाभ होता। मकान का क्रय मूल्य ज्ञात करो?

HINTS:



$$CP = \frac{60}{16x} \times 100x = 375$$

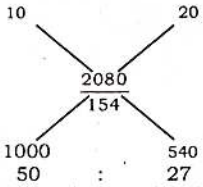
CONCEPT-13

(Two Article Case)

Ex. A person buys 5 tables and 9 chairs for ₹15,400. He sells tables at 10% profit and chairs at 20% profit. If his total profit on selling all the tables and chairs is ₹2,080, what is the cost price of 3 chairs?

एक व्यक्ति 5 मेज और 9 कुर्सियों को ₹ 15,400 में खरीदा। उसने मेजों को 10% लाभ पर तथा कुर्सियों को 20% लाभ पर बेच दिया। यदि सभी मेज एवं कुर्सियों को बेचकर उसका कुल लाभ ₹ 2,080 का था, तो 3 कुर्सियों का क्रय मूल्य कितना है?

HINTS:



77 unit → 15400
1 unit → 200
Cost of 9 chairs = Rs. 5400

Then, Cost of 3 chairs = $\frac{5400}{3}$ = Rs.1800

Ex. A man sells a table at 12% loss and a book at 19% profit and earns a profit of ₹ 160 but if he sells, the table at 12% profit and book at 16% loss, then he bears a loss of ₹ 40. Find the difference between price of a table and a book.

एक आदमी एक टेबल को 12% हानि तथा किताब को 19% लाभ पर बेचता है तथा ₹160 का लाभ कमाता है। परन्तु यदि वह टेबल को 12% लाभ तथा किताब को 16% हानि पर बेचता है तब उसे ₹40 की हानि होती है। टेबल तथा किताब के मूल्य में अन्तर ज्ञात करो।

HINTS:

	Table	Book
CP →	$100x$	$100y$
	$-12x$	$+19y = 160$
	$+12x$	$-16y = -40$
	0	$3y = 120$

∴ Book = 100 × 40 = 4000
$-12x + 760 = 160$
$\Rightarrow 600 = 12x$
∴ Table = 100 × 50 = 5000
Difference = 5000 – 4000 = 1000

CONCEPT-14

If P% = CP, Then CP = $10\left(\sqrt{25 + SP} - 5\right)$

Ex. A wrist watch is sold for ₹1,200 at a profit percent equal to its cost price. Find the cost price of the wrist watch.

एक कलाई घड़ी को उसके क्रय मूल्य के बराबर लाभ प्रतिशत पर 1,200 रु. में बेचा जाता है। कलाई घड़ी का क्रय मूल्य ज्ञात करें।

Hints:

$CP = 10\left(\sqrt{25 + 1200} - 5\right)$
$= 10(35 - 5) = 300$

DISCOUNT

बट्टा (छूट)

14

Some Common Terms/कुछ सामान्य शर्तें

Discount/बट्टा(छूट): The discount which is given at the time of selling the article is called discount.

वस्तु को बेचते समय जो छूट दी जाती है, बट्टा कहलाती है।

Marked or Listed price/अंकित मूल्य: The price printed on an article or written on a slip attached to it is called its marked price (MP). It is also called listed or printed price.

किसी वस्तु पर छपा हुआ या उससे जुड़ी पर्ची पर लिखा हुआ मूल्य उसका अंकित मूल्य (MP) कहलाता है। इसे सूचीबद्ध या मुद्रित मूल्य भी कहा जाता है।

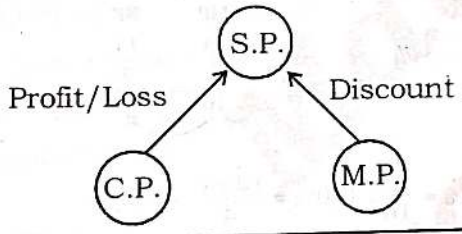
When discount is offered, MP > SP

When discount is not offered, MP = SP

Discount/बट्टा(छूट) = MP/अंकित मूल्य – SP/विक्रय मूल्य

$$\text{Discount/बट्टा(छूट)\%} = \frac{D}{MP} \times 100$$

Note: Discount is always given on MP.



Important Concepts/महत्वपूर्ण सिद्धान्त

CONCEPT-01

If mark price is given and also discount (D_1%, D_2%.....) are given then, selling price is

यदि अंकित मूल्य दिया गया हो और छूट (D_1%, D_2%.....) दी जाती है, तो

SP (विक्रय मूल्य)

$$= \text{MP (अंकित मूल्य)} \times \left(\frac{100 - D_1\%}{100}\right) \times \left(\frac{100 - D_2\%}{100}\right)$$

This can be referred as **Series Method.**

Ex. A article is sold at three successive discounts of 10%, 20% and 25%. If the selling price of the article is Rs.2,592 then what is the marked price of the article?

एक वस्तु 10%, 20% और 25% की तीन क्रमागत छूटों पर बेची जाती है। यदि वस्तु का विक्रय मूल्य 2,592 रुपये है, तो वस्तु का अंकित मूल्य क्या है?

HINTS:

$$MP \times \frac{90}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{75}{100} = 2592$$

MP = 4800

CONCEPT-02

$$\frac{CP}{MP} = \frac{(100 - D\%)}{(100 + P/L\%)}$$

Ex. A dealer allows his customers a discount of 18% and still gains 24%. If an article costs Rs 1,560 to the dealer, what is its marked price (to the nearest Rs)?

एक डीलर अपने ग्राहकों को 18% की छूट देता है और फिर भी 24% का लाभ प्राप्त करता है। यदि डीलर के लिए वस्तु का लागत मूल्य 1,560 रुपये है, तो उसका अंकित मूल्य (निकटतम रुपये में) क्या है?

HINTS:

D% = 18% P = 24% CP = 1560 MP = ?

$$\frac{MP}{CP} = \frac{100 \pm P/L\%}{100 - D\%}$$

$$\Rightarrow \frac{MP}{1560} = \frac{124}{82}$$

$$\Rightarrow MP = \frac{96720}{41} = 2359$$

CONCEPT-03

Two successive discounts of x% & y% are given then equivalent discount –

x% & y% की दो क्रमागत छूट दी गई हो तो परिणामी एकल छूट –

$$= \left(x + y - \frac{xy}{100}\right)\%$$

Ex. Equivalent discount of 15%, 25%

15%, 25% का समतुल्य बट्टा

$$\left(15 + 25 - \frac{25 \times 15}{100}\right)\% = (40 - 3.75)\% = 36.25\% \text{ discount}$$

Ex. What will be a single equivalent discount for successive discounts of 20%, 40% and 75% on the marked price of an item?

किसी वस्तु के अंकित मूल्य पर 20%, 40% और 75% की तीन क्रमागत छूटों के बराबर एकल छूट का प्रतिशता क्या होगा?

HINTS:

$$20\% = \frac{-4}{5} \quad 40\% = \frac{-2}{5} \quad 75\% = \frac{-3}{4}$$

@Baka_200

MP	SP
5	4
5	3
4	1
25	3

-22

$$D\% = \frac{22}{25}\times 100\% = 88\%$$

Ex. Two successive discounts on the marked price of an article turns out to be equivalent to a single discount of 25%. If the rates of the first discount is 10%. what is the rate of second discount?

एक वस्तु के चिह्नित मूल्य पर लगातार दो छूटें 25% की एकल छूट के बराबर हैं। अगर पहली छूट की दरें 10% हैं। दूसरी छूट की दर क्या है?

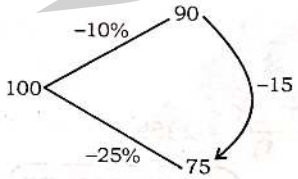
HINTS:

Method-01

	MP	SP
1st Discount	10	9
2nd Discount	4×9	10×3
Equiv. Discount	4	3

$$\text{2nd Discount\%} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\times 100 = 16\frac{2}{3}\%$$

Method-02



$$\text{2nd Discount\%} = \frac{15}{90}\times 100 = 16\frac{2}{3}\%$$

(Remember this concept?)

Ex. After giving two successive discounts, each of x %, on the market price of an article , the total discount is ₹ 259.20 . If the marked price of the article is ₹ 720 , then the value of x is :

एक वस्तु के बाजार मूल्य पर प्रत्येक x % में दो बार छूट देने के बाद कुल छूट ₹259.20 रुपये है। यदि वस्तु का चिह्नित मूल्य ₹720 है, तो x का मान है:

HINTS:

	MP		SP
	7200	:	4608
	900	:	576
2D →	√225	:	√144
1D →	15		12

-3

$$\text{Discount\%} = \frac{3}{15}\times 100\% = 20\%$$

Note: 2 discount से 1 discount पर आने के लिए square root (वर्गमूल) तथा 3 discount से 1 पर आने के लिए cube root (घनमूल) लेते है।

CONCEPT-04

'y' articles (quantity/number) are given free on purchasing 'x' articles. Then,

'x' वस्तु खरीदने पर 'y' वस्तु (मात्र/संख्या) निःशुल्क दी जाती है। फिर,

$$\text{Discount/छूट\%} = \frac{y\times 100}{x+y}$$

$$\text{or, Discount/छूट\%} = \frac{\text{No. of Free Articles}\times 100}{\text{Total articles}}$$

Ex. On buying 24 bangles Isha gets 6 bangles free of cost. What percent does Isha get as a discount?

24 चूड़ियाँ खरीदने पर ईशा को 6 चूड़ियाँ मुफ्त मिलती हैं। गणना करें कि ईशा को कितने प्रतिशत की छूट मिलती है?

HINTS: Here, y = 6 and x = 24

$$\text{Discount/छूट\%} = \frac{6\times 100}{6+24} = 20\%$$

Ex. Buy 11 get 3 free + 12.5% additional discount will result in?

11 वस्तु के खरीदने पर 3 वस्तु मुफ्त + 12.5% की अतिरिक्त छूट के बराबर एकल प्रभावी छूट होगी :

HINTS:

MP	SP
14	11
8	7
16	11

-5

$$D\% = \frac{5}{16}\times 100\% = \frac{125\%}{4} = 31.25\%$$

CONCEPT-05

(When sum of given two discounts is same)

Ex. A Company offers three types of successive discounts (i) 25% and 15%, (ii) 30% and 10%, (iii) 35% and 5%, which offer is best for the customer?

एक कम्पनी तीन प्रकार की लगातार छूट प्रस्ताव देती है– (i) 25% और 15% (ii) 30% और 10% (iii) 35% और 5% कौन-सा प्रस्ताव उपभोक्ताओं के लिए सबसे अच्छा है–

HINTS:

यदि दिए गए discounts का योगफल समान हो तो जिन दो discounts का अंतर अधिकतम होगा उस से discount भी अधिकतम प्राप्त होगा। अर्थात् उपभोक्ता के लिए वही दो discount सबसे अच्छे होगें। तथा दुकानदार के लिए जिनका अंतर न्यूनतम होगा वही फायदेमंद होगा।

(i) 25 – 15 = 10

(ii) 30 – 10 = 20

(iii) 35 – 5 = 30

इस लिए (iii) offer उपभोक्ता के लिए सबसे अच्छा है।

@Baka_200

SIMPLE INTEREST

साधारण ब्याज

15

Some Common Terms/कुछ सामान्य शर्तें

- Simple Interest : Simple interest is the amount that a borrower pays on a certain sum of money at a fixed rate over a specified period of time.

  साधारण ब्याज: साधारण ब्याज वह राशि है, जो किसी निश्चित राशि पर निश्चित समय अवधि में निश्चित दर पर उधार लेने वाला व्यक्ति भुगतान करता है।

- Interest Rate: The rate at which a sum of money is borrowed is called the rate of interest.

  ब्याज दर: जिस दर पर कोई राशि उधर ली जाती है उसे ही ब्याज की दर कहते हैं।

- Time period : The time period for which an amount is borrowed is called the time period of interest.

  समय अवधि: कोई राशि जितने समय के लिए उधर ली जाती है, उसे ही ब्याज की समय अवधि कहते हैं।

- Principal : The borrowed money is called principal.

  मूलधन: उधार ली गयी राशि को मूलधन कहते हैं।

- Amount : Sum of principal and interest is called amount.

  मिश्रधन: मूलधन और ब्याज का योग मिश्रधन कहलाता है

- Basic formula(सामान्य सूत्र)

  Simple Interest/साधारण ब्याज, $SI = \frac{P \times R \times T}{100}$

  Amount/मिश्रधन, $A = P + SI$

  Where,

  P = Principal/मूलधन

  T = Time/समय

  R = Rate of interest/ब्याज की दर

Ex. Find the simple interest and amount received on a sum of Rs. 16000 at the rate of 15% interest in 3 years.

16000 की राशि पर, 15% ब्याज की दर से 3 वर्ष में प्राप्त साधारण ब्याज तथा मिश्रधन ज्ञात करें।

HINTS:

$SI = = \frac{16000 \times 15 \times 3}{100} = Rs.\ 7200$

$A = P + SI = Rs.\ 16000 + Rs.\ 7200 = Rs.\ 23200$

Important Concepts/महत्वपूर्ण सिद्धान्त

CONCEPT-01

Concept of time (समय की अवधारणा)

- If a certain sum becomes 'n' times of itself in T years on Simple interest, then the rate percent per annum and Time is –

  यदि एक निश्चित राशि साधारण ब्याज पर T वर्ष में स्वयं की 'n' गुनी हो जाती है, तो वार्षिक दर प्रतिशत (R) और समय (T) का मान होगा –

  $R\% = \frac{(n-1)}{T} \times 100\%$

  $T = \frac{(n-1)}{R} \times 100\%$

Ex. If a certain sum becomes 3 times of itself in 4 years on simple interest. Find annual rate percent.

यदि साधारण ब्याज पर एक निश्चित राशि 4 वर्षों में स्वयं की 3 गुना हो जाती है। वार्षिक दर प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$\text{Rate } \% = \frac{(3-1)}{4} \times 100\% = 50\%$

- If simple interest, becomes 'n' times of principle–

  यदि साधारण ब्याज, मूलधन का 'n' गुना हो जाता हो –

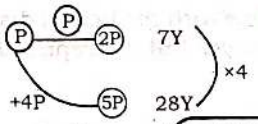
  i.e. $SI = P \times n \Rightarrow RT = n \times 100$

Ex. A sum doubles in seven years at simple interest. In how many years will the sum become five times the original sum?

एक राशि साधारण ब्याज पर 7 वर्षों में दोगुनी हो जाती है। कितने वर्षों में यह राशि मूल राशि से पाँच गुनी हो जाएगी?

HINTS:

ATQ, Sum doubles in 7 years, it means in 7 years interest occurred is equal to principal.



CONCEPT-02

RATIO OF PRINCIPAL AND AMOUNT

(मिश्रधन और मूलधन का अनुपात)

Ex. The simple interest received on a sum in 10 years at the rate of 5% per annum simple interest is Rs 2000, then find the ratio between the Amount and principal.

किसी राशि पर 5% प्रति वर्ष साधारण ब्याज की दर से 10 वर्ष में प्राप्त साधारण ब्याज 2000 रु है, तब मिश्रधन और मूलधन के बीच अनुपात ज्ञात कीजिए।

@Baka_200

HINTS:

In Such type of questions we don't need to solve question completely.

P = 100% SI = 10 × 5% = 50%

P : A = P : (P + SI) = 100% : 150% = 2 : 3

CONCEPT-03

Munni Concept (मुन्नी अवधारणा)

Ex. A sum lent out at simple interest amounts to ₹ 6076 in 1 year and ₹ 7504 in 4 years. Find the sum and rate of interest.

साधारण ब्याज पर उधार दी गई एक राशि 1 वर्ष में ₹ 6076 तथा 4 वर्ष में ₹ 7504 हो जाती है। मूलधन और ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$$1 \text{ Year's SI} = \frac{7504 - 6076}{4 - 1} = \frac{1428}{3} = \text{Rs. } 476$$

Principal = Rs. 6076 – Rs. 476 = Rs. 5600

$$\text{Rate \%} = \frac{SI}{P} \times 100\% = \frac{476}{5600} \times 100\% = 8.5\%$$

Ex. A sum at a certain rate of simple interest becomes Rs. 14880 after 3 years and Rs,16800 after 5 years. Find the simple interest on the same sum at 10% per annum for 4 years (in Rs.)

साधारण ब्याज की एक निश्चित दर पर एक राशि 3 साल बाद 14880 रुपये और 5 साल बाद 16800 रुपये हो जाती है। उसी राशि पर 10% प्रतिवर्ष की दर से 4 वर्षों का साधारण ब्याज (रुपये में) ज्ञात करें।

HINTS:

P + 3 Year's SI = 14880 ----------[1]

P + 5 Year's SI = 16800 ----------[2]

On solving [2] – [1] we get–

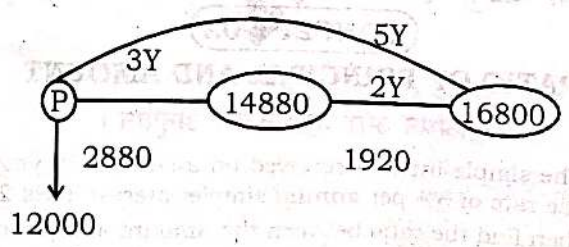
2 Year's SI = 1920

$$\text{Principal} = 14880 - 1920 \times \frac{3}{2}$$

$$= \text{Rs. } 14480 - \text{Rs. } 2880 = 12000$$

$$SI = \frac{PRT}{100} = \frac{12000 \times 10 \times 4}{100} = \text{Rs. } 4800$$

Note: Solving these questions with the help of diagram could be easier and time saver but concept must be same.



$$SI = \frac{12000 \times 10 \times 4}{100} = 4800$$

CONCEPT-04

Concept of total SI

(साधारण ब्याज के कुल योग की अवधारणा)

Ex. A certain sum is lent at 4% p.a. for 3 years 8% p.a. for next 4 years and 12% p.a. beyond 7 years If for a period of 11 years the simple interest obtained is ₹ 27,600, then the sum is (in ₹) :

एक निश्चित राशि 3 वर्षों के लिए 4% प्रति वर्ष, अगले 4 वर्षों के लिए 8% प्रति वर्ष तथा 7 वर्षों के बाद 12% प्रति वर्ष की दर से उधार दी जाती है। यदि 11 वर्षों की अवधि के लिए साधारण ब्याज ₹ 27,600 प्राप्त होता है, तो यह राशि (रुपये में) कितनी है?

HINTS:

TOTAL SI = (4% × 3) + (8% × 4) + (12% × 4) = 92%

$$\text{Sum} = \frac{27600}{92\%} \times 100\% = ₹\ 30000$$

CONCEPT-05

Concept of Equal SI

(समान साधारण ब्याज की अवधारणा)

Ex. A person invested a total of ₹ 9,000 in three parts at 3%, 4% and 6% per annum on simple interest. At the end of a year, he received equal interest in all three cases. The amount invested at 6% is.

एक व्यक्ति साधारण ब्याज पर ₹ 9,000 को तीन भाग में 3%, 4% और 6% की दर से निवेश करता है। एक वर्ष के अंत में, उसे तीनों मामलों में समान ब्याज प्राप्त हुआ। 6% पर निवेशित राशि है।

HINTS:

Let the sum invested in the ratio $x : y : z$.

ATQ, Here the SI on all the sum invested is equal and time is constant.

$$\text{Thus, SI} \propto \frac{\text{Sum}}{\text{Rate\%}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$$

$$\Rightarrow x : y : z = 4 : 3 : 2$$

$$\text{The sum invested at 6\%} = \text{Rs. } 9000 \times \frac{2}{9} = \text{Rs. } 2000$$

CONCEPT-06

Concept of average in SI

(साधारण ब्याज में औसत की अवधारणा)

Ex. A person invested one-fourth of the sum of ₹ 25,000 at a certain rate of simple interest and the rest at 4% p.a. higher rate. If the total interest received for 2 years is ₹ 4,125. What is the rate at which the second sum was invested?

एक व्यक्ति ने ₹ 25,000 की एक-चौथाई राशि साधारण ब्याज की किसी निश्चित दर पर तथा शेष राशि 4% प्रति वर्ष उच्च दर से निवेश की। यदि 2 वर्षों के लिए प्राप्त कुल ब्याज ₹ 4,125 है, तो दूसरी राशि को किस दर पर निवेश किया गया था?

@Baka_Boo

HINTS:

$$1 \text{ Year's Net SI\%} = \frac{4125}{2500} \times \frac{1}{2} \times 100\% = 8.25\%$$

Sum →	1	3
Rate →	$r\%$	$r\% + 4$
	8.25%	

$\Rightarrow r\% + 3(r\% + 4) = (3+1) \times 8.25\%$

$\Rightarrow r\% = 5.25\%$

Thus, Second sum invested at = 5.25% + 4% = 9.25%

CONCEPT-07

Concept of equal amount

(समान मिश्रधन की अवधारणा)

Ex. ₹ 21750 is invested by a person in the bank account of his two sons whose ages are 9 years and 13 years in such a way that they will get equal amount at an age of 21 years at the rate of 4.5% per annum. Find the share of younger child.

एक व्यक्ति अपने दो बच्चों जिनकी आयु 9 वर्ष और 13 वर्ष है, के बैंक खातों में ₹ 21,750 की धनराशि इस प्रकार निवेशिक करता है ताकि 21 वर्ष की आयु होने पर 4.5% वार्षिक दर से इनको समान धन प्राप्त हों। छोटे बच्चे का भाग ज्ञात कीजिए।

HINTS:

For Younger child –

Invested the sum for the period = 21 – 9 = 12 year

For Elder child –

Invested the sum for the period of = 21 – 13 = 8 Year

Let the sum invested for younger and elder child is x and y.

ATQ, At the age of 21 both of them will get the same amount.

Thus, $(100 + 12 \times 4.5)\%$ of $x = (100 + 8 \times 4.5)\%$ of x

$\Rightarrow 154\%$ of $x = 136\%$ of y

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{136}{154} = \frac{68}{77}$$

$$\text{The sum for younger child} = 21750 \times \frac{136}{154+154}$$

$$= \text{Rs. } 10200$$

Installment (किश्त)

Simple interest की Installment के Concept को समझना विद्यार्थियों के लिए थोड़ा Tricky होता है। परन्तु हम यहाँ नीचे दिए गए Exmaple की मदद से इस concept से सम्बधित सारे Doubt का समाधान करेगें।

Ex. Let P = Rs. 30,000, R = 8% per annum, T = 4 years. Find the value of each installment.

मान लीजिए P = 30,000 रुपये, R = 8% प्रति वर्ष T = 4 वर्ष है तो प्रत्येक किस्त का मान ज्ञात कीजिए।

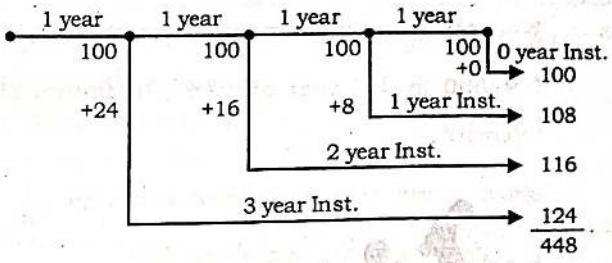
HINTS:

Due debt (बकाया कर्ज)

$$= 30,000 + 30000 \times \frac{8 \times 4}{2}$$

= Rs. 39600

Let the value of each installment = 100



यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि installment की जो धनराशि अपने प्रथम वर्ष के बाद दी है उसका 8% की दर से शेष समयावधि (3 वर्ष) पश्चात जो मान प्राप्त होगा वह उस installment का Actual मान है, इसी प्रकार दूसरे वर्ष के बाद जो installment दे रहे है उसका 8% की दर से शेष समयावधि (2 वर्ष) पश्चात जो मान प्राप्त होगा वह उस installment का Actual मान है, यह प्रक्रिया इसी प्रकार समयावधि की समाप्ति तक चलती रहती है।

∴ We have 448 units = 39,600

∴ Value of each installment i.e., 100 unit

$$= \frac{39600}{448} \times 100 = 8840$$

Total amount that has been paid

$= 8840 \times 4 = 35360$

Interest = 35360 – 30,000 = 5360

यदि सम्पूर्ण भुगतान एक साथ 4 वर्ष बाद किया जाता, तो 39,600 रूपये का भुगतान करना पड़ता परन्तु चूंकि प्रत्येक वर्ष के अन्त में एक निश्चित Installment का भुगतान कर दिया गया इसलिए 4 वर्ष में उसने कुल 35360 रूपये अर्थात 5360 रूपये ब्याज के रूप में भुगतान किया।

Ex. What annual payment will discharge a debt of ₹ 808 dues in 2 years at 2% simple interest.

2 साल में 2% प्रति वर्ष की दर से 808 रूपये के ऋण का वार्षिक भुगतान ज्ञात करें?

HINTS:

We have, Due debt (बकाया कर्ज) = Rs.808

Let the value of each installment = 100 units

∴ Due debt = 100 + 102 = 202 units

$$\text{Value of each installment} = \frac{808}{202} \times 100 = 400$$

Ex. What annual installment will discharge a debt of ₹ 1740 due in 5 years at 8% simple interest.

कौन सी वार्षिक किश्त 1740 रूपये के ऋण को 8% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 5 वर्षों में अदा कर देगी?

@Baka_200

HINTS:

We have, Due debt (बकाया कर्ज) = Rs.1740

Let the value of each installment = 100 units

∴ Due debt = 100 + 108 + 116 + 124 + 132

= 580 units

Value of each installment = $\frac{1740}{580} \times 100 = 300$

Ex. What five monthly payment will discharge a debt of ₹ 94500 in $1\frac{1}{4}$ year at 12% per annum simple interest?

कौन-सी 5-माही किश्त 94,500 रूपये के ऋण को $1\frac{1}{4}$ वर्ष में 12% प्रति वर्ष के साधारण ब्याज से चुका देगी?

HINTS:

$R = \frac{12}{12} \times 5 = 5\%, \quad T = \frac{15}{5} = 3$

We have, Due debt (बकाया कर्ज) = Rs.94500

Let the value of each installment = 100 units

∴ Due debt = 100 + 105 + 110 = 315 units

Value of each installment = $\frac{94500}{315} \times 100 = 30000$

Ex. A man borrowed a sum of Rs. 7000 from bank at simple interest. After 3 years he paid Rs. 3000 to the bank and the end of 5 years he paid Rs. 5450 and clear all his dues. Find the rate of interest.

एक व्यक्ति ने साधारण ब्याज पर बैंक से ₹ 7,000 की राशि उधार ली। 3 साल बाद उन्होंने बैंक को ₹ 3,000 का भुगतान किया और 5 साल के अंत में उन्होंने ₹ 5450 रुपये का भुगतान किया और अपने सभी बकाया राशि को साफ कर दिया। ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Borrowed Sum = Rs. 7000

Total Amount Paid = 3000 + 5450 = Rs. 8450

Interest paid = 8450 – 7000 = Rs. 1450

We know, $SI = \frac{P \times R \times T}{100}$

Here we will pay the interest for two principal i.e. 7000 for 3 years and 4000 for 2 years.

$\Rightarrow \frac{7000 \times R \times 3}{100} + \frac{4000 \times R \times 2}{100} = 1450$

$\Rightarrow 290R = 1450$

$\Rightarrow R = 5\%$

Ex. A camera is sold for ₹2500 as cash down payment and ₹2100 after 3 months. If the rate of interest charged is 20% p.a, find the cash price of the camera.

एक कैमरा नकद अग्रिम भुगतान के रूप में 2500 रुपये और 3 महीने के बाद 2100 रुपये में बेचा जाता है। यदि ब्याज की दर 20% प्रति वर्ष है, तो कैमरे का नकद मूल्य ज्ञात करें।

HINTS:

Cash down payment = 2500

Installment paid after 3 months = 2100

Rate of interest = 20% p.a.

So, Principal amount for the 2100

$\Rightarrow P\left(100 + 20 \times \frac{3}{12}\right)\% = 2100$

$\Rightarrow P \times 105\% = 2100$

$\Rightarrow P = \frac{2100}{105} \times 100\% = \text{Rs. } 2000$

Thus, Price of camera = 2500 + 2000 = Rs. 4500

Ex. A computer is sold for 30,000 cash or 18000 cash down payment and 6 monthly instalments of 2150 each. Find the rate of interest charged under the instalment plan.

एक कंप्यूटर 30,000 नकद या 18000 नकद अग्रिम भुगतान और 2150 प्रत्येक की 6 मासिक किस्तों पर बेचा जाता है। किस्त योजना के अंतर्गत ली जाने वाली ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Cash price of the computer = Rs. 30000

Cash down payment = Rs. 18000

Payment in 6 instalments = (6 × 2150) = Rs. 12900

Total amount paid = (18000 + 12900) = Rs. 30900

∴ Interest paid = (30900 – 30000) = Rs. 900

Principal for 1st month = (30000 – 18000) = 12000

Principal for 2nd month= (12000 – 2150) = 9850

Principal for 3rd month = (9850 – 2150) = 7700

Principal for 4th month = (7700 – 2150) = 5550

Principal for 5th month = (5550 – 2150) = 3400

Principal for 6th month = (3400 – 2150) = 1250

∴ Total Principal for one month = (12000 + 9850 + 7700 + 5550 + 3400 +1250) = Rs. 39750

We have, $39700 \times \frac{r}{100} \times \frac{1}{12} = 900$

$\Rightarrow r = \frac{900 \times 12 \times 100}{39750} = \frac{1440}{53} = 27.17\%$

Thus, the rate of interest = 27.17% per annum

☆☆☆☆☆

@Raka_260

COMPOUND INTEREST

चक्रवृद्धि ब्याज

16

Compound Interest/चक्रवृद्धि ब्याज

Compound interest is the interest earned on an amount borrowed or lent, which is calculated on both the initial principal amount and the accumulated interest of previous periods.

चक्रवृद्धि ब्याज उधार ली गई अथवा दी गई राशि पर मिलने वाला वह ब्याज है जिसकी गणना प्रारंभिक मूलधन और पिछली अवधि के संचित ब्याज दोनों पर की जाती है।

The compound interest for an amount depends on both Principal and interest gained over periods. This is the main difference between compound and simple interest.

किसी राशि के लिए चक्रवृद्धि ब्याज मूलधन और समयावधि में अर्जित ब्याज दोनों पर निर्भर करता है। यह चक्रवृद्धि और साधारण ब्याज के बीच मुख्य अंतर है।

For finding Compound Interest we will use the following formula

चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करेंगे

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t, \quad C.I. = A - P$$

$$C.I. = P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - 1\right]$$

Where,

A = Amount/मिश्रधन,

P = Principal/मूलधन,

r = Rate of Compound Interest (C.I.)

चक्रवृद्धि ब्याज की दर (C.I.)

t = No. of years/समयावधि

If in the question stated that interest is compounded half-yearly, Quarterly, Monthly or n-Monthly then you have to find new rate and cycle to calculate CI with the help of following Table:

यदि प्रश्न में कहा गया है कि ब्याज अर्धवार्षिक, त्रैमासिक, मासिक या n-मासिक रूप से संयोजित होता है तो आपको निम्नलिखित तालिका की सहायता से CI ज्ञात करने के लिए नई दर और समय ज्ञात करना होगा:

	Rate	Time (n)
Annually/वार्षिक	r%	t years
Half-yearly/अर्धवार्षिक	$\frac{r}{2}$%	t × 2 years
Quarterly/त्रैमासिक	$\frac{r}{4}$%	t × 4 years
Monthly/महीने के	$\frac{r}{12}$%	t × 12 years

There are various ways to find compound interest

- Using Basic Formula
- Using Tree Method
- Using Ratio Method
- Using Successive Method

Note: Basic Formulae को (याद रखना) आवश्यक है, परन्तु प्रश्नों को Solve करने में इसका प्रयोग हम बहुत कम करते है। Tree Method तथा Ratio Method का प्रयोग सामान्यत: तब करते है जब दी गई ब्याज दर (Rate) को Fraction में Convert करना आसान हो जैसे, 5%, 10%, 15%, 20%, 25%, 30% अथवा

$8\frac{1}{3}\%, 12\frac{1}{2}\%, 14\frac{2}{7}\%, 16\frac{2}{3}\%$ etc.

जबकि Successive Method का प्रयोग तब करते है जहाँ Rate% को Fraction में Convert करना मुश्किल होता है जैसे, 3%, 6%, 7%, 9%, 13%, 18% etc.

ध्यान रहें:- कि प्रथम वर्ष के लिए साधारण तथा चक्रवृद्धि ब्याज समान रहता है।

Table for successive percentage
क्रमागत प्रतिशत के लिए सारणी

Remember the following table for finding solutions quickly

उत्तर शीघ्रता से निकालने के लिए निम्नलिखित तालिका को याद रखें

Table 01: For 2 cycles/years

Rate	CI	CI – SI
5%	10.25%	0.25%
10%	21%	1%
15%	32.25%	2.25%
20%	44%	4%
25%	56.25%	6.25%
30%	69%	9%

Table 02: For 3 cycles/years

Rate	CI	CI – SI
5%	15.76%	0.76%
10%	33.10%	3.10%
15%	52.09%	7.09%
20%	72.80%	12.80%
25%	95.31%	20.31%
30%	119.70%	29.70%

@Baka_260

How to calculate successive percentage increment faster.
क्रमागत प्रतिशत वृद्धि की गणना जल्दी कैसे करें।

For 2 year cycle = $a + b + \frac{ab}{100}$

If a = b then, $2a + \frac{a^2}{100}$

So, whenever we have to find successive percentage increment of same value –

Step I : Double the value

Step II : Square the value, put decimal after two digits from the right & add it to the result of step I.

Ex. 2% & 2%

Step I = $2 \times 2 = 4$

Step II = $2^2 = 4 \rightarrow 0.04$

Now, $4 + 0.04 = 4.04$

Ex. 5% & 5%

Step I = $2 \times 5 = 10$

Step II = $5^2 = 25 \rightarrow 0.25$

Now, $10 + 0.25 = 10.25$

Ex. 10% & 10%

Step I = $2 \times 10 = 20$

Step II = $10^2 = 100 \rightarrow 1.00$

Now, $20 + 1.00 = 21$

For 3 Cycle, $a + b + c + \frac{(ab + bc + ca)}{100} + \frac{abc}{1000}$

If a = b = c then, $3a + \frac{3a^2}{100} + \frac{a^3}{1000} = 3a|3a^2|a^3$

Ex. 2%, 2% & 2%

$= 3 \times 2|3 \times 2^2|2^3 = 6.1208$

Ex. 3%, 3% & 3%

$= 3 \times 3|3 \times 3^2|3^3 = 9.2727$

Ex. 5%, 5% & 5%

$= 3 \times 5|3 \times 5^2|5^3 = 15|75|125 = 15.7625$

Ex. 6%, 6% & 6% = $18|108|216 = 19.1016$

Ex. 8%, 8% & 8% = $24|192|512 = 25.9712$

For 02 Cycle/years

Ex. A sum of Rs 2500 is invested at 20% per annum compound interest (compounded annually) for 2 years. find-
2500 रुपये की एक राशि को 2 वर्षों के लिए 20% प्रति वर्ष चक्रवृद्धि ब्याज (वार्षिक रूप से संयोजित) पर निवेश किया जाता है। ज्ञात कीजिए।

(i) Compound interest/चक्रवृद्धि ब्याज

(ii) Amount/मिश्रधन

(iii) Difference of CI & SI/चक्रवृद्धि और साधारण ब्याज का अंतर

(iv) 2nd year CI/दूसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज

HINTS:

Method-01: (Successive Method)

Equivalent successive % change for 2 cycle of 20% = 44%

We have principal 100% = 2500

(i) $\therefore$ CI = $2500 \times \frac{44}{100}$ = Rs. 1100

(ii) Amount = 144%

$= 2500 \times \frac{144}{100} = 3600$

(iii) Rate of SI for 2 year = 40%

Difference = 44 – 40 = 4%

$= 2500 \times \frac{4}{100} = 100$

(iv) 2nd year CI = 20 + 4 = 24%

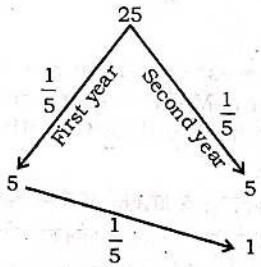
$= 2500 \times \frac{24}{100} = 600$

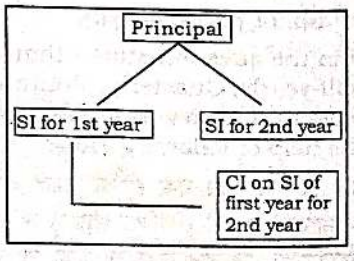
Method-02 (Tree Method)

We have, 20% = $\frac{1}{5}$

For 2 cycle, let $(5)^2 = 25$ as principal

Now,





Let's understand,

2 year CI = 5 + 5 + 1 = 11

Here We have, 25 unit = Rs. 2500

(i) $\therefore$ CI = 11unit = $\frac{2500}{25} \times 11$ = Rs.1100

(ii) Amount after 2 year = P + CI = 25 + 11 = 36 unit

$= \frac{2500}{25} \times 36 = 3600$ or A = P + CI = 2500 + 1100 = 3600

@Baka_260

(iii) 2 year difference in SI and CI = 11 – 10 = 1 unit

$= \frac{2500}{25} \times 1 = 100$

(iv) 2nd year CI = 5 + 1 = 6 unit

$= \frac{2500}{25} \times 6 = 600$

Method-03: (Ratio Method)

$20\% = \frac{1}{5}$

Principal		Amount
5		6
$(5)^2$	For 2 cycle	$(6)^2$
25		36

A – P = 36 – 25 = 11

Which is CI.

We have, 25 unit = 2500

(i) CI = 11 unit = 1100

(ii) Amount = 36 unit = 3600

(iii) Difference of CI and SI for 2 cycle/years can be found by using direct formula = $P\left(\frac{R}{100}\right)^2$

Difference = $2500 \times \frac{20 \times 20}{100 \times 100} = 100$

Ex. On what amount, the interest compounded semi-annually at 12% per annum for one year is ₹ 1545?

किस राशि पर एक वर्ष के लिए 12% प्रति वर्ष की दर से अर्द्धवार्षिक संयोजित चक्रवृद्धि ब्याज ₹1545 है?

HINTS:

CI = 1548 R = 12% per annum

T = 1 year = 12 months

Since interest is compounded annually

$\therefore T' = \frac{12}{6} = 2$ & $R' = \frac{12}{12} \times 6 = 6\%$

(Successive Method)

Equivalent successive percentage for 2 cycle of 6% = 12.36%

We have CI = 12.36% = 1545

$\therefore$ Principal = 100% = $\frac{1545 \times 100}{12.36} = 12{,}500$

Ex. A certain amount of money was lent for a period of 1 year 9 months at a rate of 10% per annum compounded annually. If the compound interest is Rs 1480, find the amount of money lent.

एक निश्चित राशि 1 वर्ष 9 महीने की अवधि के लिए 10% प्रति वर्ष की दर से उधार दी गई थी, जो वार्षिक रूप से संयोजित होती है। यदि चक्रवृद्धि ब्याज 1480 रुपये है, तो उधार दी गई धनराशि ज्ञात करें।

HINTS:

Rate of interest for 1st year = 10%

Rate of interest for remaining 9 months

$= \frac{10 \times 9}{12} = 7.5\%$

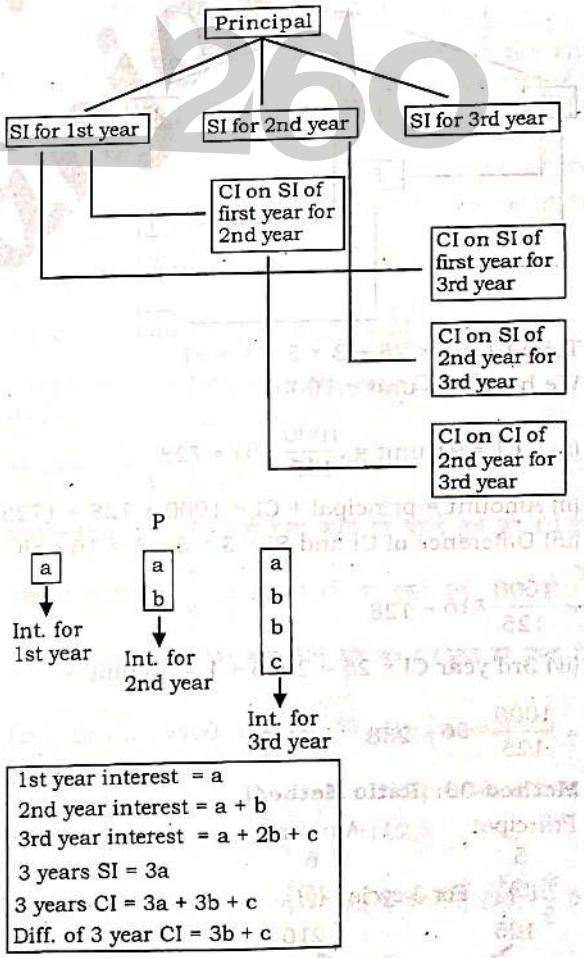
Equivalant rate of interest for 1 year 9 months

$= 10 + 7.5 + \frac{10 \times 7.5}{100} = 17.75 + 0.75 = 18.50\%$

$\therefore$ Principal = $\frac{1480}{18.50} \times 100 = 8000$

For 03 Cycle/years

Tree Method - (Solution Structure)



1st year interest = a
2nd year interest = a + b
3rd year interest = a + 2b + c
3 years SI = 3a
3 years CI = 3a + 3b + c
Diff. of 3 year CI = 3b + c

Ex A sum of Rs 1000 is invested at 20% per annum compound interest (compounded annually) for 3 years. find:

@Baka_260

1000 रुपये की एक राशि को 3 वर्षों के लिए 20% प्रति वर्ष चक्रवृद्धि ब्याज (वार्षिक रूप से संयोजित) पर निवेश किया जाता है। ज्ञात कीजिए।

(i) Compound interest/चक्रवृद्धि ब्याज

(ii) Amount/मिश्रधन

(iii) Difference of CI & SI/चक्रवृद्धि और साधारण ब्याज का अंतर

(iv) 3rd year CI/तीसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज

HINTS:

Method-01: (Successive Method)

Equivalent successive% change for 3 cycle of 20% = 72.8%

(i) We have principal 100% = 1000

$\therefore$ CI = 72.8% = 728

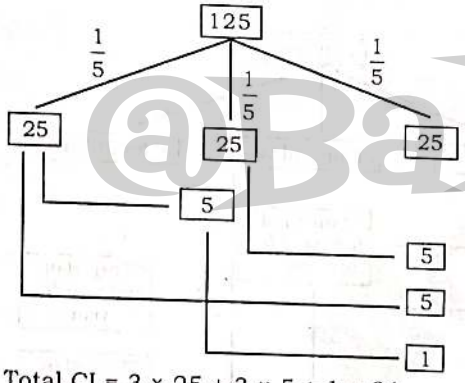
(ii) Amount = 172.8% = 1728

(iii) Difference = 72.8 – 60 = 12.8% = 128

Method-02: (Tree Method)

$R = 20\% = \frac{1}{5}$

For 3 cycle let $(5)^3 = 125$ as principal



Total CI = 3 × 25 + 3 × 5 + 1 = 91

We have 125 unit = 1000

(i) $\therefore$ CI = 91 unit = $\frac{1000}{125} \times 91 = 728$

(ii) Amount = principal + CI = 1000 + 728 = 1728

(iii) Difference of CI and SI = 3 × 5 + 1 = 16 unit

$= \frac{1000}{125} \times 16 = 128$

(iv) 3rd year CI = 25 + 2 × 5 + 1 = 36 unit

$= \frac{1000}{125} \times 36 = 288$

Method-03: (Ratio Method)

Principal		Amount
5		6
$(5)^3$	For 3 cycle	$(6)^3$
125		216

A – P = 216 – 125 = 91

We have, CI = 91 units

Principal = 125 unit = 1000

(i) $\therefore$ CI = 91 × 8 = 728

(ii) A = 216 unit = 216 × 8 = 1728

3 वर्षों के लिए Ratio Method से difference & 3rd year CI निकालना confusing हो सकता है।

(iii) Difference of CI and SI for 3 cycle/years can be found by using direct formula = $P\left(\frac{R}{100}\right)^2\left(\frac{300+R}{100}\right)$

Difference = $1000 \times \frac{20 \times 20}{100 \times 100} \times \frac{320}{100} = 128$

Ex. What is the difference between the compound interest, when interest is compounded 5-monthly, and the simple interest on a sum of ₹ 12,000 for $1\frac{1}{4}$ years at 12% per annum?

₹12000 की राशि पर 12% की दर से $1\frac{1}{4}$ वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज (5 माह की चक्रवृद्धि) तथा साधारण ब्याज में अंतर ज्ञात करें।

HINTS:

P = 12000

$T = 1\frac{1}{4}$ year = 15 months, R = 12% per annum

Since interest compounded 5-monthly

$\therefore T' = \frac{15}{5} = 3$ & $R' = \frac{12}{12} \times 5 = 5\%$

Method-01: (Direct Formula)

$D = P\left(\frac{R}{100}\right)^2\left(\frac{300+R}{100}\right)$

$D = 12000 \times \frac{25}{100 \times 100} \times \frac{305}{100} = 91.50$

Method-02: (Successive Method)

Equivalent successive percentage for 3 cycle of 5% = 15.7625

D = 15.7625 – 15 = 0.7625

We have, 100% = 12000

$D = 0.7625 = \frac{12000}{100} \times 0.7625 = 91.5$

Ex. The compound interest on a sum of ₹ 20,000 at 15% p.a. for $2\frac{2}{3}$ years, interest compounded yearly is :

$2\frac{2}{3}$ वर्षों के लिए ₹20,000 पर 15% की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज का संयोजन वार्षिक है।

HINTS:

P = 20000

$T = 2\frac{2}{3}$ year, R = 15% per annum

Since interest compounded annually

@Baka_260

∴ Rate of interest for first 2 complete years = 15%

& Rate of interest for remaining $\frac{2}{3}$ year = $15 \times \frac{2}{3} = 10\%$

Method-01: (Ratio Method)

P	A
20	23
20	23
10	11
4000	5819

A – P = 5819 – 4000 = 1819

We have, 4000 unit = 20,000

∴ CI = 1819 unit = 1819 × 5 = Rs. 9095

Note: Wherever, we have the different rates of interest for different year it is better to apply ratio method.

Method-02 (Successive Method)

Equivalent Successive percentage for 2 cycle of 15% = 32.25%

Again, equivalent successive percentage of 32.25 & 10.

$$32.25 + 10 + \frac{32.25 \times 10}{100}$$

= 42.25 + 3.225 = 45.475%

We have, Principal 100% = 20,000

= 45.475 × 200

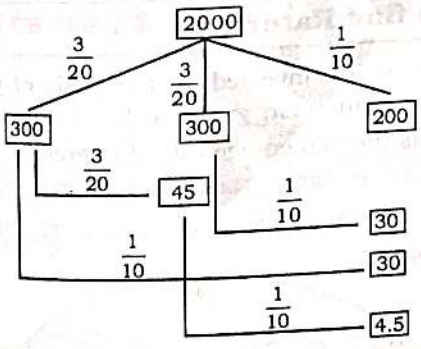
= Rs. 9095

Method-03 (Tree Method)

We have, R = 15% = $\frac{3}{20}$ for 2 years & 10% = $\frac{1}{10}$

for $\frac{2}{3}$ year.

Let principal



CI = 909.5 units

We have, 2000 unit = 20,000

∴ CI = 9095

An Important Concept/महत्वपूर्ण अवधारणा

Amount & CI_1, CI_2, CI_3 and so on will be in Geometric Progression(GP).

Let's Observe the following Example,

Assume, Principle = Rs.10000, Rate = 10%

and T = 3 Years

R = 10% = $\frac{1}{10}$ Multiplying Factor = $\frac{11}{10}$ or 1.1

P	A_1	A_2	A_3
10000	11000	12100	13310
	×1.1	×1.1	×1.1

CI_1	CI_2	CI_3
1000	1100	1210
	×1.1	×1.1

Note: हम किसी भी दो amount अथवा CI के Ratio को लेकर Rate अथवा Principal ज्ञात कर सकते है।

Ex. 2nd year CI = 100, 3rd year CI = 110 find R = ?

HINTS:

100 : 110

Simplified form 10 : 11

$R = \frac{1}{10} \times 100 = 10\%$

Ex. Compound interest on a certain sum at the end of fourth year is Rs 625. Find the CI at the end of fifth year, If the rate of interest(compounded annually) is 8% pa.

चौथे वर्ष के अंत में एक निश्चित राशि पर चक्रवृद्धि ब्याज 625 रुपये है। पांचवें वर्ष के अंत में चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें, यदि ब्याज की दर (वार्षिक रूप से संयोजित) 8% प्रति वर्ष है।

HINTS:

C.I at the end of 5th year = $625 \times \frac{27}{25}$ = Rs 675

Ex. P = 25600, R = 25% find 4th year CI = ?

HINTS:

$25600 \times \frac{1}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = 12,500$

Note: Principal में $\frac{1}{4}$ से गुणा करने पर पहले वर्ष का CI ज्ञात हो जाता है तद्पश्चात $\frac{5}{4}$ से गुणा करने पर दूसरे वर्ष, फिर से $\frac{5}{4}$ तथा $\frac{5}{4}$ से गुणा करने पर तीसरे तथा चौथे वर्ष का CI ज्ञात हो जाता है।

Ex. 1st year CI = 6400, R = $12\frac{1}{2}\%$, 4th year CI = ?

HINTS:

$6400 \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} = \frac{72900}{8} = 9112.5$

Note: क्योंकि 6400 प्रथम वर्ष का CI है इसलिए इसमें $\frac{9}{8}$ से गुणा करने पर दूसरे वर्ष तथा फिर से $\frac{9}{8}$ और $\frac{9}{8}$ से गुणा करने पर क्रमशः तीसरे और चौथे वर्ष का CI ज्ञात हो जाता है।

@Baka_200

Ex. 3rd year CI = 1,25,000, R = 25%, 1st year CI = ?
HINTS:

$x \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = 125000 \Rightarrow x = 80{,}000$

Ex. P = 1000, R = 10%, 4th year CI – 3rd year CI = ?
HINTS:

$= 1000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{1}{10} = 121$

Note: 4th year CI – 3rd year CI =

$1000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} - 1000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$

$= 1000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}\left(\frac{11}{10} - 1\right)$

$= 1000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{1}{10}$

ऊपर लिखे हुए सारे Steps न करके Direct final Result लिखने के लिए जिन दो सालो का difference पूछा हो उसमें से कम वाले साल तक का CI ज्ञात करके $\frac{11}{10}$ = $\frac{1}{10}$ से गुणा कर देते है।

Ex. A sum of Rs. 4,000 is lent at 10% p.a., interest compounded annually. What is the difference between the compound interest for the 2nd year and the 3rd year?
10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर रु. 4,000 की राशि उधार दी जाती है और ब्याज वार्षिक संयोजित होता है। दूसरे और तीसरे वर्ष में प्राप्त चक्रवृद्धि ब्याज के बीच अंतर ज्ञात करें।
HINTS:
P = 4000, R = 10%
3rd CI – 2rd CI = ?

$= 4000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{1}{10} = 44$

Note: Principal 4000 में $\frac{1}{10}$ से multiply करने पर 1st year का CI ज्ञात हो जाता है, दूसरे वर्ष की CI ज्ञात करने के लिए इसमें $\frac{11}{10}$ से गुणा करते है। तीसरे साल की CI का दूसरे साल की CI से अंतर ज्ञात करने के लिए इसमें $\frac{11}{10}$ = $\frac{1}{10}$ से गुणा करते है।

Ex. A sum of ₹18000 is lent at 10% p.a. compound interest, compounded annually. What is the difference between the compound interest for 3rd year and 4th year?
₹ 18000 की राशि 10% प्रति वर्ष वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार दी जाती है। तीसरे और चौथे वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज में अंतर ज्ञात करें।
HINTS:
4th year CI – 3th year CI

$= 18000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{198 \times 11}{10} = 217.8$

Ex. If the compound interest in the third year at 8% p.a. on a certain sum is ₹ 3600, then what is the difference between the compound interest in the 4th and 5th year? (nearest to an integer in ₹)
यदि किसी राशि पर 8% प्रति वर्ष की दर से तीसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ₹3600 है, तो चौथे और पाँचवें वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज के बीच अंतर ज्ञात करें। (किसी पूर्णांक के निकटतम रुपये में)
HINTS:

5th year CI – 4th year CI = $3600 \times \frac{27}{25} \times \frac{2}{25} = 311.04$

How to find time? / समय कैसे ज्ञात करें?

Ex. In how many years will a sum of ₹ 320 amount to ₹ 405 if interest is compounded at 12.5% per annum?
कितने वर्षों में ₹320 राशि बढ़कर ₹405 हो जाएगी अगर ब्याज प्रति वर्ष 12.5% पर चक्रवृद्धि है?
HINTS:

Principal	Amount
320	405

Simplified form

64	81

Which is a perfect square. Square root

8	9

∴ T = 2 year

Ex. The compound interest on ₹4,000 at the rate of 5% p.a. is ₹ 630.50, then the time period is :
यदि ₹4000 पर 5% प्रति वर्ष की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ₹630.50 है, तो समय अवधि कितनी है?
HINTS:

Principal	Amount
40000	46305

Simplified form

8000	9261

Cube root

20	21

∴ T = 3 year

Note: यदि principal तथा amount का simplified ratio perfect square हो तो समय 2 वर्ष (चक्र) तथा perfect cube हो तो समय 3 वर्ष (चक्र) होता है।

How to find Rate? / दर कैसे ज्ञात करें?

Ex. A sum of Rs. 6,400 invested on the basis of yearly compounding of interest, grows to Rs. 7,056 in two years. What is the percentage rate of interest?
रु. 6,400 की राशि का वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज के आधार पर निवेश किया गया और यह राशि दो वर्षों में रु. 7,056 हो गई। ब्याज की प्रतिशत दर कितनी थी?
HINTS:

P		A
6400	:	7056

Simplified form

400	:	441

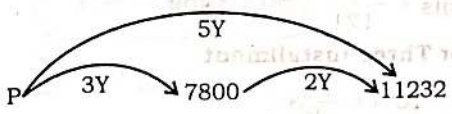
for 2 years, take square root

20	:	21

Rate of interest = $\frac{1}{20} \times 100 = 5\%$

Ex. A sum invested at compound interest amounts to Rs. 7,800 in 3 years and Rs. 11,232 in 5 years. What is the rate percent?
चक्रवृद्धि ब्याज पर निवेश की गई एक राशि पर 3 वर्षों में प्राप्त मिश्रधन ₹7,800 और 5 वर्षों में प्राप्त मिश्रधन ₹11,232 है। प्रतिशत ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

HINTS:



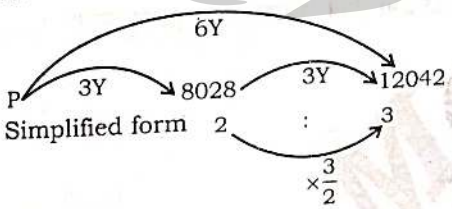
Simplified form 100 : 144
for 2 year, take square root
10 : 12

Rate of interest = $\frac{2}{10} \times 100 = 20\%$

How to find Principal? / मूलधन कैसे ज्ञात करें?

Ex. A sum amounts to ₹8,028 in 3 years and to ₹12,042 in 6 years at a certain rate percent per annum, when the interest is compounded yearly. The sum is:
कोई राशि ब्याज की वार्षिक चक्रवृद्धि पर प्रति वर्ष एक निश्चित दर से 3 वर्षों में ₹8028 रूपये तथा 6 वर्षों में ₹12042 हो जाती है। यह राशि है:

HINTS:

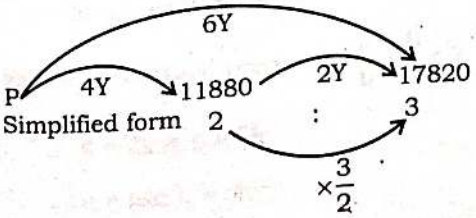


Since in 3Y amount becomes $\frac{3}{2}$ times of itself.

$\Rightarrow P \times \frac{3}{2} = 8028 \Rightarrow P = 5352$

Ex. A sum of money becomes Rs 11,880 after 4 years and Rs 17,820 after 6 years on compound interest, the interest is compounded annually. What is the half of the sum (in Rs) ?
एक धनराशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 4 वर्ष बाद 11,880 रुपये और 6 वर्ष बाद 17,820 रुपये हो जाती है, ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है। धनराशि का आधा (रुपये में) क्या है?

HINTS:



Since in 2Y amount becomes $\frac{3}{2}$ times of itself.

$\Rightarrow P \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 11880 \Rightarrow P = 5280$

Important Result (महत्वपूर्ण परिणाम)

A certain sum becomes x times in n_1 year and y times in n_2 years when rate of interest is compounded, then

$x^{\frac{1}{n_1}} = y^{\frac{1}{n_2}}$

जब ब्याज दर संयोजित होती है तो एक निश्चित राशि n_1 वर्ष में x गुना और n_2 वर्ष में y गुना हो जाती है, तो $x^{\frac{1}{n_1}} = y^{\frac{1}{n_2}}$

Ex. A sum of money becomes 3 times in 10 years at the rate of compound interest (compounded annually), In how many years will it become 243 times?
कोई राशि चक्रवृद्धि ब्याज (वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज) की दर से 10 वर्षों में तिगुनी हो जाती है। यह कितने वर्षों में 243 गुना हो जाएगी?

HINTS:

Method-01:

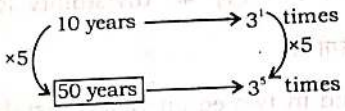
Using formula,

$n_1 = 10, x = 3, y = 243, n_2 = ?$

$\Rightarrow 3^{\frac{1}{10}} = 3^{\frac{5}{n_2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{5}{n_2} \Rightarrow n_2 = 50$

Method-02:



Note: Step1- Times (गुना) वाले को Power में बदलो
Step2- Power में जितने का Multiplication होगा समय में भी उतने का गुणा करेंगे।

Installment (किश्त)

One of the Regular payments that you make for something until you have paid the full amount.
भुगतान की कुल राशि को नियमित रूप से दिया जाने वाला अंश ही किस्त कहलाता है।

Compound Interst की Installment से संबंधित अवधारणाओं को एक Scenario के माध्यम से समझते हैं

For two Installments

Let, R = 10% = $\frac{1}{10}$ +

$10^1 : 11^1$] Value of each installment
$10^2 : 11^2$]

To make each installment equal, multiply first ratio by 11.

$10_{\times 11}$: $11_{\times 11}$] Value of each installment
100 : 121]
210 : 242
(Principal) (Amount)

Amount – Principal = Interest = 32

Ex. A sum of Rs. 4,620 is to be paid back in 2 equal annual installment. How much is each installment (in Rs.) if the interest is compounded annually at 10% per annum?

रु. 4,620 की राशि 2 बराबर वार्षिक किश्तों में वापस भुगतान की जाती है। यदि ब्याज दर वार्षिक दर से चक्रवृद्धि होने वाली 10% वार्षिक है तो प्रत्येक किश्त (रु. में) कितनी होगी?

HINTS:

R = 10% = $\frac{1}{10}$+

$10_{\times 10}$: $11_{\times 11}$
100 : 121
210 : 242

Here, we have principal, 210 unit = 4620

∴ Value of each installment, 121 unit

$= \frac{4620}{210} \times 121 = 2662$

Note: इस प्रकार के प्रश्नों में यदि Installment की value पूछी गई हो, तो दिये गये Rate% को fraction में convert करके denominator को Nemerator में add करने पर प्राप्त संख्या (10% = $\frac{1}{10} \Rightarrow 10 + 1 = 11$) की divisibility दिये गये options में check करते हैं।

Ex. Loan is to be repaid in two equal yearly instalment. If the rate of interest is 10% per annum, compounded annually, and each installment is Rs. 6,897, then find the total interest charged.

एक ऋण को दो समान वार्षिक किस्तों में चुकाया जाना है। यदि ब्याज की दर 10% वार्षिक है, जो वार्षिक रूप से चक्रवृद्धि होती है और प्रत्येक किस्त रु. 6,897 की है, तो लिया जाने वाला कुल ब्याज ज्ञात कीजिए।

HINTS:

We have, R = 10% = $\frac{1}{10}$+

$10_{\times 10}$: $11_{\times 11}$
100 : 121
210 : 242

Here, we have value of each installment
i.e., 121 units = 6897
∴ Insterest = Amount – Principal = 242 – 210 = 32
units = $\frac{6897}{121} \times 32 = 1824$

For Three Installment

R = 10% = $\frac{1}{10}$+

$10^1_{\times 11 \times 11}$: $11^1_{\times 11 \times 11}$] Value of each installment
$10^2_{\times 11}$: $11^2_{\times 11}$]
10^3 : 11^3]
3310 : 3993
(Principal) (Amount)

Amount – Principal = Interest = 683

Ex. What annual payment (in ₹) will discharge a debt of ₹15,240 due in 3 years at $16\frac{2}{3}$% per annum compound interest?

कितना वार्षिक भुगतान (रुपये में) $16\frac{2}{3}$% प्रति वर्ष चक्रवृद्धि ब्याज पर 3 वर्षों में देय 15,240 रुपये के ऋण का भुगतान करेगा?

HINTS:

R = $16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$

$6_{\times 49}$: $7_{\times 49}$
$36_{\times 7}$: $49_{\times 7}$
216 : 343
762 : 1029

We have, Principal i.e., 762 units = 15240
∴ Value of each installment

i.e., 343 units = $\frac{15240}{762} \times 343 = 6860$

☆☆☆☆☆

RATIO & PROPORTION

अनुपात और समानुपात

17

Ratio/अनुपात

$\frac{a}{b}$ is the ratio of a to b is written as a:b and read "a is to b". Where 'a' is called the 'antecedent' and 'b' is called the 'consequent'.

a तथा b का अनुपात $\frac{a}{b}$ है जिसे a : b लिखते है तथा a अनुपात b पढ़ते है जहाँ a को पूर्ववर्ती तथा b को परिणामी कहा जाता है।

Condition:/शर्त

❖ (i) If ad = bc then $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(ii) If ad > bc then $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

(iii) ad < bc If $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

❖ If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ then

(a) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

(b) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

(c) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(d) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

(e) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-a}$

(f) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$

$\therefore a = bk, c = dk$ (k method)

(g) For continued proportion $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$

$\therefore b = ck$ & $a = bk$

$\therefore a = (ck)\,k = ck^2$

CONCEPT-01

(Simple Ratio based/सरल अनुपात पर आधारित)

Ex. Which of the following ratios is the smallest?
3 : 4, 1 : 2 , 2 : 5, 1 : 3
निम्नलिखित में से कौन-सा अनुपात सबसे छोटा है?
3 : 4, 1 : 2 , 2 : 5, 1 : 3
HINTS:

$\frac{300}{4}=75 \Rightarrow \frac{100}{2}=50 \Rightarrow \frac{200}{5}=40$

$\frac{100}{3}=33.33$ Smallest

Ex. If a : b = 2 : 3 and b : c = 6 : 8, then find a : b : c.
यदि a : b = 2 : 3 और b : c = 6 : 8 है, तो a : b : c ज्ञात करें।
HINTS:

a : b : c

2 : 3 :

6 : 8

12 : 18 : 24

2 : 3 : 4

Ex. If a : b = 2 : 3, b : c = 4 : 5 and c : d = 6 : 7. Find a : b : c : d.
यदि a : b = 2 : 3, b : c = 4 : 5 और c : d = 6 : 7 है, तो a : b : c : d का मान ज्ञात कीजिए।
HINTS:

a : b : c : d

2 : 3 :

4 : 5

8 : 12 : 15

6 : 7

16 : 24 : 30 : 35

@Baka_260

CONCEPT-02

(Number Based/संख्या आधारित)

Ex. Three numbers are in the ratio of $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$. The difference between the greatest and the smallest number is 27. The smallest numbers is :

तीन संख्याएँ $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$ के अनुपात में है तो सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्या के बीच का अंतर 27 है। सबसे छोटी संख्या है-

HINTS:

L.C.M (2, 3, 4) = 12

$\frac{1}{2}\times12:\frac{2}{3}\times12:\frac{3}{4}\times12$

6 : 8 : 9

Smallest number

$\frac{27}{3}\times6=54$

Ex. A, B and C divide an amount of Rs 10,500 amongst themselves in the ratio 5 : 7 : 9, respectively. If each one gets Rs 500 more, then what will be the ratio of the amounts with A, B and C?

A, B और C तीनों रु. 10,500 की राशि को आपस में क्रमशः 5:7:9 के अनुपात में विभाजित करते हैं। यदि प्रत्येक को रु. 500 अधिक मिलते है, तो A, B और C की राशियों का अनुपात क्या होगा?

HINTS:

Share of, A : B : C

5 : 7 : 9

+1 +1 +1

Each gets Rs.500 more so their new ratio will increase by one then,

Required ratio

6 8 : 10

3 : 4 : 5

2. By mistake, instead of dividing Rs.702 among Ram, Ramesh, and Naresh in the ratio $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{6}$, it was divided in the ratio of 3 : 4 : 6. Who gained the most and by how much?

702 रुपये को राम, रमेश और नरेश के बीच गलती से $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{6}$ के अनुपात में विभाजित करने के बजाय, इसे 3 : 4 : 6 के अनुपात में विभाजित कर दिया गया था। सबसे अधिक किसने और कितना लाभ प्राप्त किया?

HINTS:

	Ram	Ramesh	Naresh
Mistaken	3	4	6
Actual	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$\Rightarrow$	4	3	2

Clearly, Naresh gained the most his Actual portion

$=\frac{2}{9}\times702=156.$

Mistaken portion

$=\frac{6}{13}\times702=324 \Rightarrow 324-156=168$

CONCEPT-03

(Based on Coins/सिक्कों पर आधारित)

Ex. In one bag 50 paisa, 25 paisa and 1 rupee coins are in the ratio of 5 : 8 : 1. If the total cost of all the coins is Rs.55 then how many coins of 25 paisa are in the bag?

एक बैग में 50 पैसे, 25 पैसे और 1 रुपये के सिक्के 5 : 8 : 1 के अनुपात में है। यदि सभी सिक्कों की कुल कीमत 55 रुपये है, तो बैग में 25 पैसे के कितने सिक्के हैं?

HINTS:

Value $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:1$

No:- 5 : 8 : 1

(Rs.)Total:- $\frac{5}{2}:2:1$

Given, $\frac{11}{2}$unit = 55

$\therefore$ 1unit = 10

Required value = 10× 8 = 80

Ex. In a bag there are coins of Rs.5, Rs.10 and Rs.20 denominations. The total number of coins in the bag is 240. If the number of coins of Rs.5, Rs.10 and Rs.20 denominations are in the ratio of 2 : 3 : 5, then what is the total amount of money in the bag?

एक बैग में 5 रूपये, 10 रूपये और 20 रूपये मूल्यवर्ग के सिक्के हैं। बैग में सिक्कों की कुल संख्या 240 है। यदि 5 रूपये, 10 रूपये और 20 रूपये मूल्यवर्ग के सिक्कों की संख्या 2 : 3 : 5 के अनुपात में है, तो बैग में कुल कितना धनराशि है?

HINTS:

Value Ratio = 5 : 10 : 20

Coins Ratio = 2 : 3 : 5

Given that,

Total coins = 10 unit = 240

Then,

Total money = 5 × 48 , 10 × 72 , 120 × 20

= 240+ 720 + 2400

= Rs. 3360

CONCEPT-04

(Based on Addition or subtraction)

(जोड़ या घटाव पर आधारित)

Ex. Two numbers are in the ratio 3 : 4. On increasing each of them by 30, the ratio becomes 9:10. The numbers are.

दो संख्याएँ 3 : 4 के अनुपात में है। उनमें से प्रत्येक को 30 से बढ़ाने पर अनुपात 9 : 10 हो जाता है। संख्याएँ हैं:

HINTS:

$\left.\begin{matrix}3 : 4\\9 : 10\end{matrix}\right\rangle$ 6unit $\rightarrow 30$

1unit = 5

then,

Required no. = 15, 20

Ex. The ratio in the number of students in three classes is 3 : 4 : 5. If 20 students are increased in every class, then this ratio becomes 4 : 5 : 6. What was the original number of students in these classes taken together?

तीन कक्षाओं में छात्रों की संख्या का अनुपात 3 : 4 : 5 है। यदि प्रत्येक कक्षा में 20 विद्यार्थी बढ़ा दिए जाएं तो यह अनुपात 4 : 5 : 6 हो जाता है। इन कक्षाओं में कुल मिलाकर विद्यार्थियों की मूल संख्या कितनी थी?

HINTS:

Initial 3 : 4 : 5

+20 ↓ +20 ↓ +20 ↓

Final 4 : 5 : 6

1 unit = 20

∴ 12 unit = 12 × 20 = 240

Number of students initially = 240

18. The number of students in three sections of Grade 10 in a school are in the proportion 3 : 5 : 8. If 15, 30 and 15 more students are admitted in the three sections, respectively, the new proportion becomes 4 : 7 : 9. The total number of students before the new admissions is:

किसी विद्यालय में कक्षा 10 के तीन सेक्शन में छात्रों की संख्या का अनुपात 3 : 5 : 8 है। यदि तीनों सेक्शन में क्रमशः 15, 30 और 15 अधिक छात्र दाखिल होते हैं, तो नया अनुपात 4 : 7 : 9 हो जाता है। नए दाखिले से पहले छात्रों की कुल संख्या ज्ञात करें।

HINTS:

3 : 5 : 8 ⟶ 16 × 15 = 240

+15 ↓ +30 ↓ +15 ↓

4 : 7 : 9

CONCEPT-05

(Income & Expenditure Based)

(आय और व्यय पर आधारित)

Ex. The ratio of the monthly incomes of A and B is 11 : 13 and the ratio of their expenditures is 9:11. If both of them manage to save Rs. 4000 per month, then find the difference in their income (in Rs.)

A और B की मासिक आय का अनुपात 11:13 है और उनके व्यय का अनुपात 9:11 है। यदि वे दोनों प्रतिमाह 4000 रूपये की बचत करते हैं, तो उनकी आय (रूपये में) का अंतर ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Income Ratio 11 : 13

Exp Ratio 9 : 11

Savings 4000 4000

Then,

(121 – 117)unit = 44000 – 36000

4 unit = 8000

Required difference = 2 × 2000 = 4000

Ex. The income of A and B are in the ratio 5 : 3. The expenses of A, B and C are in the ratio 8 : 5 : 2. If C spends Rs.2000 and B saves Rs.700, then A saves.

A और B की आय 5 : 3 के अनुपात में है। A, B और C का व्यय 8 : 5 : 2 के अनुपात में है। यदि C, 2000 रुपये खर्च करता है और B, 700 रुपये बचाता है, तो A की बचत क्या होगी?

HINTS:

Income Ratio = A : B

5 : 3

Exp Ratio = A : B : C

8 : 5 : 2

Given that

C's Exp = 2000

Then,

B's Income = 5700

Then, A's saving = 9500 – 8000 = Rs.1500

Ex. The ratio of last year income of A, B and C is 3 : 4 : 5. While the ratio of their last year income to current year income is 4 : 5, 2 : 3 and 3 : 4. If their total current year income is Rs. 98,500, then find out the present income of (B + C).

A, B और C की पिछले वर्ष की आय का अनुपात 3 : 4 : 5 है, जबकि उनकी पिछले वर्ष की आय का वर्तमान वर्ष की आय से अनुपात क्रमशः 4 : 5, 2 : 3 और 3 : 4 है। यदि उनकी वर्तमान वर्ष की कुल आय 98,500 रुपये है तो (B + C) की वर्तमान आय ज्ञात करें।

HINTS:

Last year income Ratio of

A : B : C

3 : 4 : 5

present year income Ratio of

A : B : C

$\frac{15}{4} : 6 : \frac{20}{3}$

Given that

$\frac{197}{12}$unit = 98500

Then,

$\frac{38}{3}$unit = 76000

CONCEPT-06

(Age Based/ आयु पर आधारित)

Ex. Ratio of the present age of a mother to that of the daughter is 7 : 1. After 5 years the ratio will become 4 : 1. What is the difference (in years) in their present ages?

एक माँ और उसकी बेटी की वर्तमान आयु का अनुपात 7 : 1 है। 5 वर्ष बाद यह अनुपात 4 : 1 हो जाएगा। उनकी वर्तमान आयु में अंतर (वर्ष में) ज्ञात करें।

HINTS:

	M		D			
At present →	7	:	1		7	: 1
After 5 year →	$4_{\times 2}$	:	$1_{\times 2}$	⇒	8	: 2

∴ 1 unit = 5 year

Age Difference b/w M & D, 6 unit = 6 × 5 = 30 years.

Note: Attention, Difference in age will always be same (ध्यान रखें, उम्र में अंतर हमेशा एक समान रहेगा).

Ex. Eight year ago, the ratio of ages of A and B was 5 : 4. The ratio of their present ages is 6 : 5. What will be the sum (in years) of the ages of A and B after 7 years from now?

आठ वर्ष पहले, A और B की आयु का अनुपात 5 : 4 था। उनकी वर्तमान आयु का अनुपात 6 : 5 है। अब से 7 वर्ष बाद, A और B की आयु का योग (वर्षों में) कितना होगा?

HINTS:

	A		B
8 year before →	5	:	4
At present →	6	:	5

1 unit = 8 year

A's present age = 6 × 8 = 48 year

B's present age = 5 × 8 = 40 year

After 7 year,

Sum of age of A and B = (40 + 48) + 2×7 = 102 year

Ex. 5 years ago, the ratio of the age of A to that of B was 4:5. Five years hence, the ratio of the age of A to that of B will be 6:7. If, at present, C is 10 years younger than B, then what will be the ratio of the present age of A to that of C ?

5 वर्ष पहले, A की आयु और B की आयु का अनुपात 4:5 था। पांच वर्ष बाद, A की आयु और B की आयु का अनुपात 6:7 होगा। यदि, वर्तमान में, C, B से 10 वर्ष छोटा है, तो A की वर्तमान आयु और C की वर्तमान आयु का अनुपात क्या होगा?

HINTS:

	A		B
5 year ago →	4	:	5
5 year hence →	6	:	7

2 unit = 10 year

1 unit = 5 Year

Present age of A = 6 × 5 – 5 = 25 year

Present age of B = 7 × 5 – 5 = 30 year

Present Age of C = Present age of B – 10 Year

= 30 – 10 = 20 year

Ratio of Present age of A and B = 25 : 20 = 5 : 4

Ex. The ratio of the ages of A and B, 8 years ago, was 5 : 7. The ratio of their ages, 8 years from now, will be 9 : 11. If the present age of C is 13 years less than that of B, and the present age of D is 8 years less than that of the age of A, then the sum of the present ages of C and D, in years, is:

8 वर्ष पूर्व A और B की आयु का अनुपात 5:7 था। अब से 8 वर्ष बाद उनकी आयु का अनुपात 9:11 होगा। यदि C की वर्तमान आयु B की आयु से 13 वर्ष कम है, और D की वर्तमान आयु A की आयु से 8 वर्ष कम है, तो वर्षों में C और D की वर्तमान आयु का योग है:

HINTS:

	A		B
8 year ago →	5	:	7
8 year from now →	9	:	11

4 unit = 16 year

1 unit = 4 year

Present age of A = 5 × 4 + 8 = 28 year

Present age of B = 7 × 4 + 8 = 36 year

Present age of C = B's Present Age – 13 = 23 year

Present age of D = A's Present Age – 8 = 20 year

Sum of Age of C and D = 20 + 23 = 43 year.

☆☆☆☆☆

@Bakl_260

Proportion/समानुपात

When two ratio are equal, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, then a, b, c, d are said to be in proportion and a, b, c and d are said to be first, 2nd, 3rd and 4th proportion respectively.

जब दो अनुपात बराबर, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ हो तो a, b, c, d समानुपात में होते है तथा a, b, c और d को क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ अनुपात कहते है।

Case-1: When 3 numbers are given./जब 3 संख्याए दी गई है।

$x : a :: b : c$

First proportion/प्रथम अनुपात

$x : a :: b : c$

$$x=\frac{ab}{c}$$

Ex. The first proportional of three numbers 6, 12 and 24 is:

तीन संख्याएँ 6, 12 और 24 का प्रथम अनुपात क्या होगा?

HINTS:

First proportion/प्रथम अनुपात

$$=\frac{12\times 6}{24}=3$$

Second proportion/द्वितीय अनुपात

$a : x :: b : c$

$$x=\frac{ac}{b}$$

Ex. The second proportional of three numbers 28, 4 and 5 is :

तीन संख्याएँ 28, 4 और 5 का द्वितीय अनुपात क्या होगा?

HINTS:

Required proportion = $\frac{28\times 5}{4}=35$

Third proportion/तृतीय अनुपात

$a : b :: x : c$

$$x=\frac{ac}{b}$$

Ex. The third proportional of three numbers 2, 3 and 15 is :

तीन संख्याएँ 2, 3 और 15 का तृतीय अनुपात क्या होगा?

HINTS:

Required proportion = $\frac{15\times 2}{3}=10$

Fourth proportion/चतुर्थ अनुपात

$a : b :: c : x$

$$x=\frac{bc}{a}$$

Ex. The fourth proportion of 12, 14 and 24 is :

12, 14 और 24 का चतुर्थ अनुपात क्या है?

HINTS:

Required proportion = $\frac{14\times 24}{12}=28$

Case-2: When 2 numbers are given./जब 2 संख्याए दी गई है।

$a : b :: b : c$

First proportion/प्रथम अनुपात

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow a=\frac{b^2}{c}$$

Ex. The first proportional of two numbers 3 and 5 is :

दो संख्याएँ 3 और 5 का प्रथम अनुपात क्या होगा?

HINTS:

Required proportion = $\frac{9}{5}$

Mean proportion/मध्य अनुपात

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{ac}$$

Ex. Find the mean proportion of 3 and 27.

3 और 27 का मध्यानुपाती (mean proportion) ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Required Proportion = $\sqrt{3\times 27}=9$

Third proportion/तृतीय अनुपात

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow c=\frac{b^2}{a}$$

Ex. The third proportional to 81 and 27 is:

81 और 27 का तृतीयानुपाती (third proportional) क्या है?

HINTS:

Required proportion = $\frac{27\times 27}{81}=9$

@Baka_260

CONCEPT-01

(Proportion After addition)

(कुछ जोड़ने के बाद अनुपात)

Let x be a number which is added to a, b, c and d to make them proportional then

यदि x वह संख्या है जिसे a, b, c तथा d में जोड़ने से वे समानुपाती हो जाते है तो

$$\boxed{x = \frac{bc - ad}{(a+d)-(b+c)}}$$

Ex. What number must be added to each of the number 8, 13, 26 and 40 so that the number obtained in this order are in proportion?

किस संख्या को 8, 13, 26 और 40 में जोड़ा जाना चाहिए ताकि इस क्रम में प्राप्त संख्याएँ समानुपात में हो?

HINTS:

$$\text{Required No.} = \frac{13\times 26 - 8\times 40}{48-39} = 2$$

CONCEPT-02

(Proportion After Subtraction)

(कुछ घटाने के बाद अनुपात)

Let x be a number which is subtracted to a, b, c and d to make them proportional then

यदि x वह संख्या है जिसे a, b, c तथा d में घटाने से वे समानुपाती हो जाते है तो

$$\boxed{x = \frac{ad - bc}{(a+d)-(b+c)}}$$

Ex. If x is subtracted from each of 24, 40, 33 and 57, the numbers, so obtained are in proportion. The ratio of $(5x + 12)$ to $(4x + 15)$ is

24, 40, 33 और 57 में से प्रत्येक से x घटाने पर प्राप्त संख्याएं समानुपात में हैं। $(5x + 12)$ और $(4x + 15)$ का अनुपात ज्ञात करें।

HINTS:

$$\text{Required No.} = \frac{24\times 57 - 40\times 33}{81-73} = 6$$

Required Ratio = 14 : 13

☆☆☆☆☆

@Baka_260
Aditya Ranjan

PARTNERSHIP
साझेदारी
18

Partnership/साझेदारी

- **Simple partnership:** If all partners invest same capital for the different time or the different capital for the same time.

  यदि सभी साझेदार एक ही समय अवधि के लिए अलग-अलग पूंजी या अलग- अलग समय अवधि के लिए समान पूंजी का निवेश करते है तो उसे सरल साझेदारी कहा जाता है।

- **Compound partnership:** If all partners invest their different capital for the different time period.

  यदि सभी साझेदार अपनी अलग-अलग पूंजी को अलग-अलग समय के लिए निवेश करते है तो उसे यौगिक साझेदारी कहते हैं।

- **Types of partners:**

  Active partners/सक्रिय साझेदार

  Sleeping partners/निष्क्रिय साझेदार

- **Active partner:** Invest money as well as takes part in business activity for which he is paid salary from the profit.

  सक्रिय साझेदार: पैसा निवेश करने के साथ-साथ व्यावसायिक गतिविधियों में भी भाग लेता है जिसके लिए उसे लाभ से वेतन दिया जाता है।

- **Sleeping partners:** Who only invest money and does not take part in business activities.

  निष्क्रिय साझेदार: जो केवल पैसा निवेश करते हैं और व्यावसायिक गतिविधियों में भाग नहीं लेते हैं।

  Basic terms:

  I = Investment/निवेश

  P = Profit/लाभ

  C = Capital/पूंजी

  T = Time/समय

- Relation between P, C and T/P, C और T के बीच सम्बंध

  Profit/लाभ = Capital/पूंजी × time/समय

Ex. Two partners Deepa and Ziya start a business by investing ₹ 50,000 and ₹40,000 respectively. What will be the ratio of their profits at the end of the year ?

दो साझेदार दीपा और जिया क्रमश: ₹50,000 और ₹40,000 का निवेश करके एक व्यवसाय शुरू करते हैं। वर्ष के अंत में उनके लाभ का अनुपात क्या होगा?

HINTS:

Ratio of investment of Deepa and Ziya

= 50000 : 40000 ⇒ 5 : 4

When time is constant, Profit will be shared in the ratio of Investment.

Thus, Ratio of profit of Deepa and Ziya = 5 : 4.

Ex. A, B and C all together invest ₹ 48,000. Ratio of their time investment is 99 : 77 : 84 and ratio of their profit amount is respectively 3 : 2 : 4. Find the investment amount of A?

A, B और C तीनों मिलकर कुल ₹ 48,000 एक व्यापार में निवेश करते हैं। यदि इनके समय का अनुपात क्रमश: 99 : 77 : 84 हो तथा लाभ का अनुपात क्रमश: 3 : 2 : 4 हो, तो A के द्वारा निवेश की गई राशि बताएँ?

HINTS:

We know, Investment = $\frac{\text{Profit}}{\text{Time}}$

Ratio of Investment, A : B : C = $\frac{3}{99} : \frac{2}{77} : \frac{4}{84}$

$= \frac{3}{99} \times 99 \times 77 \times 84 : \frac{2}{77} \times 99 \times 77 \times 84 : \frac{4}{84} \times 99 \times 77 \times 84$

= 7 : 6 : 11

∴ Investment of A, 7 unit → $\frac{48000}{24} \times 7$ = Rs.14000

CONCEPT-01

When Someone Join or Left

(जब कोई शामिल होता है या छोड़ता है)

Ex. Kapil starts some business with ₹ 50000. After 3 months Monu joins him with ₹70000. At the end of the year, In what ratio should they share the profit ?

कपिल ₹50,000 से कुछ व्यवसाय शुरू करता है। 3 महीने के बाद मोनू ₹70,000 के साथ उसके साथ जुड़ जाता है। वर्ष के अंत में उन्हें किस अनुपात में लाभ साझा करना चाहिए?

HINTS:

Ratio of Investment of Kapil and Monu,

= 50000 : 70000 = 5 : 7

Ratio of investment period by Kapil and Monu

= 12 : 9 = 4 : 3

We know, Profit = Investment × Time

Thus , Ratio of profit = 5 × 4 : 7 × 3 = 20 : 21

CONCEPT-02

Increase/Decrease in capital
(पूजी में वृद्धि/कमी)

Ex. X and Y enter into a partnership with capital in ratio 3 : 5. After 5 months X adds 50% of his capital, while Y withdraws 60% of his capital. What is share (in ₹ Lakhs) of X in the annual profit of ₹ 6.84 lakhs?

X और Y, 3 : 5 के अनुपात में पूँजी के साथ साझेदारी करते हैं। 5 महीने बाद X अपनी पूँजी का 50% जोड़ता है, जबकि Y अपनी पूँजी का 60% निकाल लेता है। ₹ 6.84 लाख के वार्षिक लाभ में X का (₹ लाख में) हिस्सा क्या है?

HINTS:

Let the capital of X and Y is $30x$ and $50x$.

	Investment	Time	Investment	Time
X	$30x$	5 m	$45x$	7 m
Y	$50x$	5 m	$20x$	7 m

We know, Profit = Investment × Time Period

Ratio of profit of X and Y is

$= 30x \times 5 + 45x \times 7 : 50x \times 5 + 20x \times 7$

$= 465x : 390x$

$$\text{Share of X in annual Profit} = \frac{\text{Rs } 6.84 \text{ Lac}}{465+390} \times 465$$

$$= \frac{6,84,000}{855} \times 465 = \text{Rs. } 3,72,000$$

CONCEPT-03

Donation/Tax based (दान/कर आधारित)

Ex. A and B invest in a business in the ratio 3 : 2. If 5% of the total profit goes to charity and A's share is ₹ 855, the total profit (in ₹) is :

A और B एक व्यवसाय में 3 : 2 के अनुपात में निवेश करते हैं। यदि कुल लाभ का 5% लाभ दान दिया जाता है और A का हिस्सा ₹ 855 हो, तो कुल लाभ क्या होगा?

HINTS:

When time is constant, Profit will be shared in the ratio of Investment.

Ratio of profit of A and B = 3 : 2

Let total profit = 100%

after 5% chairity, Remaining = 95%

$$\text{ATQ, } 95\% \times \frac{3}{5} = \text{Rs. } 855$$

$$\Rightarrow 100\% = \frac{855}{57} \times 100 = \text{Rs. } 1500$$

CONCEPT-04

Distribution based (वितरण आधारित)

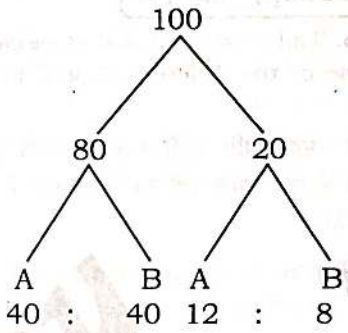
Ex. A & B invest ₹ 30,000 & ₹20,000 and 80% of total profit distributed equally among them. Rest profit distributed according to investment ratio. The difference between the shares of A & B is 4000. Find the total profit and find the share of A & B?

A और B क्रमशः ₹ 30,000 और ₹ 20,000 का निवेश करते हैं और कुल लाभ का 80% उनके बीच समान रूप से वितरित होते हैं। बाकी लाभ निवेश अनुपात के अनुसार वितरित करते हैं। A और B के हिस्से के बीच का अंतर ₹ 4000 है। कुल लाभ ज्ञात करें तथा A और B का हिस्सा ज्ञात करें?

HINTS:

Ratio of investment of A and B = 3 : 2

Let Total Profit = 100 unit.



Share of A = 40 + 12 = 52 unit

Share of B = 40 + 8 = 48 unit

4 unit = Rs. 4000

∴ 1 unit = Rs. 1000

Total Profit = 100 × Rs. 1000 = Rs 1,00,000

Share of A = 52 unit = Rs. 52,000

Share of B = 48 unit = Rs. 48,000

CONCEPT-05

Management (प्रबंधक)

Ex. Nasir is a working partner and Rohit is a sleeping partner in a business and Nasir puts in ₹5,000 and Rohit puts in ₹6,000. Nasir received 15% of the profit for managing the business and the rest is divided in proportion to their capitals. The amount received by Nasir out of the total profit of ₹880.

एक व्यापार में नासिर सक्रिय साझेदार है तथा रोहित निष्क्रिय साझेदार है। नासिर ₹5000 लगाता है तथा रोहित ₹6000 लगाता है। नासिर को लाभ का 15% व्यापार संभालने के लिए मिलता है और शेष लाभ उनके पूँजी के अनुपात में उनके बीच बँट जाता है। ₹880 के कुल लाभ में से नासिर को कितनी राशि मिलेगी?

HINTS:

Ratio of profit of Nasir and Rohit = 5 : 6

Total profit = 880

Money got by Nasir for managing the business,

= 15% of Rs. 880 = Rs. 132

Remaining Amount = Rs. 880 – Rs. 132 = Rs. 748

$$\text{Amount recieved by Nasir} = \text{Rs. } 132 + \text{Rs. } 748 \times \frac{5}{11}$$

= Rs. 132 + Rs. 340 = Rs. 472

@Raka_260

MIXTURE

मिश्रण

19

Mixture/मिश्रण

A mixture is a material madeup of two or more different substances.

मिश्रण दो या दो से अधिक विभिन्न पदार्थों से बना एक पदार्थ है।

Concentraion of Mixture/मिश्रण की सांद्रता

Presence of particular constituents of mixture in percentage is called concentration of that constituents.

मिश्रण के विशेष घटकों की प्रतिशत में उपस्थिति को उस घटक की सांद्रता कहा जाता है।

CONCEPT-01

Addition or Removal of Some Quantity

(किसी मात्रा को जोड़ना या हटाना)

Ex. 200 litres of a mixture contains milk and water in the ratio 17 : 3. After the addition of some more milk to it, the ratio of milk to water in the resulting mixture becomes 7 : 1. The quantity of milk added to it was.

200 लीटर मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 17 : 3 है। इसमें कुछ और दूध मिलाने के बाद, परिणामी मिश्रण में दूध का पानी से अनुपात 7 : 1 हो जाता है। इसमें मिलाये गए दूध की मात्रा कितनी थी।

HINTS:

[ध्यान रखें, इस प्रकार के प्रश्नों में जिसको प्रतिस्थापित नहीं किया गया है उसके अनुपात को बराबर करेंगे]

In this question, ratio of water will be equal.

	M : W	M : W
Initial	17 : 3 → × 1	17 : 3
Final	7 : 1 → × 3	21 : 3

Milk in Initial mixture = $200 \times \frac{17}{20} = 170l$

Milk in Final mixture = $200 \times \frac{3}{20} \times \frac{21}{3} = 210l$

Added Milk = $210l - 170l = 40l$

Ex. A beaker contains acid and water in the ratio 1 : x. When 50 ml of water is mixed in 300 ml of the mixture the ratio of acid to water becomes 2 : 5. What is the value of x.

एक बीकर में एसिड और पानी का अनुपात 1 : x है। जब 300 मिली के मिश्रण में 50 मिली पानी को मिलाया जाता है तो एसिड और पानी के मिश्रण का अनुपात 2 : 5 हो जाता है। x का मान क्या होगा।

HINTS:

A : W

1 : x

2 : 5

7 unit = 350

1 unit = 50

The initial quantity of water = $300l - 100l = 200l$

Ex. The ratio of milk and water in a vessel is 2 : 3 by chemical process if we extract some water then ratio becomes 5 : 7 and quantity of mixture reduced to $36l$, then find how much quantity of water was extracted?

एक बर्तन में दूध और पानी का अनुपात 2 : 3 है। रासायनिक प्रयोग द्वारा अगर हम मिश्रण से कुछ लीटर पानी निकालते हैं तो अनुपात 5 : 7 हो जाता है और मिश्रण की मात्रा 36 लीटर हो जाती है। तो पता लगाएँ कि पानी कितनी मात्रा में निकाला गया था?

HINTS:

[ध्यान रखें, इस प्रकार के प्रश्नों में जिसको प्रतिस्थापित नहीं किया गया है उसके अनुपात को बराबर करेंगे]

In this question, ratio of milk will be equal.

	M : W	M : W
Initial	2 : 3 → × 5	10 : 15
Final	5 : 7 → × 2	10 : 14

ATQ, 24 unit = 36

Extracted amount of water, 1 unit = 1.5 Litre

Ex. The ratio of milk and water in a mixture is 1 : 3. We added x ltr of milk to the mixture then ratio becomes 7 : 15 and we added $50l$ water to the mixture, then ratio becomes 2 : 5. Find the value of x.

एक मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 1 : 3 है। यदि मिश्रण में x लीटर दूध मिलाया जाये तो मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 7 : 15 हो जाता है। अब इस मिश्रण में 50 लीटर पानी मिलाने पर अनुपात 2 : 5 हो जाता है। x का मान ज्ञात करें।

HINTS:

M : W

10 : 30

$+x$

$2 \times 7 : 15 \times 2$

$+50l$

$7 \times 2 : 5 \times 7$

Value of $x = \frac{50}{5} \times 4 = 40$ Litre

CONCEPT-02

Concept of Replacement
(प्रतिस्थापन की अवधारणा)

Based on this concept 2 types of questions are asked – इस अवधारणा पर आधारित 2 तरह के प्रश्न पूछे जाते हैं-

- **Replacement of equal quantity/समान मात्रा का प्रतिस्थापन**

When 'x' amount of mixture of any substance 's' is n-times replaced with 'p' quantity of other substance. Then finding quantity of substance 's' in replaced mixture – जब किसी पदार्थ 's' के मिश्रण की 'x' मात्रा को अन्य पदार्थ की 'p' मात्रा से n-बार प्रतिस्थापित किया जाता है। तो प्रतिस्थापित मिश्रण में पदार्थ 's' की मात्रा ज्ञात करना -.

Quantity of substance 's' in replaced mixture/प्रतिस्थापित मिश्रण में पदार्थ 's' की मात्रा $= x\left(1-\frac{p}{x}\right)^n$

Ex. A vessel is full of 90l milk, 18l milk is taken out and replaced by water and again this process is repeated 2 more times, the amount of milk left after the 3rd replacement is?

एक बर्तन में 90 लीटर दूध है। इसमें से 18 लीटर दूध निकालकर उतनी ही मात्रा में पानी मिला दिया गया। इस प्रक्रिया को दो बार और दोहराया गया। तीसरे प्रतिस्थापन के बाद दूध कि बची हुई मात्रा बताइये।

HINTS:

The amount of milk in replaced mixture

$= 90\left(1-\frac{18}{90}\right)^3 = 90\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5} = 46.08$ Litre

- **Replacement of unequal quantity/असमान मात्रा का प्रतिस्थापन**

When 'x' amount of mixture of any substance 's' is n-times replaced with 'p', 'q', 'r' and so on quantity of other substance. Then finding quantity of substance 's' in replaced mixture –

जब किसी पदार्थ 's' के मिश्रण की 'x' मात्रा को अन्य पदार्थ की भिन्न-भिन्न मात्रा 'p', 'q', 'r' और इत्यादि से प्रतिस्थापित किया जाता है। तो प्रतिस्थापित मिश्रण में पदार्थ 's' की मात्रा ज्ञात करना –

Quantity of substance 's' in replaced mixture/प्रतिस्थापित मिश्रण में पदार्थ 's' की मात्रा

$= x\left(1-\frac{p}{x}\right)\left(1-\frac{q}{x}\right)\left(1-\frac{r}{x}\right)$....so on.

Ex. A vessel is full of 90 litre milk, 18l milk is taken out and replaced by water, again 15l milk is taken out and replaced by water and again 10l milk is taken out and replaced by water. The amount of milk left after the 3rd replacement is?

एक बर्तन 90 लीटर दूध से भरा है, 18 लीटर दूध निकाला जाता है और पानी से बदल दिया जाता है, फिर से 15 लीटर दूध निकाला जाता है और पानी से बदल दिया जाता है और फिर से 10 लीटर दूध निकाला जाता है और पानी से बदल दिया जाता है। तीसरे प्रतिस्थापन के बाद बचे दूध की मात्रा कितनी है?

HINTS:

The amount of milk in replaced mixture

$= 90\left(1-\frac{18}{90}\right)\left(1-\frac{15}{90}\right)\left(1-\frac{10}{90}\right)$

$= 90\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{160}{3} = 53.33$ Litre

❖ If x is initial amount of liquid. p is the amount which is drawn, and this process is repeated ntimes such that the resultant mixture is in the ratio a : b then,

$\frac{a}{a+b} = \left(\frac{x-p}{x}\right)^n$

यदि x तरल की प्रारंभिक मात्रा है। p वह मात्रा है जो निकाली जाती है, और इस प्रक्रिया को n-बार इस तरह दोहराया जाता है कि परिणामी मिश्रण a : b के अनुपात में होता है, तो $\frac{a}{a+b} = \left(\frac{x-p}{x}\right)^n$

Ex. A vessel contains some milk. 6 litre of the milk was taken out of the vessel and replaced with 6 litre of water and again 6 litre of mixture was taken out and was replaced with water. Now the ratio of milk to water b e c o m e 100 : 69. Find the initial quantity of milk in the vessel.

एक बर्तन में कुछ दूध है उस बर्तन से 6 लीटर दूध निकालकर 6 लीटर पानी मिला दिया जाता है और दोबारा 6 लीटर मिश्रण निकालकर उसमें पानी मिला दिया जाता है जिसमें दूध और पानी का अनुपात 100 : 69 हो जाता है, तो बर्तन में दूध की आरंभिक मात्रा बताइए?

HINTS:

Method - 1

Let the quantity of milk initially is x *litre*.

Using Direct Formula,

$\Rightarrow \frac{100}{100+69} = \left(\frac{x-6}{x}\right)^2$

On Solving, $x = 26l$

Method - 2

Milk (Initial)	:	Milk (Final)
169	:	100
$\sqrt{169}$	:	$\sqrt{100}$
13	:	10

3 unit = 6l

Quantity of milk initially = 13 × 2 = 26l

CONCEPT-03

Mixing Different Mixture to form a single mixture/विभिन्न मिश्रणों को मिलाकर एक मिश्रण बनाना

Ex. The ratios of copper to zinc in alloys A and B are 3 : 4 and 5 : 9, respectively. A and B are taken in the ratio 2 : 3 and melted to form a new alloy C. What is the ratio of copper to zinc in C?

मिश्रधातु A और B में तांबे और जस्ता के अनुपात क्रमशः 3 : 4 और 5 : 9 है। A और B को 2 : 3 के अनुपात में लिया जाता है और एक नए मिश्रधातु C को बनाने के लिए पिघलाया जाता है। C में तांबे और जस्ता का अनुपात क्या है?

@Baka_266

HINTS:

[ध्यान रखें - जब कभी भी ऐसे प्रश्न पूछे जाये, तो Alloy की मात्रा को पहले समान बनायें]

	Cu : Zn		Cu : Zn	
Alloy A	3 : 4	$\rightarrow 7_{\times 2}$	6 : 8	$\times 2$
Alloy B	5 : 9	$\rightarrow 14$	5 : 9	$\times 3$

Ratio of copper and Zinc in Alloy C,
= (12 + 15):(16 + 27) = 27 : 43

Ex. Alloys A and B contain copper and zinc in the ratio 7 : 8 and 4 : 1, respectively. In what ratio should A and B be mixed to obtain a new alloy C containing copper and zinc in the ratio 2 : 1 ?

मिश्रधातु A और B में तांबा और जस्ता क्रमश: 7:8 और 4:1 के अनुपात में हैं। 2:1 के अनुपात में तांबा और जस्ता युक्त एक नया मिश्र धातु C प्राप्त करने के लिए A और B को किस अनुपात में मिलाया जाना चाहिए?

HINTS:

[ध्यान रखें - जब कभी भी ऐसे प्रश्न पूछे जायें, तो Alloy की मात्रा को पहले समान बनायें]

	Cu : Zn		Cu : Zn
Alloy A	7 : 8	$\rightarrow 15$	7 : 8
Alloy B	4 : 1	$\rightarrow 5_{\times 3}$	12 : 3

Let the mixture A and B is mixed in the ratio $x : y$.

ATQ, $\frac{Cu}{Zn} = \frac{7x+12y}{8x+3y} = \frac{2}{1}$

On solving we get, $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$

Note: These type of questions can be solved using Alligation also.

★★★★★

@Baka_260

ALLIGATION

एलिगेशन

20

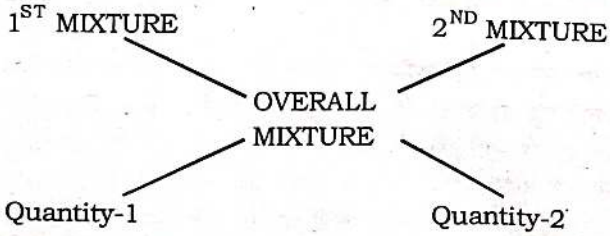
❖ Applications of Alligation in different chapters.
विभिन्न अध्यायों में एलीगेशन के अनुप्रयोग।

- Mixture-based questions/मिश्रण आधारित प्रश्न
- Percentage based questions/प्रतिशत आधारित प्रश्न
- Simple interest based questions/साधारण ब्याज आधारित प्रश्न
- Profit and loss based questions
  लाभ और हानि पर आधारित प्रश्न
- Discount based questions/छूट आधारित प्रश्न
- Average based questions/औसत आधारित प्रश्न
- Time and distance based questions
  समय और दूरी आधारित प्रश्न
- Number system based questions
  संख्या पद्धति आधारित प्रश्न

Mixture/मिश्रण

In this type of questions, the ratio of the ingredients in the first vessel and the ratio of the ingredients in the second vessel are given. After that, the ratio of the ingredients is also given in the new mixture made by pouring or mixing the mixture of both the vessels in a third vessel. The ratio of the ingredients in the first vessel is written on the left side, the ratio of the same ingredient in the second vessel is written on the right and the ratio of the same ingredient in the third vessel is written in the middle. After using the alligation method, we get the ratio in which the first and the second mixture were mixed or the ratio of the amount of the same ingredient in the first and second vessel.

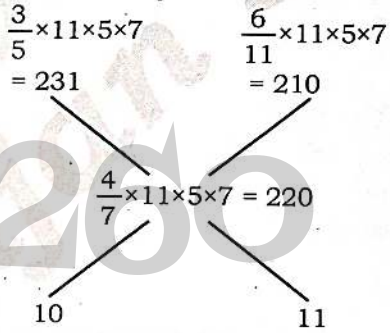
इस प्रकार के प्रश्नों में पहले पात्र में अवयव के अनुपात तथा दूसरे पात्र में अवयव के अनुपात दिए होते हैं। तत्पश्चात् दोनों पात्रों के मिश्रण को एक तीसरे पात्र में डालने अथवा मिलाने से बने नये मिश्रण में भी अवयव का अनुपात दिया होता है। पहले पात्र में अवयव के अनुपात को बाईं ओर, उसी अवयव के दूसरे पात्र में अनुपात को दाईं ओर तथा तीसरे पात्र में उसी अवयव के अनुपात को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन विधि का प्रयोग करते ही हमें पहले तथा दूसरे मिश्रण को किस अनुपात में मिलाया गया था अथवा पहले तथा दूसरे में उसी अवयव की मात्रा का अनुपात प्राप्त होता है।



Ex. Two containers have mixtures of milk and water, respectively, in the ratios 3 : 2 and 6 : 5. In what ratio should the contents be mixed so that the ratio of milk to water in the final mixture is 4 : 3?

दो पात्रों में दूध और पानी के मिश्रण क्रमशः 3 : 2 और 6 : 5 के अनुपात में भरे हैं। इन मिश्रणों को किस अनुपात में मिलाया जाना चाहिए ताकि अंतिम मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 4 : 3 हो जाए?

HINTS:
Let's operate on milk only

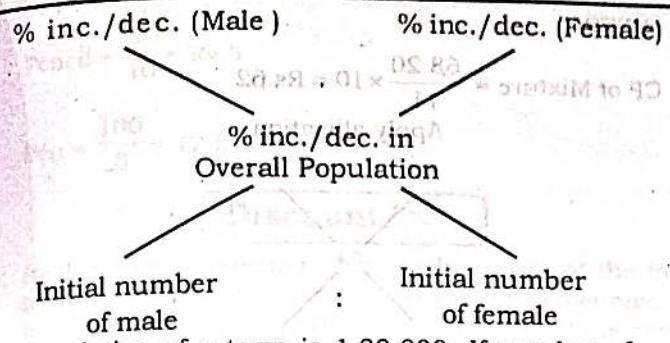


Percentage/प्रतिशत

In this type of questions, the total population of a place, the percentage rate of increase/decrease in the population of males and that of females are given. And the increase/decrease or increase/decrease percentage in the total population of the place is also given. The increase/decrease percentage in the population of males is written on the left, the increase/decrease percentage in the population of females is written on the right and the increase/decrease percentage in the total population is written in the middle. With the help of allegation, we find out the ratio of the initial population of males and females.

इस प्रकार के प्रश्नों में किसी स्थान की कुल जनसंख्या, पुरुषों तथा महिलाओं की जनसंख्या में वृद्धि/कमी की प्रतिशत दर दी गई होती है। तथा स्थान की कुल जनसंख्या में वृद्धि/कमी अथवा प्रतिशत वृद्धि/कमी भी दी गई होती है। पुरुषों की जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि/कमी को बाईं ओर, महिलाओं की जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि/कमी को दाईं ओर तथा कुल जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि/कमी को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से प्रारम्भ में पुरुषों तथा महिलाओं की जनसंख्या का अनुपात ज्ञात कर लेते हैं।

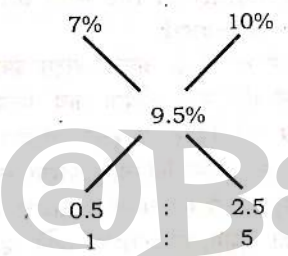
@Baka_250



Ex. Population of a town is 1,20,000. If number of male increases by 7% and females increases by 10%, then the population of town would increase by 9.5%. Find the difference between male to female population living in that town?

एक कस्बे की जनसंख्या 1,20,000 है। यदि पुरुषों की संख्या में 7% और महिलाओं की संख्या में 10% की वृद्धि होती है, तो शहर की जनसंख्या में 9.5% की वृद्धि होगी। उस शहर में रहने वाले पुरुषों की आबादी से महिलाओं की आबादी के बीच अंतर ज्ञात कीजिए?

HINTS:

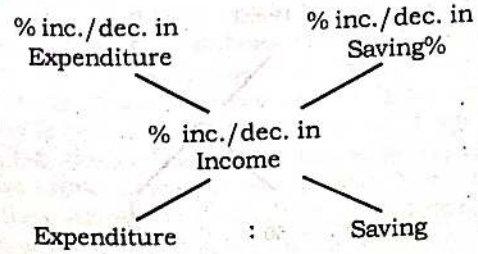


$\frac{1,20,000}{6} \times 4 = Rs.8000$

Income - Expenditure & Saving
आय-व्यय और बचत

In this type of questions, the increase/decrease percentage in the expenditure, savings and income of a family/person is given. Increase/decrease percentage in expenditure is written on the left, increase/decrease percentage in savings is written on the right and increase/decrease percentage in income is written in the middle. With the help of allegation, we find out the ratio of expenditure and savings in the beginning.

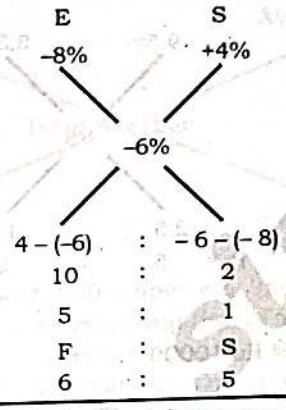
इस प्रकार के प्रश्नों में किसी परिवार/व्यक्ति के खर्च, बचत तथा आय में प्रतिशत वृद्धि/कमी दी गई होती है। खर्च में प्रतिशत वृद्धि/कमी को बाई ओर, बचत में प्रतिशत वृद्धि/कमी को दाई ओर तथा आय में प्रतिशत वृद्धि/कमी को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से प्रारम्भ में खर्च और बचत का अनुपात ज्ञात कर लेते हैं।



Ex. If the income of a family decreases by 6% and expenditure decreases by 8%, and its saving increases by 4%. Find the ratio of income and expenditure of that family.

यदि एक परिवार की आय में 6% की कमी हो जाती है और व्यय में 8% की कमी हो जाती है, और उसकी बचत में 4% की वृद्धि होती है। तब परिवार की आय और व्यय का अनुपात ज्ञात कीजिए।

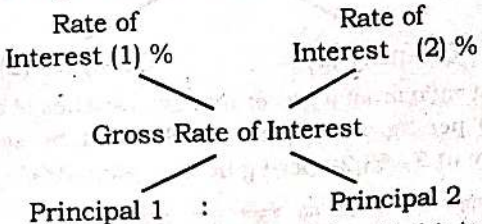
HINTS:



Simple Interest/साधारण ब्याज

In this type of question the given principal is invested in two different schemes/banks/individuals at two different rates of interest. After a certain time the total amount is received. How much amount was invested in both the schemes/banks/individuals, it is to be found. With the help of given principal, time and amount received, calculate the gross interest rate. The rate of interest on the amount invested in the first scheme / bank / individual is written on the left side; the rate of interest on the amount invested in the second scheme / bank / individual is written on the right and the gross interest rate is written in the middle. With the help of allegation, we find out the ratio of the distributed principal.

इस प्रकार के प्रश्न में दिए गए मूलधन का दो अलग-अलग योजनाओं/बैंकों/व्यक्तियों में निवेश दो अलग अलग ब्याज की दरों पर किया जाता है। कुछ निश्चित समय के पश्चात् कुल धनराशि प्राप्त होती है। दोनों योजनाओं/बैंकों/व्यक्तियों में कितनी धनराशि निवेशित की गई, यह ज्ञात करना होता है। दिए गए मूलधन, समय तथा प्राप्त मिश्रधन की सहायता से सकल ब्याज दर ज्ञात कर लेते हैं। पहली योजना/बैंक/व्यक्ति में निवेशित धनराशि पर ब्याज की दर को बाई ओर, दूसरी योजना/बैंक/व्यक्ति में निवेशित धनराशि पर ब्याज की दर को दाई ओर तथा सकल ब्याज दर को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से वितरित मूलधन का अनुपात ज्ञात कर लेते हैं।

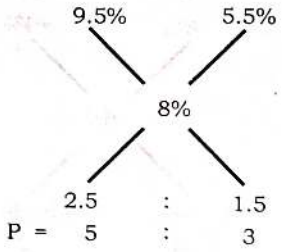


Ex. Harish is having ₹ 40,000 . He deposited it in 2 banks. Interest given by 1st bank is 9.5% per annum and that of 2nd bank is 5.5% per annum. If at t he end of a year Harish got ₹ 3200. Then find the difference of the balance amount deposited in both banks?

हरीश के पास ₹ 40,000 हैं। उसने इसे 2 बैंकों में जमा कर दिया। पहले बैंक द्वारा दिया गया ब्याज 9.5% प्रति वर्ष है और दूसरे बैंक का 5.5% प्रति वर्ष है। यदि एक वर्ष के अंत में हरीश को ₹ 3200 मिलते हैं। तो दोनों बैंकों में जमा राशि का अंतर ज्ञात कीजिए?

$$r = \frac{SI}{p} \times \frac{100}{t} = \frac{3200 \times 100}{40000 - 1} = 8\%$$

HINTS:

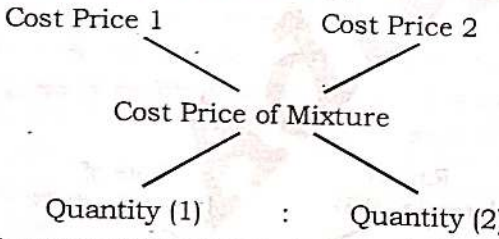


$$= \frac{40,000 \times 2}{8} = \text{Rs.}10000$$

Profit and Loss/लाभ और हानि

In this type of questions, the cost price of two different quantities of an ingredient is given and it is asked, in what ratio we should mixed both the quantities so that by selling the mixture at certain price there would be profit or loss of certain percentage. Find out the cost price of the mixture with the help of given profit/loss percentage. After that, by writing the first cost price on the left side, second cost price on the right side and cost price of the mixture in the middle, find the ratio in which the first and second mixture were mixed.

इस प्रकार के प्रश्नों में किसी अवयव की दो अलग अलग मात्राओं का क्रय मूल्य दिया होता है तथा यह पूछा जाता है कि इनको किस अनुपात में मिलाकर किसी निश्चित मूल्य पर बेचने से कुछ निश्चित प्रतिशत लाभ/हानि होती है। दिए गए प्रतिशत लाभ/हानि की मदद से मिश्रण का क्रय मूल्य ज्ञात कर लेते हैं। तत्पश्चात् पहले क्रय मूल्य को बाईं ओर, दूसरे क्रय मूल्य को दाईं ओर तथा मिश्रण के क्रय मूल्य को मध्य में लिखकर पहले तथा दूसरे मिश्रण को किस अनुपात में मिलाया गया था, ज्ञात कर लेते हैं।



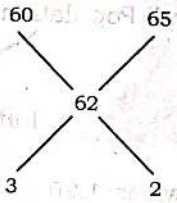
Ex. In what ratio must a grocer mix two varieties of tea worth Rs. 60 per kg and 65 per kg So, that by selling the mixture at Rs.68.20 per kg he may gain 10%?

एक किराना व्यापारी को 60 रुपये प्रति किलोग्राम और 65 रुपये प्रति किलोग्राम की दो किस्मों की चाय को किस अनुपात में मिलाना चाहिए ताकि मिश्रण को 68.20 रुपये प्रति किलोग्राम पर बेचकर उसे 10% का लाभ हो सके?

HINTS:

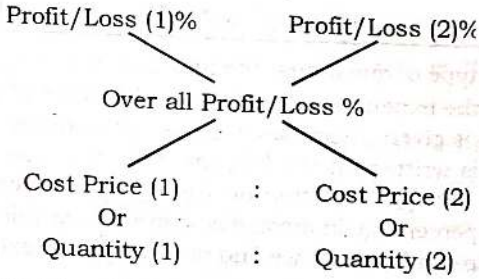
$$\text{CP of Mixture} = \frac{68.20}{11} \times 10 = \text{Rs.}62$$

Apply alligation



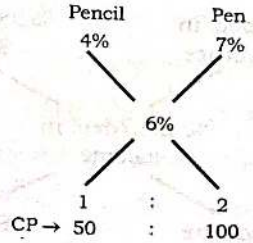
In the second type of question, cost price or the quantity of either two different components or two types of any one component is given. The first component or type is sold at a certain profit/loss percentage and the second component or type is sold at a certain profit/loss percentage. Overall there is a profit/loss of a certain amount or percentage. While using allegation, the profit/loss percentage on the first element or type is written on the left side, the profit/loss percentage on the second element or type is written on the right side and the total profit/loss percentage in the middle. From which the ratio of the cast price/quantity of the first and second components or types is obtained.

दूसरे प्रकार के प्रश्न में या तो दो अलग-अलग अवयव अथवा किसी एक अवयव के दो प्रकारों की मात्रा अथवा क्रय मूल्य दिया होता है। पहले अवयव अथवा प्रकार को किसी निश्चित प्रतिशत लाभ/हानि तथा दूसरे अवयव अथवा प्रकार को किसी निश्चित प्रतिशत लाभ/हानि पर बेचा जाता है। कुल मिलाकर कुछ निश्चित धनराशि अथवा प्रतिशत का लाभ/हानि होती है। एलिगेशन का प्रयोग करते समय पहले अवयव अथवा प्रकार पर प्रतिशत लाभ/हानि को बाईं ओर, दूसरे अवयव अथवा प्रकार पर प्रतिशत लाभ/हानि को दाईं ओर तथा कुल प्रतिशत लाभ/हानि को मध्य में लिखते हैं। जिससे पहले तथा दूसरे अवयव अथवा प्रकारों के क्रय मूल्य/मात्राओं के अनुपात प्राप्त हो जाते हैं।



Ex. A student bought 10 pencils and 8 pens at ₹ 150 . He sells pencil at 4% profit and pen at 7% profit. Overall he gains ₹ 9. Find the cost price of each pencil and pen.

एक छात्र ने ₹ 150 में 10 पेंसिल और 8 पेन खरीदे। वह पेंसिल को 4% लाभ पर और पेन को 7% लाभ पर बेचता है। कुल मिलाकर उसे ₹ 9 का लाभ होता है। प्रत्येक पेंसिल और पेन का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।



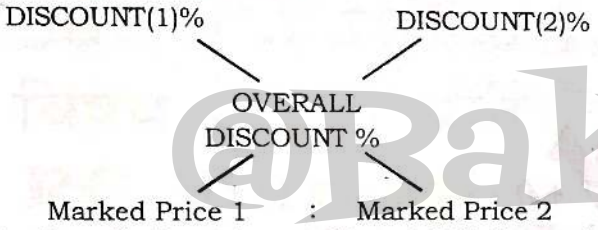
Pencil = $\frac{50}{10}$ = Rs.5

Pen = $\frac{100}{8}$ = 12.5

Discount/छूट

In this type of question, the marked price of the total quantity of an article and the discount percentage on the first and second part of the total quantity is given. The total discount percentage is also given. The first discount percentage is written on the left side, the second discount percentage is on the right and the total discount percentage is written in the middle. The ratio of the marked price of the first and the second part is found by using alligation.

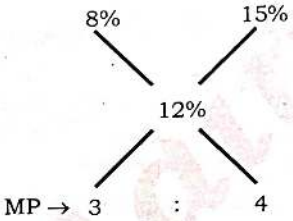
इस प्रकार के प्रश्न में किसी वस्तु की कुल मात्रा का अंकित मूल्य तथा कुल मात्रा के पहले तथा दूसरे भाग पर छूट प्रतिशत दी गई होती है। पहली तथा दूसरी छूट को मिलाकर कुल छूट प्रतिशत भी दी गई होती है। पहली छूट प्रतिशत को बाईं ओर, दूसरी छूट प्रतिशत को दाईं ओर तथा कुल छूट प्रतिशत को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन का प्रयोग से पहले तथा दूसरे भाग के अंकित मूल्य का अनुपात ज्ञात हो जाता है।



Ex. A seller sells 2 watches at 8% and 15% discount each. Total marked price of both the items are ₹ 2100 . Find the difference between marked price of both items, if total discount is of 12%.

एक विक्रेता 2 घड़ियाँ 8% और 15% छूट पर बेचता है। दोनों वस्तुओं का कुल अंकित मूल्य ₹ 2100 है। यदि कुल छूट 12% है, तो दोनों वस्तुओं के अंकित मूल्य के बीच का अंतर ज्ञात कीजिए।

HINTS:



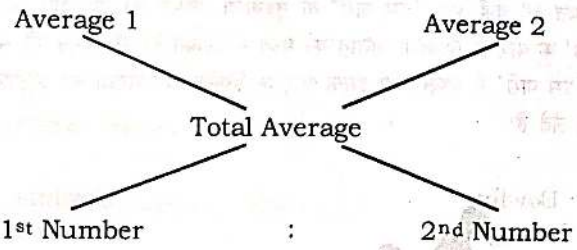
7 unit → 2100

1 unit → 300

Average/औसत

In this type of questions separate averages of two groups of fixed number of member/person/element are given. And the total gross average is also given. The number of members/individuals/elements in the first and second group is to be found. Write the average of the first group on the left, the average of the second group on the right and the gross average in the middle. With the help of allegation, the ratio of the number of members/individuals/elements in the first and second group is found.

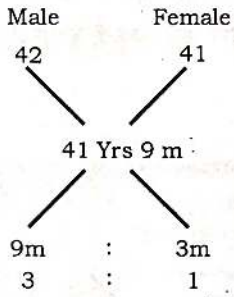
इस प्रकार के प्रश्नों में निश्चित सदस्य/व्यक्ति/अवयव संख्या के दो समूहों के अलग-अलग औसत दिए होते हैं। तथा कुल सकल औसत भी दिया होता है। पहले तथा दूसरे समूह में सदस्यों/व्यक्तियों/अवयवों की संख्या ज्ञात करनी होती है। पहले समूह के औसत को बाईं ओर, दूसरे समूह के औसत को दाईं ओर तथा सकल औसत को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से पहले तथा दूसरे समूह में सदस्यों/व्यक्तियों/अवयवों की संख्या का अनुपात ज्ञात कर लेते हैं।



Ex. In a company with 600 employees, the average age of male employees is 42 years and that of female employees is 41 years. If the average age of all the employees in the company is 41 years and 9 months, then the number of female employees is :

600 कर्मचारियों वाली कंपनी में पुरुष कर्मचारियों की औसत आयु 42 वर्ष है और महिला कर्मचारियों की औसत आयु 41 वर्ष है। यदि कंपनी में सभी कर्मचारियों की औसत आयु 41 वर्ष और 9 महीने है, तो महिला कर्मचारियों की संख्या है :

HINTS:

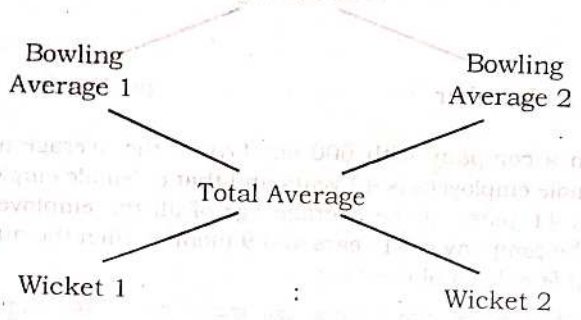


$\frac{600}{4} \times 1 = 150$

In these types of questions, how many runs a bowler gives for each wicket (bowling average), is given. Gets a certain number of wickets by giving a certain number of runs in the 'next innings'. Due to which his bowling average becomes slightly lower/higher. We have to find the number of wickets taken by the bowler before or after 'this innings'. First of all, find the bowling average of 'the next innings'. Also find the bowling average after 'this innings' with the help of given increase/decrease. The bowling average before the 'given innings' is written on the left side, the bowling average of 'this innings' on the right side and the bowling average after 'this innings' on the middle. With the help of allegation, find the ratio of the number of wickets before 'this innings' and after 'this innings'.

@Baka_260

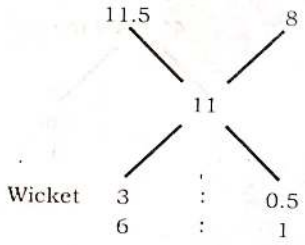
इस प्रकार के प्रश्नों में कोई गेंदबाज प्रत्येक विकेट के लिए कितने रन देता है (गेंदबाजी औसत), दिया गया होता है। 'अगली पारी' में कुछ निश्चित रन देकर कुछ निश्चित विकेट प्राप्त करता है। जिससे उसका गेंदबाजी औसत कुछ कम/अधिक हो जाता है। 'इस पारी' से पहले अथवा बाद में गेंदबाज द्वारा लिए गए विकेटों की संख्या ज्ञात करनी होती है। सबसे पहले 'अगली पारी' का गेंदबाजी औसत ज्ञात करते हैं। दी गई कमी/वृद्धि की सहायता से 'इस पारी' के बाद का गेंदबाजी औसत भी ज्ञात करते हैं। 'दी गई पारी' के पहले के गेंदबाजी औसत को बाई ओर, 'इस पारी' के गेंदबाजी औसत को दाई ओर तथा 'इस पारी' के बाद के गेंदबाजी औसत को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से 'इस पारी' से पहले तथा इसके बाद के विकेटों की संख्या का अनुपात ज्ञात कर लेते हैं।



Ex. Average run per wicket of a bowler is 11.5. In his next inning bowler took 5 wickets and conceded 40 run, thereby he reduced his bowling average by 0.5. Find the total number of wickets.

एक गेंदबाज का औसत रन प्रति विकेट 11.5 होता है। अपनी अगली पारी में गेंदबाज ने 5 विकेट लिए और 40 रन दिए, जिससे उसने अपने गेंदबाजी औसत में 0.5 की कमी की। विकेटों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS:



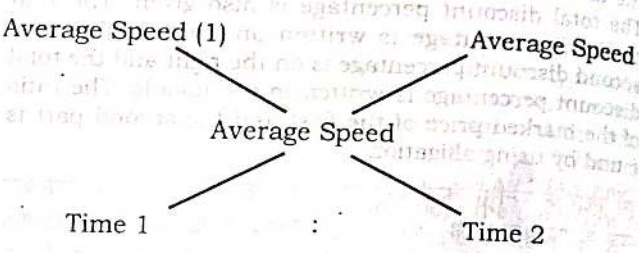
$$\text{Avg.} = \frac{40}{5} = 8$$

$$= 7 \times 5 = 35$$

Time and Distance/समय और दूरी

In this type of questions, a certain distance is covered in two parts or by two mediums with different speeds. The average speed of the total distance or the total time taken to cover the total distance is given. The time taken to cover both the different distances is to be found. The speed with which the first distance is covered is written on the left side, the speed with which the second distance is covered on the right and the total average speed is written in the middle. With the help of alligation, the ratio of the time taken to cover both the distances is known.

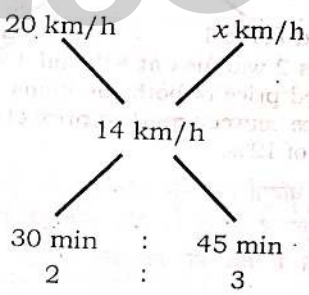
इस प्रकार के प्रश्नों में किसी निश्चित दूरी दो भागों में अथवा दो माध्यमों द्वारा अलग-अलग चालों से तय किया जाता है। कुल दूरी की औसत चाल अथवा कुल दूरी के साथ कुल समय दिया गया होता है। दोनों अलग-अलग दूरियों को तय करने में लिए गए समय को ज्ञात करना होता है। पहली दूरी को जिस चाल से तय किया गया उसे बाई ओर, दूसरी दूरी को जिस चाल से तय किया गया उसे दाई ओर तथा कुल औसत चाल को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से दोनों दूरियों को तय करने में लिए गए समय का अनुपात ज्ञात हो जाता है।



Ex. A car travel 20 km/h for 30 min and at x km/h for 45 min. If the average speed of the car for entire journey is 14 km/h find the value of x

एक कार 20 किमी/घंटा से 30 मिनट चलती है तथा x किमी./घंटा की चाल से 45 मिनट चलती है। यदि पूरी यात्रा के लिए कार की औसत चाल 14 किमी/घंटा है, तो x का मान बताइए।

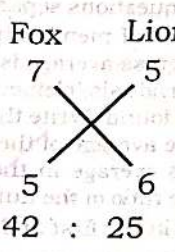
HINTS:



JUMP RELATED (TWO PERSON/ANIMAL JUMP)

Eg. A fox chases a lion. Fox takes 7 leaps for every 5 leaps of the lion and the distance covered by lion in 6 leaps is equal to the distance covered by fox in 5 leaps. Find the ratio of their speeds?

एक लोमड़ी शेर का पीछा करती है। लोमड़ी शेर की प्रत्येक 5 छलांग के लिए 7 छलांग लगाती है और 6 छलांग में शेर द्वारा तय की गई दूरी 5 छलांग में लोमड़ी द्वारा तय की गई दूरी के बराबर होती है। उनकी गति का अनुपात ज्ञात कीजिए?



Speed 42 : 25

Number System/संख्या प्रणाली

Ex. In a zoo, there are rabbits and pigeons. If heads are counted, there are 200 and if legs are counted, there are 580. How many pigeons are there?

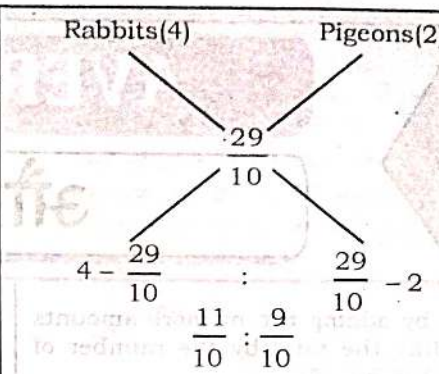
एक चिड़ियाघर में खरगोश और कबूतर हैं। यदि सिर गिने जाएं तो 200 हैं और पैर गिने जाएं तो 580 हैं। कितने कबूतर हैं?

HINTS:

Heads count = 200

Legs count = 580

Average Legs count for per head = $\frac{580}{200} = \frac{20}{10}$

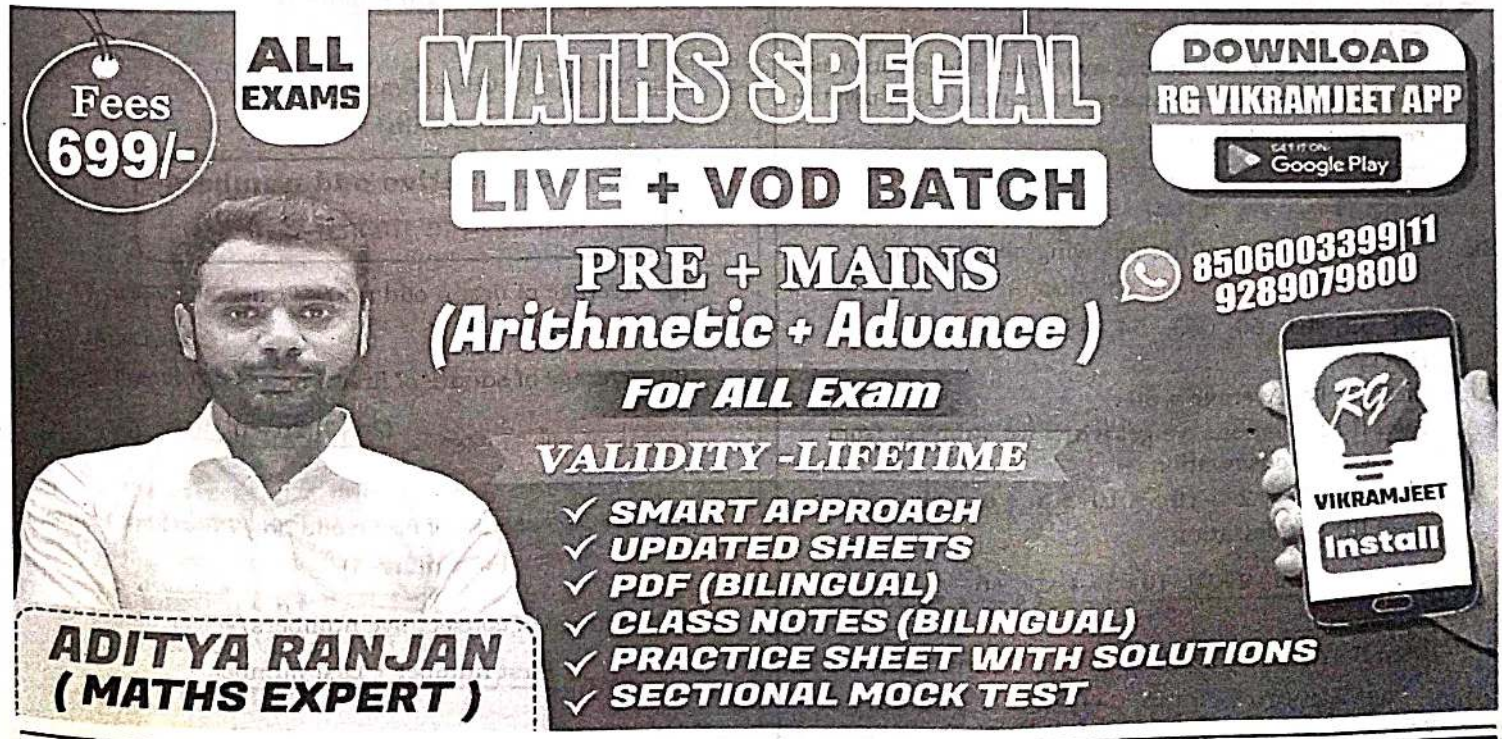


Rabbits : Pigeons = $\frac{9}{10} : \frac{11}{10} = 9 : 11$

Number of Pigeons = $200 \times \frac{11}{20} = 10$

☆☆☆☆☆

भारत के किसी भी Competitive Exam (प्रतियोगी परीक्षा) में गणित (Maths) विषय में शत-प्रतिशत Score करने के लिए RG Vikramjeet App पर Students के Favourite आदित्य सर के Recorded Batch में आज ही enroll करें।



AVERAGE

औसत

21

The result you get by adding two or more amounts together and dividing the total by the number of amounts, is called average.

दो या दो से अधिक राशियों को एक साथ जोड़ कर राशियों की संख्या से विभाजित करने पर जो परिणाम मिलता है, उसे औसत कहा जाता है।

$$\text{Average/औसत} = \frac{\text{Sum of all terms}}{\text{Number of terms}}$$

Finding Average using Deviation method
विचलन विधि का उपयोग करके औसत ज्ञात करना

Step I : Assume any term as average in observation.
चरण I : प्रेक्षण में किसी भी पद को औसत मानें।

Step II : Calculate the difference between the observations and assumed average. (These differences are known as Deviation).

चरण II : प्रेक्षणों और अनुमानित औसत के बीच अंतर की गणना करें। (इन अंतरों को विचलन के रूप में जाना जाता है)।

Step III : Add all deviations calculated in Step-II and divide it by total number of terms given in the observations. (This is known as net deviation in the average).

चरण III: चरण - II में गणना किए गए सभी विचलनों को जोड़ें और इसे अवलोकनों में दिए गए पदों की कुल संख्या से विभाजित करें। (इसे औसत में शुद्ध विचलन के रूप में जाना जाता है)।

Step IV: to get the actual average, add or subtract the net deviation in the assumed average(as per the result of Step-III).

चरण IV: वास्तविक औसत प्राप्त करने के लिए, अनुमानित औसत में शुद्ध विचलन जोड़ें या घटाएं (चरण-III के परिणाम के अनुसार)।

Ex. Find the average of the following observations:-
निम्नलिखित प्रेक्षणों का औसत ज्ञात कीजिए:-

48, 52, 40, 60, 53, 54, 49

HINTS:

Step I : Let Average = 50

Step II : Deviations we get when we subtract from the observations-

$-2 \quad +2 \quad -10 \quad +10 \quad +3 \quad +4 \quad -1$

Step III: Net deviation

$$= \frac{-2+2-10+10+3+4-1}{7} = \frac{+6}{7} = +0.857$$

Step IV: Actual average (वास्तविक औसत) = 50 + 0.857
= 50.857

For consecutive natural numbers
क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के लिए

(i) Average of first n natural number/प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का औसत = $\frac{(n+1)}{2}$

(ii) Average of square of first n natural number/प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का औसत = $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) Average of cube of first n natural number/प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का औसत = $\frac{n(n+1)^2}{4}$

For consecutive even numbers
क्रमागत सम संख्याओं के लिए

(i) Average of first n even no./प्रथम n सम संख्याओं का औसत = (n + 1)

(ii) Average of square of first n even no./प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का औसत = $\frac{2(n+1)(2n+1)}{3}$

(iii) Average of cube of first n even no./प्रथम n सम संख्याओं के घनों का औसत = $2n(n+1)^2$

For consecutive odd numbers
क्रमागत विषम संख्याओं के लिए

(i) Average of first n odd no./प्रथम n विषम संख्याओं का औसत = n

(ii) Average of square of first n odd no./प्रथम n विषम संख्याओं के वर्गों का औसत = $\frac{(2n+1)(2n-1)}{3}$

(iii) Average of cube of first n odd no./प्रथम n विषम संख्याओं के घनों का औसत = $n(2n^2-1)$

(iv) Average of consecutive numbers/क्रमागत संख्याओं का औसत = $\frac{\text{First number + Last number}}{2}$

@Baka_260

CONCEPT-01

If there are 3 natural numbers and average of any two number when added with third number gives a, b, c. Then–

यदि 3 प्राकृतिक संख्याएं हो और किसी दो संख्याओं के औसत को यदि तीसरी संख्या में जोड़ा जाए तो प्राप्त संख्याए क्रमशः a, b तथा c हो तो–

$$\text{Sum of number} = \frac{a+b+c}{2} = k$$

First number = $2a - k$

Second number = $2b - k$

Third number = $2c - k$

CONCEPT-02

If the average of n_1 observations is a_1, the average of n_2 observations is a_2 and so on, then–

n_1 प्रेक्षणों का औसत a_1, n_2 प्रेक्षणों का औसत a_2, तथा आगे भी इसी प्रकार हों तो–

Average of all the observations/सभी प्रेक्षणों का औसत

$$= \frac{n_1a_1 + n_2a_2 + \ldots}{n_1 + n_2 + \ldots}$$

CONCEPT-03

When data is misread

(जब डेटा गलत पढ़ा जाता है)

(A) If average of n numbers is m but later on it was found that a number 'a' was misread as 'b'. The correct average will be

यदि n संख्याओं का औसत m है लेकिन बाद में यह पाया गया कि एक संख्या 'a' को गलती से 'b' पढ़ लिया गया था। सही औसत होगा।

$$= m + \frac{(a-b)}{n}$$

Ex. While finding the average of 10 given numbers a student, by mistake, wrote 64 in place of a number 46 and got his average 50. The correct average of the given numbers is:

एक विद्यार्थी जब 10 संख्याओं का औसत ज्ञात करता है, तो त्रुटि के कारण 46 के स्थान पर 64 लिख देता है, तथा औसत 50 प्राप्त करता है। सही औसत ज्ञात कीजिए

HINTS:

Method-01

Correct Average

$$= 50 + \frac{(-18)}{10} = 48.8$$

(B) If the average of n numbers is m but later on it was found that two numbers a and b misread as p and q.

यदि n संख्याओं का औसत m है लेकिन बाद में यह पाया गया कि दो संख्याएँ a और b को गलती से p और q पढ़ लिया गया।

The correct average (सही औसत)

$$= m + \frac{(a+b-p-q)}{n}$$

Ex. The average marks of 40 students was found to be 68. If the marks of two students were incorrectly entered as 48 and 64 instead of 84 and 46 respectively, then what is the correct average?

40 छात्रों के औसत अंक 68 पाए गए। यदि दो छात्रों के अंक भूलवश 84 एवं 46 के बजाय क्रमशः 48 और 64 के रूप में शामिल किये गए हैं, तो सही औसत ज्ञात करें।

HINTS:

$$68 + \frac{(84+46-48-64)}{40} = 68.45$$

CONCEPT-04

Ex. The average of 21 data is 36 out of which the first 12 data are having an average of 15. The average of the rest 9 data is :

21 आंकड़ों का औसत 36 है जिसमें से पहले 12 आंकड़ों का औसत 15 है। शेष 9 आंकड़ों का औसत है:

HINTS:

Average of remaining 9 number

$$= \frac{(\text{Total sum} - \text{sum of first 12 data})}{9}$$

$$= \frac{(21\times36 - 12\times15)}{9} = \frac{576}{9} = 64$$

To make it shorter you can solve it using the ratio of number & deviation explained below–

	First	Remaining
Data	12	9
Ratio	4	3
Average	15	x

Here, Overall average = 36

Deviation occurred in 4 = (15 – 36) = – 21

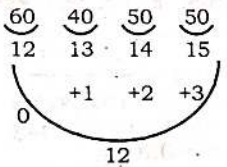
(यहाँ जो – 21 की कमी पहले 12 आंकड़े में आ रही है वो आगे के शेष 9 आकड़े में बढेगी)

Average of remaining, $x = 36 + \frac{21\times4}{3} = 64$

Ex. In a primary school, there are 60 boys of age 12 years each, 40 of age 13 years each, 50 of age 14 years each and 50 of age 15 years each. The average age (in years) of all the boys of the school is :

एक प्राथमिक विद्यालय में 60 लड़के प्रत्येक 12 वर्ष के, 40 लड़के प्रत्येक 13 वर्ष के, 50 लड़के प्रत्येक 14 वर्ष और 50 लड़के प्रत्येक 15 वर्ष के है। विद्यालय के सभी लड़कों का औसत आयु है :

HINTS:



$= 1 \times 40 + 2 \times 50 + 3 \times 50$

$= 40 + 100 + 150 = 290 = \frac{290}{200} = 1{\cdot}45$

Average = 12 + 1·45 = 13·45

CONCEPT-05

(Replacement/Inclusion/Exclusion)

(प्रतिस्थापन/समावेशन/बहिष्करण)

Ex. There are 50 students in a class. One of them weighing 50 kg goes away and a new student joins. By this the average weight of the class is increased by $\frac{1}{2}$ kg. The weight of the new student is:

एक कक्षा में 50 विद्यार्थी हैं। एक विद्यार्थी जिसका वजन 50 किग्रा. है चला जाता है एवं नया विद्यार्थी आता है जिससे कक्षा का औसत वजन $\frac{1}{2}$ किग्रा. बढ़ जाता है। नये विद्यार्थी का वजन ज्ञात करें।

HINTS:

$$\text{Weight of new student} = \text{Old} + \frac{1}{2} \times 50$$

$$= 50 + 25 = 75 \text{ kg}$$

Ex. The mean weight of 34 students of a school is 42 kg. If the weight of the teacher is also included, the mean rises by 400 grams. Find the weight of the teacher (in kg).

एक विद्यालय में 34 छात्रों का औसत भार 42 किग्रा है। यदि अध्यापक का भार भी सम्मिलित कर लिया जाये तो औसत 400 ग्राम बढ़ जाता है। अध्यापक का भार ज्ञात करें

HINTS:

Method-01

Weight of teacher = Old Average + 0·4 × 35

= 42 + 14 = 56 kg.

Method-02

Let the weight of the teacher is x kg.

ATQ, $34 \times 42 + x = 35 \times 42{\cdot}4$

$\Rightarrow x = 56$ kg

Ex. The average height of 25 boys is 1.4 m. When 5 boys leave the group, then the average height increase by 0.15m. What is the average height of the 5 boys who leave?

25 लड़कों की औसत ऊँचाई 1.4 मी. है। जब 5 लड़के समूह को छोड़ देते हैं तो औसत ऊँचाई 0.15 मी. से बढ़ जाती है। 5 लड़के जिन्होंने समूह छोड़ा उनकी औसत ऊँचाई क्या है?

HINTS:

Method-01

Here Overall Average = 1.4 m

When 5 boys left the group, Average of 20 boys is increased by 0.15 m.

(जो लड़कों के औसत वृद्धि होगी वो छोड़ के जाने वाले बच्चों के औसत कमी आएगी)

$$\text{Deviation} = \frac{0{\cdot}15 \times 20}{5} = 0.6$$

Average of Left boys = 1.4 – 0.6 = 0.8 m

Method-02

Let the average height of all 5 boys be x m.

ATQ, $25 \times 1{\cdot}4 - 5 \times x = 20 \times 1{\cdot}55$

$\Rightarrow x = 0.8$ m

CONCEPT-06

(Cricket Based/क्रिकेट आधारित)

Ex. A cricket batsman had a certain average of runs for his 11 innings. In the 12th innings, he made a score of 90 runs after that his average run is decreased by 5. Find his average of runs after 12th innings.

एक बल्लेबाज की 11 पारियों का एक निश्चित औसत रन है। 12वीं पारी में, वह 90 रन बनाता है जिसके कारण उसका औसत 5 कम हो जाता है। 12वीं पारी के बाद नया औसत रन ज्ञात करें।

HINTS:

Let the initial average = x

$$\text{New Average} = \frac{(\text{Initial Innings}) \times \text{Average} + \text{Recent Run}}{\text{Total Innings}}$$

$$\Rightarrow x - 5 = \frac{11 \times x + 90}{12}$$

$\Rightarrow x = 150$

So, New average = 150 – 5 = 145

Method - 02

ATQ, Average Run is decreased by 5 .

Total in 11th innings = 11 × 5 = 55

So, In the 12th innings he made a score of 90 Runs.

The Average of Runs after 12th innings.

= (90 + 55) = 145

Ex. Average of 64 innings of a player is 62 runs, difference between his maximum and minimum score is 180 runs. If these two innings are excluded then the average of remaining innings is 60 runs. Then his maximum score is :

एक क्रिकेट के खिलाड़ी की 64 पारियों का औसत 62 रन है। उसके अधिकतम और न्यूनतम स्कोर का अंतर 180 रन है। उन दो पारियों को छोड़कर उसकी शेष पारियों का औसत 60 रन आता है। तदानुसार उस खिलाड़ी का अधिकतम स्कोर कितना है?

HINTS:

ATQ, $64 \times 62 - H - L = 62 \times 60$

$\Rightarrow 248 = H + L \rightarrow$ (i)

Given that,

$H - L = 180 \rightarrow$ (ii)

on adding (1) and (2), We get –

$$\begin{array}{rl} 248 & = H + L \\ 180 & = H - L \\ \hline 428 & = 2H \end{array}$$

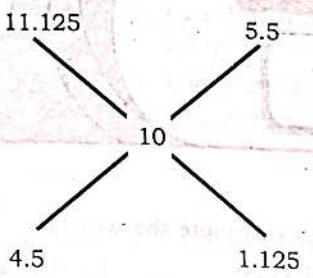
$\Rightarrow H = 214$

Ex. A cricketer whose bowling average is 11.125 runs per wicket. he takes 7 wickets for 38.5 runs and thereby decrease his average by 1.125. The number of wickets taken by him till last matches was:

एक क्रिकेटर जिसकी गेंदबाजी का औसत 11.125 रन प्रति विकेट है। 38.5 रन देकर वह 7 विकेट लेता है, जिससे उसका औसत 1.125 घट जाता है। अंतिम मैच तक उसके द्वारा लिये गये विकेटों की संख्या बताएँ।

HINTS:

$$\text{Bowling Avg.} = \frac{\text{Total Run}}{\text{Total Wicket}} = \frac{38\cdot5}{7} = 5.5$$



So, $\frac{7}{1\cdot125} \times 4\cdot5 = 28$

Number of wicket till the last match
= 28 + 7 = 35.

CONCEPT-07

(Age Based/आयु आधारित)

Ex. 5 years ago, the average age of A, B, C and D were 45 years. With the joining of E, the average age of all the five is 48 years. How old is E?
पाँच वर्ष पूर्व, A, B, C तथा D की औसत आयु 45 वर्ष थी। अब E सम्मिलित हो जाता है, तो पाँचों की औसत आयु 48 वर्ष हो जाती है। E की आयु ज्ञात करें।

HINTS:

Method–01

Total present age of (A,B,C,D) = (45+5)×4 = 200 years
Total present age of (A,B,C,D,E)= 48 × 5 = 240 years
Present Age of E = 240 – 200 = 40 years.

Method–02

Total present Average of (A,B,C,D) = 45 + 5 = 50
Total present Average of(A,B,C,D,E) = 48
Here We Can see that, after joining of E average of A,B,C,D is reduced by – 2.
Thus, Age of E = 50 – (2 × 5) = 40 years.

Ex. The average age of Ravi, his wife and their two children is 23 years. His wife is just 4 years younger than Ravi and his wife was 24 years old when his daughter was born. he was 32 years old when his son was born. The average age of Ravi and his daughter is ?
रवि, उसकी पत्नी और उसके 2 बच्चों की औसत आयु 23 वर्ष है। उसकी पत्नी उससे आयु में 4 वर्ष छोटी है। जब उसकी पुत्री का जन्म हुआ तब उसकी पत्नी 24 वर्ष की थी और जब उसके पुत्र का जन्म हुआ तब वह 32 वर्ष का था। रवि और उसकी पुत्री की औसत आयु ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Total Sum = 23 × 4 = 92

Ⓡ	Ⓦ	Ⓓ	Ⓢ	
32	28	4	0	= 64
|+x	|+x	|+x	|+x	

= 64 + 4x = 92
= x = 7
Ravi = 32 + 7 = 39
Daughter = 4 + 7 = 11

So, The average age of Ravi and his daughter

$$= \frac{(39+11)}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ years}$$

CONCEPT-08

(Number Based/संख्या आधारित)

Ex. Average of 25 natural numbers is 67. 1st number is increased by 1, 2nd number increased by 3 and 3rd number is increased by 5, and so on. find the new average.
25 प्राकृत संख्याओं की औसत 67 है। प्रथम संख्या को 1 से बढ़ा दिया गया, दूसरी संख्या को 3 से और तीसरे को 5 से और ऐसे ही आगे तो नई औसत ज्ञात करें।

HINTS:

We know, Average of n-odd number = n
So, Average of 25 odd no. = 25
Thus, New average = 67 + 25 = 92

Ex. The average of 21 numbers is 44. The average of first 11 numbers is 48 and that of last 11 numbers is 42. If 11th number is excluded, what is the average of the remaining number?
21 संख्याओं का औसत 44 है। पहली 11 संख्याओं का औसत 48 तथा अंतिम 11 संख्याओं का औसत 42 है। यदि 11वीं संख्या को हटा दिया जाए, तो शेष संख्याओं का औसत क्या होगा ?

HINTS:

No.	21	11	11
Average	44	48	42

⇒ + 44 – 22 = +22
11th Number = 44 + 22 = 66
New average after removing 11th number

$$= \frac{21\times44-66}{20} = 42.9$$

Ex. The average of 15 numbers is 45. The average of the first six numbers is 42 and that of last six numbers is 43. The seventh number is two times the 8th number but 5 more than the 9th number. The average of the seventh and the ninth number is :
15 संख्याओं का औसत 45 है। प्रथम छह संख्याओं का औसत 42 है और अंतिम छह संख्याओं का औसत 43 है। 7वीं संख्या, 8वीं संख्या की दोगुनी है, लेकिन 9वीं संख्या से 5 अधिक है, तो 7वीं और 9वीं संख्याओं का औसत कितना है?

HINTS:

	All	First	Last
Number	15	6	6
Average	45	42	43

Deviation = (–3 × 6) + (–2 × 6) = –30

Let	7th	8th	9th
	2x	x	2x – 5

Now, 5x – 5 = 45 × 3 + 30
⇒ 5x = 170 ⇒ x = 34

Average of 7th and 9th number = $\frac{68+63}{2}$ = 65.5

TIME & WORK

समय और कार्य

22

CONCEPT-01

If A completes a piece of work in 'x' days and B completes the same work in 'y' days, then –

यदि A किसी कार्य को 'x' दिनों में पूरा करता है और B उसी कार्य को 'y' दिनों में पूरा करता है, तो –

∴ Total time taken to complete the work by A and B both

A और B दोनों द्वारा कार्य को पूरा करने में लिया गया कुल समय

$$= \left(\frac{xy}{x+y}\right)$$

Ex. A can do a piece of work in 12 days whereas B can do the same work in 18 days. In how many days A and B together can do complete the same work?

A एक काम को 12 दिनों में कर सकता है जबकि B उसी काम को 18 दिनों में कर सकता है। तो कितने दिनों में A और B एक साथ मिलकर उस काम को पूरा कर सकते हैं?

HINTS:

Method-01

A and B can do the same work in $= \frac{18\times12}{30} = 7\frac{1}{5}$ days

Method-02

$A \to 12$ — 3

$B \to 18$ — 2

36 (Total Work, LCM of 12 and 18)

$$T_{(A+B)} = \frac{T.W}{T.E} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5} \text{ days}$$

CONCEPT-02

If A can do a work in 'x' days. B can do the same work in 'y' days, C can do the same work in 'z' days, then total time taken by A, B and C to complete the work together

यदि A किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकता है। B समान कार्य को 'y' दिनों में कर सकता है, C उसी कार्य को 'z' दिनों में कर सकता है, तो A, B और C द्वारा मिलकर कार्य को पूरा करने में लगा कुल समय

$$= \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{xyz}{xy+yz+zx}$$

Ex. A, B and C can do a work in 12, 15 and 20 days respectively. In how many days will they complete the same work together?

A, B तथा C किसी कार्य को क्रमशः 12, 15 तथा 20 दिनों में कर सकते हैं। एक साथ मिलकर वे उसी कार्य को कितने दिनों में पूरा करेंगे?

Method-01

A, B and C can complete the work in

$$= \frac{12\times15\times20}{(12\times15)+(15\times20)+(20\times12)} = \frac{12\times15\times20}{720} = 5 \text{ days}$$

Method-02

$A \to 12$ — 5

$B \to 15$ — 4

$C \to 20$ — 3

60 (LCM of 12, 15 and 20)

$$T_{(A+B+C)} = \frac{\text{Total Work}}{E_A+E_B+E_C} = \frac{60}{12} = 5 \text{ days}$$

CONCEPT-03

If A can finish $\frac{m}{n}$ part of the work in D days. Then, total time taken to finish the work by A = $\frac{n}{m} \times$ D days

यदि A किसी कार्य का $\frac{m}{n}$ भाग D दिनों में पूरा कर सकता है तो A द्वारा कार्य को पूरा करने में लगा कुल समय = $\frac{n}{m} \times$ D दिन

Ex. A can do one – third of a work in 15 days, B can do 75% of the same work in 18 days and C can do the same work in 36 days. B and C worked together for 8 days. In how many days will A alone complete the remaining work?

A किसी कार्य का एक-तिहाई भाग 15 दिनों में पूरा कर सकता है। B इसी कार्य का 75% भाग 18 दिनों में तथा C यही कार्य 36 दिनों में कर सकता है। B और C, 8 दिनों तक साथ कार्य करते हैं। A अकेला शेष कार्य कितने दिनों में पूरा करेगा?

HINTS:

A can finish the work in = $15 \times \frac{3}{1} = 45$ days.

Similarly, B can finish the work in $18 \times \frac{4}{3} = 24$ days.

Now,

$A \to 45$ — 8

$B \to 24$ — 15

$C \to 36$ — 10

360 (LCM of 45, 24 and 36)

Work done by B and C in 8 days = (B + C) × 8 = 25 × 8 = 200

Remaining work = 160

Time taken by A to finish the remaining work

$$= \frac{\text{Remaining work}}{\text{Efficiency of A}} = \frac{160}{8} = 20 \text{ Days}$$

@Baka_260

CONCEPT-04

If A and B can do a work in 'x' days. B and C can do the same work in 'y' days. C and A can do the same work in 'z' days. Then total time taken, when A, B and C work together

यदि A और B किसी काम को 'x' दिनों में कर सकते हैं। B और C उसी काम को 'y' दिनों में कर सकते हैं। C और A समान कार्य को 'z' दिनों में कर सकते हैं। तब A, B और C एक साथ उस कार्य को कितने दिनों में पूरा कर लेंगे

$$= \frac{2xyz}{xy + yz + zx} \text{ days}$$

Ex. Raghav and Aditya can complete a work in 3 days. Aditya and Ishan can complete the same work in 4 days. Ishan and Raghav can complete it in 6 days. How many days will it take for Raghav, Aditya and Ishan, combined together, to complete the same work?

राघव और आदित्य एक काम को 3 दिन में पूरा कर सकते हैं।, अदित्य और ईशान उसी काम को 4 दिन में पूरा कर सकते हैं। ईशान और राघव इसे 6 दिन में पूरा कर सकते हैं। राघव, आदित्य और ईशान को एक साथ मिलाकर उस काम को पूरा करने में कितने दिन लगेंगे?

HINTS:

Method-01

Work will finish by Raghav , Aditya and Ishan

$$= \frac{2\times3\times4\times6}{(3\times4)+(4\times6)+(6\times3)} = \frac{2\times3\times4\times6}{54} = 2\frac{2}{3} \text{ days.}$$

Method-02

R+A → 3 ⟍ 4
A+I → 4 — 3 — 12
I+R → 6 ⟋ 2

2(I+ R+A) = 9

Efficiency of (I+R+A) = $\frac{9}{2}$

$$\therefore T_{I+R+A} = \frac{W}{E} = \frac{12\times2}{9} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ days}$$

CONCEPT-05

Lefting the work from forward

(आगे से काम छोड़ देना)

If A can do a piece of work in x days and B can do the same work in y days if they work together for d days after that A leaves the work then the time taken by B to do the remaining work is

यदि A किसी काम को x दिनों मे कर सकता है और B उसी काम को y दिनों में पूरा कर सकता है अगर वे d दिनों तक साथ मिलकर काम करते हैं इसके बाद A काम छोड़ देता है तब B द्वारा शेष काम को करने में लिया गया समय

$$= \frac{xy-(x+y)\times d}{x} \text{ days}$$

Ex. A can finish a piece of the work in 16 days and B can finish it in 12 days. They worked together for 4 days and then A left. B finished the remaining work. For how many total number of days did B work to finish the work completely?

A एक काम को 16 दिनों में पूरा कर सकता है और B उसे 12 दिनों में पूरा कर सकता है। उन्होंने 4 दिनों तक एक साथ मिलकर काम किया और फिर A चला गया। B ने शेष काम अकेले पूरा किया। काम को पूरा समाप्त करने के लिए B ने कुल कितने दिनों तक काम किया?

HINTS:

Method-01

B will finish the remaining work in

$$= \frac{16\times12-(16+12)\times4}{16} = \frac{192-112}{16} = \frac{80}{16} = 5 \text{ days.}$$

Total number of days B worked = 4 + 5 = 9 days.

Method-02

A → 16 ⟍ 3
B → 12 ⟋ 4 — 48

Here A and B worked for 4 days and after that B had completed the work. Let the number of days B worked alone is 't' days.

So, 4(A+B) + B × t = T.W

⇒ 28 + 4t = 48

⇒ 4t = 20

⇒ t = 5 days

Total number of days B worked = 4 + 5 = 9 days.

CONCEPT-06

Lefting the work from backward

(पीछे से काम छोड़ देना)

A can do a piece of work in 'p' days and B can do the same work in 'q' days. They start the work together but A leaves 'd' days before the work is finished. Time taken to complete the work.

A किसी काम को 'p' दिनों में कर सकता है और B उसी काम को 'q' दिनों में कर सकता है वे एक साथ काम शुरू करते है लेकिन A काम समाप्त होने से 'd' दिन पहले काम छोड़ देता है काम पूरा करने में लगा समय।

$$= \frac{pq+qd}{p+q} \text{ days}$$

Ex. A and B working alone can complete a work in 8 days and 12 days, respectively. They started working together, but A left 2 days before completion of the work. In how many days was the work completed?

A और B अकेले काम करते हुए किसी काम को क्रमश: 8 दिन और 12 दिन में पूरा कर सकते हैं। उन्होंने एक साथ मिलकर काम करना शुरू किया, लेकिन A ने काम पूरा होने से 2 दिन पहले काम छोड़ दिया। काम कितने दिनों में पूरा हुआ?

@Baka_260

HINTS:

Method-01

Work completed in = $\frac{8\times12+12\times2}{(8+12)}=\frac{120}{20}=6$ days

Method-02

Tips: Add the work of left days(before completion of the work) in Total Work and Solve using basic concept.

$A \to 8$ (3) $B \to 12$ (2) → 24 + 6 = 30

Work completed in = $\frac{W}{E}=\frac{30}{5}=6$ Days

CONCEPT-07

Lefting the work from forward and backward both

(काम को आगे और पीछे दोनों ओर से छोड़ देना)

A can do a piece of work in x days, B in y days and C in z days. If all three of them start the work together but B leaves the work d days before its completion and C leaves the work after D days of starting, then the complete the work in

A किसी काम को x दिन में, B, y दिन में तथा C उसी काम को z दिन में कर सकता है यदि वे तीनों एक साथ मिलकर काम शुरू करते हैं लेकिन B काम समाप्त होने से d दिन पहले काम छोड़ देता है और C काम शुरू होने के D दिन बाद काम छोड़ देता है तब पूरा काम करने में लगा समय

$= \frac{xyz+zx\times d-xy\times D}{yz+zx}$ days

Ex. A, B and C can do a work in 10, 12 and 15 days respectively. They begin the work together but after 3 days C left the work and 4 days before B left the work. In how many days will the total work be completed?

A, B और C क्रमश: 10, 12 और 15 दिनों में एक काम कर सकते हैं। वे एक साथ काम शुरू करते हैं लेकिन 3 दिन बाद C ने काम छोड़ दिया और 4 दिन पहले B ने काम छोड़ दिया। कुल कार्य कितने दिनों में पूरा होगा?

HINTS:

Method-01

Work completed in

$=\frac{10\times12\times15+15\times10\times4-10\times12\times3}{12\times15+15\times10}=\frac{2040}{330}=\frac{68}{11}$ days

Method-02

$A \to 10$ (6) $B \to 12$ (5) $C \to 15$ (4) → 60

Work completed in = $\frac{W}{E}=\frac{60-3C+4B}{A+B}$

$=\frac{60-12+20}{11}=\frac{68}{11}$ days

CONCEPT-08

Concept of alternate days

(वैकल्पिक दिनों की अवधारणा)

Ex. A and B can complete a work in 10 and 20 days respectively. A started the work and they work in alternate days. In how many days will the total work will be completed?

A और B क्रमश: 10 और 20 दिनों में एक काम पूरा कर सकते हैं। A ने काम शुरू किया और वे एकांतर दिनों में काम करते हैं। कुल कार्य कितने दिनों में पूरा होगा?

HINTS:

$A \to 10$ (2) $B \to 20$ (1) → 20

Work done by A and B in 2 days = 2 + 1 = 3

So, Work done by A and B in 12 days = 3 × 6 = 18

Since A has started the work, so A will work on 13th Day.

Work Done till 13th day = 18 + 2 = 20

Thus, 13th Day Work will be finished.

CONCEPT-09

(Concept of efficiency/कार्यक्षमता की अवधारणा)

Efficiency of a machine or person is the rate of work done in per unit time.

किसी मशीन या व्यक्ति की दक्षता प्रति इकाई समय में किये गये कार्य की दर है।

Efficiency (E) = $\frac{\text{Work done}}{\text{Time taken}}$

Also, Efficiency(E) $\propto \frac{1}{\text{No. of days}}$

If the efficiency of A is twice the efficiency of B, then ratio of time taken by A and B will be = 2 : 1

यदि A की कार्यकुशलता, B की कार्यकुशलता की दोगुनी है, तो A और B द्वारा लिया गया समय का अनुपात 2 : 1 होगा।

Ex. Tim is thrice as good a workman as Joya and they together finish a piece of work in 75 days. In how many days will Tim alone finish the work?

टिम, जोया की तुलना में तीन गुना अधिक कुशल कारीगर है और दोनों मिलकर एक काम को 75 दिनों में पूरा करते हैं। टिम अकेला उस काम को कितनों दिनों में पूरा करेगा?

HINTS:

Ratio of efficieny Tim and Joya = 3 : 1

Total work = $(E_T + E_J) \times$ time taken

= (3 + 1) × 75 = 300

Tim alone will finish the work in

$=\frac{\text{Total work}}{E_T}=\frac{300}{3}=100$ days.

CONCEPT-10

MDH Concept

$$\frac{M_1D_1H_1}{W_1} = \frac{M_2D_2H_2}{W_2}$$

M → Man, D → Days

H → Hours, W → Work/Wages

Ex. If 35 men can finish a work in 6 days, then in how many days can 7 men do half of the same work?

यदि 35 आदमी एक काम को 6 दिनों में पूरा कर सकते हैं, तो 7 आदमी उसी काम का आधा हिस्सा कितने दिनों में पूरा कर सकते हैं?

HINTS:

$$\frac{M_1D_1H_1}{W_1} = \frac{M_2D_2H_2}{W_2}$$

$$\Rightarrow \frac{35\times 6}{2} = \frac{7\times x}{1}$$

$\Rightarrow x = 15$ days

Ex. Eighteen persons working 8 hours a day can complete 3 units of work in 10 days. How many days are required by 25 persons to complete 5 units of work working 6 hours a day?

प्रतिदिन 8 घंटे कार्य करते हुए, अठारह व्यक्ति 3 यूनिट कार्य 10 दिन में पूरा कर सकते हैं। प्रतिदिन 6 घंटे कार्य करते हुए 25 व्यक्ति 5 यूनिट कार्य किने दिन में पूरा करेंगे?

HINTS:

$$\frac{M_1D_1H_1}{W_1} = \frac{M_2D_2H_2}{W_2}$$

$$\Rightarrow \frac{18\times 10\times 8}{3} = \frac{25\times x\times 6}{5}$$

$\Rightarrow x = 16$ hours

Ex. 64 men working 8 hours a day plan to complete a piece of work in 9 days. However, 5 days later they found that they had completed only 40% of the work. They now wanted to finish the remaining work in 4 days. How many hours per day should they need to work in order to achieve the target?

64 आदमी प्रतिदिन 8 घंटे काम करके किसी कार्य को 9 दिन में समाप्त करने की सोचते हैं। 5 दिन बाद उन्हें पता चलता है कि उन्होंने 40% काम पूरा किया है। शेष कार्य को वो 4 दिन में पूरा करना चाहते हैं। शेष कार्य को निर्धारित समय में पूरा करने के लिए उनको प्रतिदिन कितने घंटे काम करना होगा?

HINTS:

Here, number of days and employee is constant.

$$\frac{64M\times 8\times 5}{40\%} = \frac{64M\times x\times 4}{60\%}$$

$x = 15$ hours

Ex. 6 men or 2 women or 4 boys can finish a work in 77 days. How many days will 1 man, 1 woman and 1 boy together take to finish the same work?

6 पुरुष या 2 महिलाएं या 4 लड़के किसी काम को 77 दिन में पूरा कर सकते हैं। 1 पुरुष, 1 महिला और 1 लड़का मिलकर उसी काम को पूरा करने में कितने दिन लेंगे?

HINTS:

$6M \times 77 = 2W \times 77 = 4B \times 77$

$6M = 2W = 4B$

M : W : B

2 : 6 : 3

$(1M + 1W + 1B) = 6M \times 77$

$\Rightarrow 11x = 6 \times 2 \times 77$

$\Rightarrow x = 84$ days

CONCEPT-11

If A working alone takes x days more than A & B and B working alone takes y days more than A & B. Then the number of days taken by A & B working together to finish the same job

यदि A अकेले कार्य करते हुए A और B से x दिन अधिक लेता है और B अकेले कार्य करते हुए A और B से y दिन अधिक लेता है। तो A और B द्वारा एक साथ उसी कार्य को पूरा करने में लगने वाले दिनों की संख्या

$\Rightarrow \sqrt{xy}$ days.

Ex. A and B working together can complete a work in d days. Working alone, A takes (8+d) days and B takes (18+d) days to complete the same work. Find the value of d.

A और B एक साथ काम करते हुए d दिनों में एक काम पूरा कर सकते हैं। अकेले काम करने में A को (8 + d) दिन और B को (18 + d) दिन लगता है। d का मान ज्ञात करें।

HINTS:

A and B will finish the work in,

$d = \sqrt{18\times 8} = \sqrt{144} = 12$ days.

CONCEPT-12

(Concept of wages/मजदूरी की अवधारणा)

- Total wages = Per day wage × Number of days worked

  कुल वेतन/मजदूरी = प्रति दिन वेतन/मजदूरी × काम किए गए दिनों की संख्या

- Wage is shared among the person in the ratio of the efficiency of the person.

  वेतन/मजदूरी का बंटवारा व्यक्ति की कार्यकुशलता के अनुपात में किया जाता है।

Ex. A and B worked together and received a total of Rs 18,000 for 15 days. A's efficiency in the work was 5 times that of B's. The daily wage of A (in Rs) was:

A और B ने एक साथ काम किया और 15 दिनों के लिए कुल 18,000 रुपये प्राप्त किए। कार्य में A की कुशलता B की कुशलता की 5 गुना थी। A का दैनिक मजदूरी (रुपये में) कितनी थी?

HINTS:

Ratio of efficiency of A and B = 5 : 1

$$\text{Wages per day of A and B} = \frac{\text{Total sum}}{\text{Time taken}}$$

$$= \frac{18000}{15} = \text{Rs.}1200$$

$$\text{Daily wage of A} = \text{Rs. } 1200 \times \frac{5}{6} = \text{Rs. } 1000$$

PIPE & CISTERN

नल और टंकी

23

Amount of water released or filled = Rate × time.

छोड़े गए या भरे गए पानी की मात्रा = दर × समय।

Note: We will use '+' sign for pipe used to fill the tank and '–' sign for pipe used to empty the tank.

हम टैंक को भरने के लिए उपयोग किए जाने वाले पाइप के लिए '+' चिह्न का उपयोग करेंगे और टैंक को खाली करने के लिए उपयोग किए जाने वाले पाइप के लिए '–' चिह्न का उपयोग करेंगे।

CONCEPT-01

Two taps 'A' and 'B' can fill a tank in 'x' hours and 'y' hours respectively. If both the taps are opened together, then how much time it will take to fill the tank?

दो नल 'A' और 'B' एक टंकी को क्रमशः 'x' घंटे और 'y' घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों नलों को एक साथ खोल दिया जाए, तो टंकी को भरने में कितना समय लगेगा?

$$\text{Required time} = \left(\frac{xy}{x+y}\right)\text{hrs}$$

Ex. Pipe P can fill a tank alone in 15 hours. Pipe Q can fill the same tank alone in 10 hours. In how much time can they together fill the tank?

पाइप P, 15 घंटे में अकेले एक टैंक को भर सकता है। पाइप Q उसी टैंक को 10 घंटे में भर सकता है। वे एक साथ कितने समय में टैंक को भर सकते हैं?

HINTS:

Both pipe P and Q can fill the tank in

$$= \frac{15\times10}{(15+10)} = \frac{150}{25} = 6 \text{ hours}$$

CONCEPT-02

Two taps 'A' and 'B' can empty a tank in 'x' hours and 'y' hours respectively. If both the taps are opened together, then time taken to empty the tank will be

$$\text{Required time} = \left(\frac{xy}{x+y}\right)\text{hrs}$$

दो नल 'A' और 'B' एक टैंक को क्रमशः 'x' घंटे और 'y' घंटे में खाली कर सकते हैं। यदि दोनों नल एक साथ खोले जाते हैं, तो टंकी को खाली करने में लगा समय $= \left(\frac{xy}{x+y}\right)$ घंटे

Ex. Pipe P can empty a tank alone in 15 hours. Pipe Q can empty the same tank alone in 10 hours. In how much time can they together empty the tank?

पाइप P, 15 घंटे में अकेले एक टैंक को खाली कर सकता है। पाइप Q उसी टैंक को 10 घंटे में खाली कर सकता है। वे एक साथ कितने समय में टैंक को खाली कर सकते हैं?

HINTS:

Both pipe P and Q can empty the tank in

$$= \frac{15\times10}{(15+10)} = \frac{150}{25} = 6 \text{ hours}$$

CONCEPT-03

If x, y, z,..... all taps are opened together, then the time required to fill/empty the tank will be:

यदि x, y, z,..... सभी नल एक साथ खोले जाते हैं, तो टंकी को भरने/खाली करने में लगने वाला समय होगा:

$$\frac{1}{x} \pm \frac{1}{y} \pm \frac{1}{z} \pm ..... = \frac{1}{T}$$

where T, is the required time.

जहाँ T, अभीष्ट समय है।

Note: Positive result shows that the tank is filling and Negative result shows that the tank is getting empty.

नोट: धनात्मक परिणाम दर्शाता है कि टंकी भर रही है और ऋणात्मक परिणाम दर्शाता है कि टंकी खाली हो रही है।

CONCEPT-04

If a pipe fills a tank in 'x' hours but it takes 't' more hours to fill it due to leakage in tank. If tank is filled completely, then in how many hours it will be empty? [due to leakage outlet]

यदि एक पाइप किसी टंकी को 'x' घंटे में भरता है लेकिन टंकी में रिसाव के कारण उसे भरने में 't' घंटे अधिक समय लगते हैं। यदि टंकी पूरी तरह भरी हो, तो उसे खाली करने में कितना समय लगेगा। [रिसाव आउटलेट के कारण]

$$\text{Required time} = \frac{x(x+t)}{t}\text{ hours}$$

Ex. If a pipe fills a tank in 20 hours but it takes 4 hours more to fill it due to leakage in the tank. If the tank is filled completely, then in how many hours it will be empty?

यदि एक पाइप किसी टंकी को 20 घंटे में भरता है लेकिन टंकी में रिसाव के कारण उसे भरने में 4 घंटे अधिक लगते हैं। यदि टंकी अच्छी तरह से भरी जाती है, तो रिसाव को पूरी टंकी को खाली करने में कितना समय लगेगा?

@Baka_260

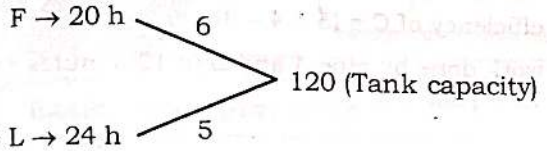
HINTS:

Method-01

Tank will empty in due to leakage

$$= \frac{20\times(20+4)}{4} = 120h$$

Method-02



Efficiency of filling pipe (F) = 6

Efficiency of leakage (L) = 6 – 5 =1

Tank will empty in due to leakage $= \frac{120}{-1} = 120\ h$

CONCEPT-05

A tap 'A' can fill a tank in 'x' hours and 'B' can empty the tank in 'y' hours.

एक नल 'A' एक टंकी को 'x' घंटे में भर सकता है और 'B' टंकी को 'y' घंटे में खाली कर सकता है।

(a) Time taken to fill the tank when both are opened.

टैंक को भरने में लगने वाला समय जब दोनों खोले जाते हैं।

$$= \left(\frac{xy}{x-y}\right) \text{ hrs } [x>y]$$

Ex. Pipe A can fill an empty tank completely in 10 hours. Pipe B can empty this fully filled tank in 15 hours. If both the pipes are opened simultaneously, in what time will the empty tank be filled?

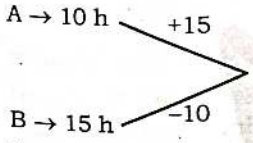
पाइप A किसी खाली टैंक को 10 घंटें में पूर्ण रूप से भर सकता है। पाइप B इस पूर्ण रूप से भरे गए टैंक को 15 घंटे में खाली कर सकता है। यदि दोनों पाइपों को एक साथ खोला जाता है, तो खाली टैंक कितने समय में भरेगा?

HINTS:

Method-01

Tank will be filled in $= \frac{150}{15-10} = \frac{150}{5} = 30\ h$

Method-02



When both the pipe open simultaneously, Tank will be filled in $= \frac{150}{15-10} = \frac{150}{5} = 30\ h$

(b) Time taken to empty the tank when both are opened.

टंकी को खाली करने में लगा समय जब दोनों खोले जाते हैं।

$$= \left(\frac{xy}{x-y}\right) \text{ hrs } [y>x]$$

Ex. Pipe A can fill an empty tank completely in 15 hours. Pipe B can empty this fully filled tank in 10 hours. If both the pipes are opened simultaneously, in what time will the full tank be emptied?

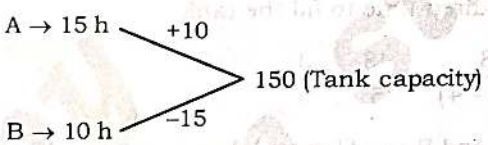
पाइप A एक खाली टैंक को 15 घंटे में पूरी तरह भर सकता है। पाइप B इस पूरी तरह भरे टैंक को 10 घंटे में खाली कर सकता है। यदि दोनों पाइप एक साथ खोल दिए जाएं तो पूरा टैंक कितने समय में खाली हो जाएगा?

HINTS:

Method-01

Tank will be empty in $= \frac{150}{10-15} = \frac{150}{-5} = 30\ h$

Method-02



When both the pipe open simultaneously, Tank will be empty in $= \frac{150}{15-10} = \frac{150}{5} = 30\ h$

CONCEPT-06

Two taps A and B can fill a tank in x hours and y hours respectively. If both the pipes are opened together, then the time after which pipe B should be closed so that the tank is full in t hours

दो नल A और B एक टंकी को क्रमश: x घंटे और y घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों पाइपों को एक साथ खोल दिया जाता है, तो पाइप B को कितने समय बाद बंद कर देना चाहिए ताकि टैंक t घंटे में भर जाए,

Required time/ आवश्यक समय

$$= \left[y\left(1-\frac{t}{x}\right)\right] \text{ hours}$$

Ex. Pipe A can fill a tank in 16 hour and pipe B fills it in 24 hour. If both the pipes are opened together after how many hours should pipe B be closed, so that the tank is filled in 12 hours?

पाइप A एक टंकी को 16 घंटे में भर सकता है और पाइप B उसे 24 घंटे में भर सकता है। यदि दोनों पाइपों को एक साथ खोल दिया जाए तो कितने घंटे बाद पाइप B को बंद कर देना चाहिए, ताकि टंकी 12 घंटे में भर जाए?

HINTS:

Required time $= 24\left(1-\frac{12}{16}\right) = 24\times\frac{4}{16} = 6\ h$

@Baka_200

Ex. Pipe V_1 can fill an empty tank in 8 hours. Pipe V_2 can fill the same tank in 16 hours. Pipe V_3 can empty the same tank completely in 12 hours. If three pipes are opened simultaneously, then in how much time will the tank be fill completely?

पाइप V_1 एक खाली टैंक को 8 घंटे में भर सकता है। पाइप V_2 उस टैंक को 16 घंटे में भर सकता है। पाइप V_3 उसी भरे हुए टैंक को 12 घंटों में खाली कर सकता है। यदि तीनों पाइप एक साथ खोले जाते हैं, तो टैंक कितने समय में पूरी तरह भर जाएगा?

HINTS:

$V_1 \rightarrow 8$ Hr, $V_2 \rightarrow 16$ Hr, $V_3 \rightarrow 12$ Hr; 6, 3, −4 → 48 (Total capacity) unit

Three pipes are opened simultaneously.

So, Required time to fill the tank.

$$= \frac{48}{(6+3-4)} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}h$$

Ex. Pipes A and B can fill a tank in 8 hours and 12 hours, respectively whereas pipe C can empty the full tank in 6 hours. A and B are opened for 3 hours and then closed and C is opened instantly. C will empty the tank in:

पाइप A और B किसी टंकी को क्रमशः 8 घंटे और 12 घंटे में भर सकते हैं लेकिन पाइप C भरी हुई टंकी को 6 घंटों में खाली कर सकता है। पाइप A और B को 3 घंटे के लिए खोला जाता है फिर बंद कर दिया जाता है और पाइप C को तुरंत खोल दिया जाता है। पाइप C टंकी को कितने समय में खाली कर देगा?

HINTS:

A → 8 Hours, B → 12 Hours, C → 6 Hours; 3, 2, −4 → 24 (Total capacity)

(A + B) opened for 3 hours together

= (3 + 2) × 3 = 15 unit

Now, C can empty the filled tank

$$= \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ hours.}$$

Ex. Pipe A and B are filling pipes while C is an emptying pipe. A and B can fill a tank in 72 and 90 minutes respectively. When all the three pipes are opened together, the tank gets filled in 2 hours. A and B are opened together for 12 minutes, then closed and C is opened. The tank will be empty after

पाइप A और B भरने वाले पाइप हैं जबकि पाइप C खाली करने वाला पाइप है। A और B किसी टंकी को क्रमशः 72 और 90 मिनट में भर सकते हैं। जबकि इन तीनों पाइप को एक साथ चालू कर दिया जाता है तो टंकी 2 घंटे में भर जाती है। A और B को 12 मिनट तक एक साथ चालू किया जाता है, फिर बंद करके C को चालू किया जाता है। टंकी कितने समय बाद खाली हो जाएगा?

HINTS:

A → 72 Min, B → 90 Min; 5, 4 → 360 (Total capacity); A+B−C → 120 Min, 3

efficiency of C = (5 + 4 − 3) = 6

work done by pipe A and B in 12 minutes = (5 + 4) × 12 = 108.

Time taken to empty by pipe C = $\frac{108}{6}$ = 18 min

Ex. Pipe A and B fill a tank in 43.2 minutes and 108 minutes respectively, Pipe C can empty it at 3 litres/minutes. When all the three pipes are opened together, they will fill the tank in 54 minutes. The capacity (in litres) of the tank is :

पाइप A और B क्रमशः 43.2 मिनट और 108 मिनट में एक टैंक भरते हैं। पाइप C इसे 3 लीटर/मिनट पर खाली कर सकता है। जब तीनों पाइप एक साथ खोले जाएंगे, तो वे 54 मिनट में टैंक को भर देंगे। टैंक की क्षमता (लीटर में) है –

HINTS:

A → 43.2, B → 108, A + B + C → 54; 5, 2, 4 → 216

∴ efficiency of C = 4 − (5 + 2) = − 3

i.e., C empty 3 units in 1 min.

We have, C can empty 3 liters in 1 min.

Therefore capacity of tank = 216 × 1 = 216 liter

Ex. Pipe A can fill a tank in 12 hours and pipe B takes 18 hours to fill it. Both pipes were opened together and a leak was spotted which increased the filling-up time by 48 minutes. Find how many hours will it take for the leak to empty a full tank.

पाइप A एक टैंक को 12 घंटे में भर सकता है और पाइप B इसे भरने में 18 घंटे लेता है। दोनों पाइपों को एक साथ खोला गया और एक रिसाव देखा गया जिससे भरने का समय 48 मिनट बढ़ गया। ज्ञात कीजिए कि एक भरे हुए टैंक को रिसाव द्वारा खाली करने में कितने घंटे लगेंगे।

HINTS:

$$t_{(A+B)} = \frac{12 \times 18}{12+18} = 7 \text{ hrs. } 12 \text{ min.}$$

A → 12, B → 18, A + B + C → 8; 6, 4, 9 → 72

∴ efficiency of leak = 9 − (6 + 4) = − 1

Leak will empty the whole tank = $\frac{72}{1}$ = 72 min.

TIME & DISTANCE
समय और दूरी

24

Basic Concepts/मूलभूत सिद्धांत

Speed $= \frac{\text{Distance}}{\text{Time}}$, चाल $= \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$

Time $= \frac{\text{Distance}}{\text{Speed}}$, समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

Distance = Speed × Time

दूरी = चाल × समय

Two friends left Delhi for Goa at 5 a.m. One friend who went by train reached Goa in 24 hours and other friends who went by Aeroplane reached in 3 hours.

दो मित्र दिल्ली से गोवा के लिए पूर्वाह्न 5 बजे निकलते हैं। एक मित्र रेलगाड़ी से 24 घंटे में और दूसरा हवाई जहाज से 3 घंटे में गोवा पहुँचता है।

We know that speed of aeroplane is more than train so time taken by train is more than that of aeroplane.

हम जानते हैं कि हवाई जहाज की चाल रेलगाड़ी से अधिक होती है। इसलिए रेलगाड़ी द्वारा हवाई जहाज से अधिक समय लिया गया।

It can be infer from above explanation that

Speed $\propto \frac{1}{\text{Time}}$ (When distance is constant)

उपर्युक्त से यह स्पष्ट है कि चाल $\propto \frac{1}{\text{समय}}$ (जहाँ दूरी नियत है)

If two athlete run for constant time then distance covered by the athlete whose speed is more would be more.

यदि दो धावक नियतम समय के लिए दौड़े तो जिसकी चाल अधिक होगी वह अधिक दूरी तय करेगा।

It can be infer from above explanation that distance ∝ time taken (when speed is constant)

उपर्युक्त विवरण से स्पष्ट है कि दूरी ∝ लिये गये समय (जब चाल नियत हो)

Units of Measurement/माप के मात्रक

- Time is usually measured in second (sec), minutes (min) or hours (hr).
  समय को सामान्यत: सेकंड, मिनट अथवा घंटे में मापते हैं।
- Distance is usually measured in meters (m), kilometre (km) or mile, yards or feet.
  दूरी को सामान्यत: मीटर, किलोमीटर, मील अथवा यार्ड में मापते हैं।
- Speed is usually measured in km/h, mile/h or m/sec.
  चाल को सामान्यत: किमी/घंटा, मील/घंटा अथवा मी/सेकंड में मापते हैं।

Conversion of Units/मात्रकों का रूपांतरण

1. 1 h = 60 min = 60 × 60 = 3600 sec.
2. 1 km = 1000 m
3. 1 mile = 1.606 km or 1 km = 0.6214 mile of 5 mile = 8 km
4. 1 yard = 3 ft
5. a km/h $= a \times \frac{1000}{60 \times 60}$ m/sec

$= a \times \frac{5}{18}$ m/sec

a m/sec $= a \times \frac{60 \times 60}{1000}$ km/h

$= a \times \frac{18}{5}$ km/h

Ex. Dimple is travelling at a speed of 90 km per hour on a highway, while Sachin is travelling at a speed of 108 km per hour. What is the difference in their speeds, in metres per second?

डिंपल एक राजमार्ग पर 90km/h की चाल से यात्रा कर रही है, जबकि सचिन 108km/h की चाल से यात्रा कर रहा है। मीटर प्रति सेकंड में, उनकी चाल में अंतर की गणना करें।

HINTS:

Required difference = (108 – 90) = 18 km/h

$\Rightarrow 18 \times \frac{5}{18} = 5 m/s$

CONCEPT-01

Ex. A car when increases its usual speed by 30%, it would reach certain destination 2 hours early. Find usual time taken by car to cover same distance.

एक कार की चाल में यदि 30% की वृद्धि की जाती है तो यह किसी निश्चित गंतव्य स्थान पर 2 घंटे पहले पहुँच जाती है। उसी दूरी को तय करने में कार द्वारा लिया गया समान्य समय ज्ञात कीजिए।

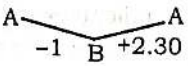
	Initial	:	final
s =	10		13
t =	13		10

$I = \frac{2}{3} \times 13 = \frac{26}{3} hr$

$F = \frac{2}{3} \times 10 = \frac{20}{3} hr$

$\frac{26}{3} hr = 8\frac{2}{3} hr = 8h + \frac{2}{3} \times 60 min = 8h\ 40min$

Ex. A takes 2 hours 30 minutes more than B to walk 40 km. If A doubles his speed, then he can make it in 1 hour less than B. How much time (in hours) does A require for walking a 40 km distance?
40 km की दूरी तय करने में A को B से 2 घंटे 30 मिनट अधिक लगते हैं। यदि A अपनी चाल दोगुनी करता है, तो वह इसे B से 1 घंटा कम समय में तय कर सकता है। A द्वारा 40 km की दूरी तय करने में लगने वाला समय (घंटे में) ज्ञात करें।
HINTS:



Speed of A = 1 : 2

Time of A = 2 : 1

1unit ⟶ $1+\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{7}{2}$

Time taken by A covered distance

2unit = $2 \times \frac{7}{2}$ = 7h

CONCEPT-02

A man go a certain distance with x km/hr and comes back with a speed of y km/hr. If he takes t hour to go and come back. Find the distance?
एक आदमी x किमी/घंटा के साथ एक निश्चित दूरी तय करता है और y किमी/घंटा की गति से वापस आता है। यदि उसे जाने और वापस आने में t घंटे लगता है। तब दूरी ज्ञात कीजिए?

Then distance/दूरी = $\left(\frac{xy}{x+y}\right) \times t$

Ex. A student goes to school at a speed of $5\frac{1}{2}$ km/h and returns at a speed of 4 km/h. If he takes $4\frac{3}{4}$ hours for the entire journey, then the total distance covered by the student (in km) is:
एक छात्र $5\frac{1}{2}$ किमी/घंटा की गति से स्कूल जाता है और 4 किमी/घंटा की गति से वापस आता है। यदि वह पूरी यात्रा में $4\frac{3}{4}$ घंटे लेता है, तो छात्र द्वारा तय की गई कुल दूरी (किमी में) है:
HINTS:
इस प्रकार के प्रश्नों को फार्मूला से solve करना lengthy होता है इसलिए Ratio method का प्रयोग करें

Method-01

Ratio of speed = 11 : 8
then,
Ratio of time = 8 : 11
Given that,

19 unit = $\frac{19}{4}$ hours

then,

8 unit = $\frac{19}{4 \times 19} \times 8$ = 2hours

then,

Total distance = $2 \times \frac{11}{2}$ = 11 km

Method-02

$D = \left(\frac{\frac{11}{2} \times 4}{\frac{11}{2}+4}\right) \times \frac{19}{4}$

$= \left(\frac{44}{19}\right) \times \frac{19}{4}$ = 11 km

CONCEPT-03

A man go a certain distance with x km/hr and he comes back with a speed of y km/hr. If he takes t hours more to come back than go. Find the distance.
एक आदमी x किमी/घंटा के साथ एक निश्चित दूरी तय करता है और वह y किमी/घंटा की गति से वापस आता है। यदि वह जाने से वापस आने में t घंटे अधिक लेता है। दूरी का पता लगाएं।

Then distance/दूरी

= $\left(\frac{xy}{x-y}\right)$ × (difference between time)

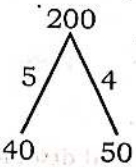
➲ The difference between time can be solved by the following tricks
समय के अंतर को निम्नलिखित तरकीबों से हल किया जा सकता है

Same important cases in speed

Early, early case	'–' (subtraction)
Late, Late case	'–' (subtraction)
Early, Late case	'+' (Addition)
Late, Early case	'+' (Addition)

Ex. Ramesh drives from his home at a speed of 40 km/h and reaches his college 25 minutes late. The next day he increases his speed by 10 km/h, yet he is late by 10 minutes. How far is his college from his home?
रमेश अपने घर से 40 km/h की चाल से गाड़ी चलाता है और 25 मिनट देरी से अपने कॉलेज पहुँचता है। अगले दिन वह अपनी गाड़ी की चाल 10 km/h बढ़ा देता है, फिर भी कॉलेज पहुँचने में उसे 10 मिनट की देरी हो जाती है। उसका कॉलेज उसके घर से कितनी दूर है?
HINTS:
इस प्रकार के प्रश्नों को फार्मूला से solve करना lengthy होता है इसलिए Ratio method का प्रयोग करें

Method-01



1 unit = 15 minutes

then,

total distance (200 unit) = $200 \times \frac{1}{4}$ = 50 km

Method-02

Distance/दूरी

$= \frac{40 \times 50}{50-40} \times \frac{25-10}{60}$

$= \frac{40 \times 50}{10} \times \frac{15}{60}$

= 50km

Ex. A train covers a certain distance at a certain speed, if the speed of the train is 6km/hr more, then to cover the same distance it takes 6 hours less. But if the speed of the train is 6 km/hr less, then it would take 10 hrs more to cover the same distance. Find the distance covered by the train.

कोई रेलगाड़ी किसी निश्चित चाल से एक निश्चित दूरी तय करती है, यदि रेलगाड़ी की चाल 6 कि.मी/घंटा अधिक होती, तो उसी दूरी को तय करने के लिए 6 घंटे कम लगते। लेकिन, यदि रेलगाड़ी की चाल 6 कि.मी/घंटा कम होती, तो समान दूरी तय करने में 10 घंटे अधिक लगते। रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Let, original speed of Train = s

$$\frac{s(s+6)6}{6} = \frac{s(s-6)}{6} \times 10$$

$3s + 18 = 5s - 30$

$2s = 48$

$s = 24$ km/h

∴ Total distance covered by train

$$= \frac{24 \times 30}{6} \times 6 = 720 \text{ km}$$

CONCEPT-04

Average speed/औसत चाल

$$\text{Average speed} = \frac{\text{Total covered distance}}{\text{Total taken time}}$$

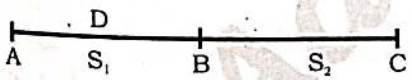
$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल तय की गई दूरी}}{\text{कुल लिया गया समय}}$$

Cases for Average Speed
औसत चाल की स्थितियाँ

1. When distance is constant
जब दूरी नियत हो
2. When time is constant
जब समय नियत हो

Case-I/स्थिति-I

When distance is constant
जब दूरी नियत हो



$$t_1 = \frac{D}{S_1} \qquad t_2 = \frac{D}{S_2}$$

Average speed/औसत चाल

$$= \frac{D+D}{\frac{D}{S_1}+\frac{D}{S_2}} = \frac{2D}{D\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)} = \frac{2S_1S_2}{S_1+S_2}$$

From above explanation, it is clear that when distance is constant, average speed is free from distance. It means there is no need of distance or question can be solved through any supposed distance.

उपर्युक्त विवरण से यह स्पष्ट है कि जब दूरी नियत हो तो औसत चाल दूरी से स्वतंत्र होती है। अर्थात् दूरी की कोई आवश्यकता नहीं होती है अथवा प्रश्न को हल करने के लिए दूरी को कुछ मान लिया जाता है।

Ex. A car covers a certain distance travelling at a speed of 60 km/h and returns to the starting point at a speed of 40 km/h. The average speed of the car for the entire journey is:

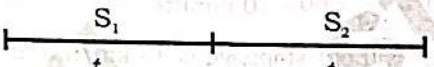
एक कार 60 km/h की गति से चलते हुए एक निश्चित दूरी तय करती है और 40 km/h की गति से प्रारंभिक बिंदु पर वापस लौटती है। पूरी यात्रा के लिए कार की औसत गति क्या है?

HINTS:

$$\text{Average speed of Car} = \frac{2 \times 60 \times 40}{60+40} = 48 \text{ km/h}$$

Case-II/स्थिति-II

When time is constant
जब समय नियत हो



$D_1 = S_1 \times t \qquad D_2 = S_2 \times t$

Average speed/औसत चाल =

$$\boxed{\frac{D_1+D_2}{t+t} = \frac{S_1t+S_2t}{t+t} = \frac{t(S_1+S_2)}{2t} = \frac{S_1+S_2}{2}}$$

$$\text{Average speed/ औसत चाल} = \frac{\text{Sum of the speed}}{\text{Number of speeds / observations}}$$

$$\frac{\text{चालों का योग}}{\text{चालों/ पर्यवेक्षणों की संख्या}}$$

Ex. Vikas covered a certain distance by bike. If he covers 40% of the distance at 40 km/h, 50% of the distance at 25 km/h and the remaining 10% distance at 10 km/h. Find his average speed over the whole distance.

विकास ने एक निश्चित दूरी बाइक से तय की। यदि वह 40% को 40 km/h की चाल से, 50% दूरी 25 km/h की चाल से और शेष 10% की दूरी 10 km/h की चाल से तय करता है, तो पूरी दूरी तय करने में उसकी औसत चाल ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Let total distance = 100 km

$$\text{Average speed} = \frac{100}{\frac{40}{40}+\frac{50}{25}+\frac{10}{10}} = 25 \text{km/h}$$

CONCEPT-05

Average speed with stoppage
(ठहराव के साथ औसत चाल)

When stoppage time is taken into consideration while calculating average speed, it is said average speed with stoppage.

जब औसत चाल की गणना करते हुए ठहराव के समय को भी शामिल करते हैं तो इसे ठहराव के साथ औसत चाल के कहते हैं।

Excluding stoppage, the average speed of a train is u and with stoppage its average speed is v. Then, the stoppage time per hour

ठहराव को छोड़कर, एक ट्रेन की औसत गति u है और ठहराव के साथ इसकी औसत गति v है। फिर, प्रति घंटे रुकने का समय

$$= \frac{\text{Diff. between their average speed}}{\text{Speed without stoppage}} = \frac{u-v}{u}$$

With $u > v$ and $u, v \neq 0$

Ex. Without any stoppage, speed of the bus is 54 km/hr and with stoppage its speed is 45 km/ hr. The bus stops for how many minutes per hour?

बिना किसी ठहराव के बस की चाल 54 कि.मी./घंटा है और ठहराव के साथ इसकी चाल 45 कि.मी./घंटा है। बस प्रति घंटा कितने मिनट के लिए रुकती है?

HINTS:

$$\left|\frac{54-45}{54}\right| \times 60 = \frac{9}{54} \times 60 = 10 \text{ minute}$$

Ex. Speed of a car without stoppage is 48 km/h and that of with stoppage is 36 km/h. If car stops each time for 5 min then find the number of stoppage in 1 hr 20 min.

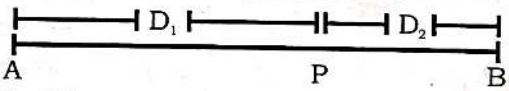
एक कार की बिना ठहराव के चाल 48 किमी/घंटा और ठहराव के साथ 36 किमी/घंटा है। यदि कार प्रत्येक बार 5 मिनट के लिए रूकती है तो 1 घंटे 20 मिनट में ठहराव की संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Total stoppage time $= \frac{12}{48} \times 80 = 20$ min

$\therefore$ Number of stops $= \frac{20}{5} = 4$

CONCEPT-06



On this concept three types of questions are asked in the exams and they are based on the given formula below :

इस अवधारणा पर परीक्षा में तीन प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं जो नीचे दिये गये सूत्रों पर आधारित होते हैं।

(a) $T = \sqrt{T_1 \times T_2}$

(b) $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$

(c) $D = S_1T_1 + S_2T_2$

$S_1 \rightarrow$ Speed of train starting from A

(A से शुरू होने वाली ट्रेन की गति)

$S_2 \rightarrow$ Speed of train starting from B

(B से शुरू होने वाली ट्रेन की गति)

$T \rightarrow$ Time after which they meet each other.

(समय जिसके बाद वे एक-दूसरे से मिलती है)

$T_1 \rightarrow$ Time taken by the train 1 to reach at its destination after crossing each other.

(ट्रेन 1 द्वारा एक-दूसरे को पार करने के बाद अपने गंतव्य तक पहुँचने में लिया गया समय)

$T_2 \rightarrow$ Time taken by the train 2 to reach at its destination after crossing each other.

(ट्रेन 2 द्वारा एक-दूसरे को पार करने के बाद अपने गंतव्य तक पहुँचने में लिया गया समय)

$D \rightarrow$ Total distance form A to B.

(A से B तक की कुल दूरी)

Ex. Shyam starts to walk from A towards B at 10 a.m. and Radha starts to walk from B towards A at 10 a.m. and after meeting at C they both reach their destination in 24 and 54 minutes respectively. Find out the time they meet at C.

श्याम A से B की ओर 10 बजे चलना शुरू होता है और राधा B से A की ओर सुबह 10 बजे चलना शुरू करती है और बिन्दु C पर मिलने के बाद वे दोनों क्रमश: 24 और 54 मिनट में अपने गंतव्य तक पहुँचती हैं। बिन्दु C पर मिलने का समय ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$T = \sqrt{24 \times 54} = 36$ min

Meeting time on C = 10 : 36 min

Ex. A and B started their journeys from X to Y and Y to X, respectively. After crossing each other, A and B completed remaining parts of their journeys in $6\frac{1}{8}$ hours and 8 hours, respectively. If the speed of A is 32 km/h, then the speed, in km/h, of B is:

A और B ने क्रमश: X से Y और Y से X के लिए अपनी यात्रा शुरू की। एक-दूसरे को पार करने के बाद, A और B ने अपनी यात्रा के शेष भाग को क्रमश: $6\frac{1}{8}$ घंटे और 8 घंटे में पूरा किया। यदि A की चाल 32 km/h है, तो B की चाल km/h में ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Let speed of B = x

$$\frac{x}{32} = \sqrt{\frac{49}{64}}$$

$$\frac{x}{32} = \frac{7}{8}$$

$x = 28$ km/h

Ex. Two cars A and B start simultaneously from a certain place at the speed of 40 kmph and 55 kmph, respectively. The car B reaches the destination 2 hours earlier than A. What is the distance between the starting point and destination?

दो कारें A और B क्रमश: 40 किमी प्रति घंटे और 55 किमी प्रति घंटे की गति से एक निश्चित स्थान से एक साथ शुरू होती हैं। कार B से 2 घंटे पहले गंतव्य पर पहुंचती है। प्रारंभिक बिंदु और गंतव्य के बीच की दूरी क्या है?

HINTS:

Let the time taken by car A to reach destination is x hours.

So, the time taken by car B to reach destination is $(x-2)$ hours.

$= S_1T_1 + S_2T_2$

$= 40T_1 = 55\ (T_1 - 2)$

$= 40T_1 = 55T_1 - 110$

$= 15T_1 = 110 = 7$ hours 20 minutes

CONCEPT-07

Ex. I walk a certain distance and ride back taking a total time of 37 minutes. I could walk both ways in 55 minutes. How long would it take me to ride both ways?

मुझे एक निश्चित दूरी पैदल जाने और बाइक से वापस आने में कुल 37 मिनट का समय लगता है। मुझे दोनों तरफ पैदल जाने और आने में 55 मिनट लगते हैं। मुझे दोनों तरफ बाइक से जाने और वापस आने में कितना समय लगेगा?

HINTS:

Let distance covered by foot = x

distance covered by bike = y

$x + y = 37$

$x + x = 2x = 55$

$x = 27.5$

$\therefore\ y = 9.5$

So, total time taken when both side travelled by bike $= 9.5 \times 2 = 19$ min

CONCEPT-08

Relative Speed/सापेक्ष चाल

Relative speed refers to the speed of one moving body in relation to another.

सापेक्ष चाल से तात्पर्य किसी गतिशील वस्तु की दूसरे के सापेक्ष चाल से है।

- Relative speed in same direction./एक ही दिशा में सापेक्ष चाल

$= S_1 - S_2$

Where S_1= Speed of first object and S_2= Speed of second object.

- Relative speed in opposite direction./विपरीत दिशा में सापेक्ष चाल

$= S_1 + S_2$

Where S_1= Speed of first object and S_2= Speed of second object.

Ex. The distance between two cities A and B is 80 km. A motorcycle rider starts from A towards B at 7 am at a speed of 10 km/hr. Another motorcyclist starts from B towards A at 8 am at a speed of 25 km/hr. At what time will they cross each other?

दो शहरों A और B के बीच की दूरी 80 किमी है। एक मोटरसाइकिल सवार सुबह 7 बजे 10 किमी/घंटा की गति से A से B की ओर चलता है। एक अन्य मोटरसाइकिल चालक सुबह 8 बजे 25 किमी/घंटा की गति से B से A की ओर चलना शुरू करता है। वे किस समय एक दूसरे को पार करेंगे?

HINTS:

In one hour, the earlier rider covers a distance of 10 km.

The distance between the two hours = 80 – 10 = 70 km.

Hence,

The two riders approach each other with a relative speed of 10 + 25 = 35 kmph.

The time taken = $\frac{70}{35} = 2$ hrs.

Therefore, they meet each other at (8 + 2) = 10 am.

Ex. A train leaves a station A at 7 am and reaches another station B at 11 : 00am. Another train leaves B at 8 am and reaches A at 11:30am. The two trains cross one another at

एक ट्रेन सुबह 7 बजे स्टेशन A से निकलती है और 11: 00 बजे दूसरे स्टेशन B पर पहुंचती है। एक अन्य ट्रेन सुबह 8 बजे B से निकलती है और 11 : 30 बजे A पर पहुंचती है। दोनों ट्रेन एक दूसरे को किस समय पार करती हैं?

Time Speed

4hr — 7 km/h

28 km (Distance)

$\frac{7}{2}$hr — 8 km/h

$t = \frac{21}{15} = 1\frac{2}{5}$hr

$= 1\text{hr}\frac{2}{5} \times 60$

= 1 hr 24 min

Hence, two trains cross one another at

8 + 1 hr 24 min = 9 : 24 am.

Ex. A policeman sees a theif at a distance of 150 m. He starts chasing the theif who is running at a speed of 5 m/sec, while the policeman chases with a speed of 7m/sec.

एक पुलिसकर्मी 150 मी की दूरी पर एक चोर को देखता है। वह 5 मी/सेकण्ड, की चाल से भाग रहे चोर का पीछा करना आंरभ करता है, जबकि पुलिसकर्मी 7 मी/सेकण्ड की चाल से पीछा करता है।

(i) What is the time taken by the police?

पुलिस को कितना समय लगा?

(ii) Find the distance covered by the thief when he is caught?

पकड़े जाने से पहले चोर द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए?

(iii) Find the distance covered by the police man when he caught the thief?

चोर को पकड़ने पर पुलिस द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए?

HINTS:

(i) Relative speed = 7 – 5 = 2 m/sec.

Time = $\frac{150}{2} = 75$ sec.

$\frac{S_P}{S_T} = \frac{D_P}{D_T} = \frac{7}{5}$

@Baka_260

We have 7 – 5 = 2 units = 75 m

(ii) Distance (D_T) = 75 × 5 = 375 m

(iii) Distance (D_P) = 75 × 7 = 525 m

Ex. A thief was noticed by a policeman from a distance of 80 metres. The speed of the thief is 21 km/h and the policeman is 20 km/h. What is the distance between them after 18 seconds?

एक पुलिसकर्मी ने चोर को 80 मीटर की दूरी से देखा। चोर की चाल 21 km/h है और पुलिसकर्मी की चाल 20 km/h है। 18 सेकण्ड के बाद उनके बीच की दूरी क्या होगी?

HINTS:

Police (21km/h) —80 metres→ thief (20km/h)

∴ Distance between thief and police after 18 sec

$$= 80 - 1 \times \frac{5}{18} \times 18 = 75 \text{ metres}$$

Ex. A thief stole jewellery from a shop at 8:15 p.m. and left on a bike at a speed of 60 km/h. The police were informed at 8:30 p.m. If the police want to arrest the thief at 9:00 p.m., what should be the minimum speed of the police jeep?

एक चोर ने एक दुकान से 8:15 p.m. पर जेवर चुराए और 60 km/h की चाल से बाइक पर भाग गया। पुलिस को 8:30 p.m. बजे सूचना दी गई। यदि पुलिस चोर को 9:00 p.m. बजे गिरफ्तार करना चाहती है, तो पुलिस जीप की न्यूनतम चाल कितनी होनी चाहिए?

HINTS:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{15}{S_P - 60}$$

$$\Rightarrow S_P - 60 = 30$$

$$S_P = 90 \text{ km/h}$$

Ex. A thief running at speed of 'x' km/h is chased by a policeman running at a speed of 10 km/h. If the thief is ahead by 100 metres, the policeman catches the thief after 3 minutes. At what speed is the thief running ('x' being the unknown speed)?

'x' km/h की चाल से दौड़ रहे एक चोर का पीछा, 10 km/h की चाल से दौड़ रहे एक पुलिसकर्मी द्वारा किया जाता है। यदि चोर 100 मीटर आगे है, तो पुलिसकर्मी 3 मिनट के बाद चोर को पकड़ लेता है। तो बताइए कि चोर किस चाल से भाग रहा है ('x' अज्ञात चाल है)?

HINTS:

$$\Rightarrow 3 \times 60 = \frac{100}{(10-x) \times \frac{5}{18}}$$

$$\Rightarrow 9 = \frac{18}{10-x}$$

$$x = 8 \text{ km/h}$$

CONCEPT-09

Buses are leaving bus terminal after every 10 minutes (T_1) But, a person who is moving towards the terminal meets the bus after every 8 minutes (T_2).

प्रत्येक 10 मिनट (T_1) बाद बसें बस टर्मिनल से निकलती हैं लेकिन, एक व्यक्ति जो टर्मिनल की ओर बढ़ रहा है वह हर 8 मिनट (T_2) के बाद बस से मिलता है।

$$\frac{\text{Speed of man}}{\text{Speed of bus}} = \frac{|T_1 - T_2|}{T_2}$$

'OR'

$$\frac{\text{Speed of Train}}{\text{Speed of Sound}} = \frac{|T_1 - T_2|}{T_2}$$

Here, /यहाँ,

T_1 = Time after which buses leaves the terminal.

T_1 = समय जिसके बाद बसें टर्मिनल से निकलती हैं।

T_2 = Time after which it meets with the person.

T_2 = समय जिसके बाद बसें व्यक्ति से मिलती हैं।

Ex. Buses start from a bus terminal with a speed of 20 km/hr at intervals of 10 minutes. What is the speed of a man coming from the opposite direction towards the bus terminal if he meets the buses at intervals of 8 minutes?

बसें बस टर्मिनल से 10 मिनट के अंतराल पर 20 किमी/घंटा की गति से निकलती हैं। बस टर्मिनल की ओर विपरीत दिशा से आने वाले व्यक्ति की गति क्या है यदि वह 8 मिनट के अंतराल पर बसों से मिलता है?

HINTS:

Let speed of man = x

$$\frac{x}{20} = \frac{10-8}{8} = \frac{2}{8}$$

$x = 5 \text{km/h}$

Ex. Two guns are fired from the same place at an interval of 13 minutes. A person in a train approaching the place hears the sound firing 12 min 30 second after the first; Find speed of train. Suppose that the sound travels at 300 m/sec.

दो बंदूकें 13 मिनट के अंतराल पर एक ही स्थान से दागी जाती हैं। ट्रेन में बैठा एक व्यक्ति उस स्थान की ओर आ रहा है और पहली ट्रेन के 12 मिनट 30 सेकंड बाद फ़ायरिंग की आवाज सुनता है; ट्रेन की गति ज्ञात कीजिए। मान लीजिए कि ध्वनि 300 मीटर/सेकंड की गति से चलती है।

HINTS:

Let speed of train = x

$$\frac{x}{300} = \frac{13-12.5}{12.5} = \frac{0.5}{12.5}$$

$x = 12 \text{m/sec}$

@Baka_Yoo

TRAIN
रेलगाड़ी

25

Some important concept/कुछ महत्वपूर्ण सिद्धांत

(i) When train passing a pole or static object then distance covered will be equal to the length.

जब ट्रेन किसी खंभे या स्थिर वस्तु से गुजरती है तो तय की गई दूरी लंबाई के बराबर होगी।

$$D = L_T + L_O$$

Where/जहाँ

L_T = Length of Train/रेलगाड़ी की लंबाई

L_O = Length of Object/वस्तु की लंबाई

(ii) When a train passes another train in same direction distance covered will be $L_1 + L_2$

जब एक ट्रेन उसी दिशा में दूसरी ट्रेन से गुजरती है तो तय की गई दूरी $L_1 + L_2$ होगी

$S = S_1 - S_2$ (Same Direction)

(iii) When a train passes another train in opposite direction distance covered will be $L_1 + L_2$

जब एक ट्रेन विपरीत दिशा में दूसरी ट्रेन से गुजरती है तो तय की गई दूरी $L_1 + L_2$ होगी

$S = S_1 + S_2$ (Opposite Direction)

Generally, Length of the train is given in meter and speed is given in km/hr.So, always focus on the units.

सामान्यत: ट्रेन की लंबाई मीटर में और गति किमी/घंटा में दी जाती है। इसलिए, सदैव इकाई पर ध्यान दें।

Ex. 150 m long train crosses a man in 8 min. Find the speed of train (in km/h).

150 मीटर लम्बी ट्रेन एक व्यक्ति को 8 मिनट में पार करती है। ट्रेन की चाल (किमी/घंटा में) ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$$\text{Speed} = \frac{\text{Distance}}{\text{Time}} = \frac{150}{8\times60}\times\frac{18}{5} = \frac{9}{8}\text{km/h}$$

Ex. A train passes two bridges of lengths 800 m and 400 m in 100 seconds and 60 seconds respectively. The length of the train is:

एक रेलगाड़ी 800 मीटर और 400 मीटर लंबाई के दो पुलों से क्रमश: 100 सेकंड और 60 सेकंड में गुजरती है। रेलगाड़ी की लंबाई है:

HINTS:

$$T = \frac{D}{S} \qquad T = \frac{D}{S}$$

$$S_T = \frac{L_T+800}{100} = S_T = \frac{L_T+400}{60}$$

$$\frac{L_T+800}{100} = \frac{L_T+400}{60}$$

$$3L_T + 2400 = 5L_T + 2000$$

$$400 = 2L_T$$

$$L_T = 200\text{ m}$$

Ex. A train 280 m long is moving at a speed of 60 km/h. What is the time taken by the train to cross a platform 220 m long?

60 किमी प्रति घंटे की चाल से चल रही 280 मीटर लंबी एक रेलगाड़ी 220 मीटर लंबे किसी प्लेटफॉर्म को पार करने में कितना समय लेती है?

HINTS:

$$T = \frac{D}{S}$$

$$T = \frac{280+220}{60\times\frac{5}{18}} = \frac{500\times18}{60\times5} = 30\text{ sec}$$

Ex. The ratio of speeds of two trains is 10 : 9. The time taken by them to cross a pole is in the ratio 4 : 3. If the difference between their lengths is 156 metres then find the length of the smaller train?

दो ट्रेनों की चालों का अनुपात 10 : 9 है। एक खंभे को पार करने के लिए उनके द्वारा लिए गए समय का अनुपात 4 : 3 है। यदि उनकी लम्बाईयों का अंतर 156 मीटर है तो छोटी ट्रेन की लंबाई ज्ञात कीजिए?

HINTS:

Given that

Speed = 10 : 9

Time = 4 : 3

then,

Distance = 40 : 27

Given that 13unit = 156

$$\text{Length of the smaller train} = 27\times\frac{156}{13} = 324\text{ metre}$$

Ex. Two trains of equal length cross a pole in 5 sec and 7 sec respectively. In what time they will cross each other going in same direction

दो समान लंबाई की रेलगाड़ी एक खंभे को क्रमश: 5 सेकण्ड और 7 सेकण्ड में पार करती है। समान दिशा में चलते हुए वे एक-दूसरे को कितने समय में पार करेगी?

HINTS:

35 → (Length of train)

(Speed) → 7 — 5

(Time) → 5 — 7

$$\text{Required Time} = \frac{35\times2}{2} = 35\text{ sec}$$

Ex. Two trains of length 160m and 180m respectively cross a pole in 5 sec and 6 sec respectively. In what time they will cross each other going in same direction?

दो रेलगाड़ी जिसकी लंबाई क्रमश: 160. मीटर और 180 मीटर है किसी खंभे को क्रमश: 5 सेकण्ड और 6 सेकण्ड में पार करती है। समान दिशा में चलते हुए वे एक-दूसरे को कितने समय में पार करेगी?

HINTS:

D → 80 : 90

T → 5 : 6

S → 16 : 15

$$T = \frac{170}{1} = 170 \text{ sec}$$

Ex. Two trains cross a man standing on a platform in 27 sec and 17 sec respectively while in opposite direction crosses each other in 23 sec. Find ratio of speed of the trains?

दो रेलगाड़ी किसी प्लेटफॉर्म पर खड़े एक व्यक्ति को क्रमश: 27 सेकण्ड और 17 सेकण्ड में पार करती है जबकि विपरीत दिशा में चलते हुए एक-दूसरे को 23 सेकण्ड में पार करती है। दोनो रेलगाड़ियों की चाल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS:

Time → 27 17

23 → Relative Time

Speed → 6 : 4

Required ratio of speed = 3 : 2

Ex. A 225 m long train is running at a speed of 30 km/h. How much time does it take to cross a man running at 3 km/h in the same direction?

30 किमी/घंटे की चाल से चल रही 225 मीटर लंबी रेलगाड़ी सामान दिशा में 3 किमी/घंटे की चाल से चलने वाले किसी व्यक्ति को पार करने में कितना समय लेती है?

HINTS:

$$T = \frac{D}{S}$$

$$T = \frac{225 \times 18}{27 \times 5} = 30 \text{ sec}$$

Ex. Ratio of speed of two trains is 5 : 3. Both trains start from station A and B respectively and meet at point P. If distance between both station is 60 km then find how much more distance first train covered?

दो रेलगाड़ियों की चालों का अनुपात 5 : 3 है। दोनों रेलगाड़ी क्रमश: स्टेशन A और B से निकलकर बिन्दु P पर मिलती है। यदि दोनों स्टेशनों के बीच की दूरी 60 किमी हो तो पहली रेलगाड़ी ने कितनी दूरी अधिक तय की?

HINTS:

$$\frac{D_1}{D_1} = \frac{5}{3} > 8 \rightarrow 60 \text{ km}$$

$$1 \text{ unit} = \frac{60}{8}$$

Required (extra) distance covered by A

$$= \frac{60}{8} \times 2 = 15 \text{ km}$$

Ex. A carriage driving in fog passed a man who was walking at the rate of 6km/hr, in the same direction. He could see the carriage for 4 minutes and if visibility was 200m, the speed of the carriage was:

कोहरे में चलने वाली एक गाड़ी, समान दिशा में 6 किमी/घंटा की चाल से चलने वाले एक व्यक्ति को पार करती है। वह गाड़ी को 4 मिनट तक देख सकता है और यदि दृश्यता 200 मीटर थी, तो गाड़ी की चाल थी:

HINTS:

D = S × T

200m = (x − 6) km/h × 4min

$$\frac{200}{1000} = (x-6) \times \frac{4}{60}$$

$$3 = x - 6$$

$$\Rightarrow x = 9 \text{km/h}$$

★★★★★

@Baka_200

RACE & CIRCULAR MOTION

दौड़ और वृत्तीय गति

26

Common statements used in questions based on race./ दौड़ पर आधारित प्रश्नों में उपयोग किये जाने वाले सामान्य कथन

Given below are some statements, which are explained in detail, understand these statements carefully and after that you will be able to solve the questions easily.

नीचे कुछ कथन दिए गए हैं, जिनको विस्तृत रूप से समझाया गया है इन कथनों को ध्यान से समझे और इसके बाद आप सवालों को आसानी से हल कर पाएंगे।

- In a race of 1 km, A beats B by 100 metre.

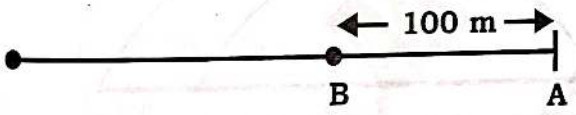
1 किमी की दौड़ में A, B को 100 मीटर के अंतर से हराता है।

In this case, Person A covers the distance of 1 km but Person B covers only (1 km – 100 m) = 900 m and time taken by both the person is same.

इस स्थिति में, व्यक्ति A 1 किमी की दूरी तय करता है लेकिन व्यक्ति B केवल (1 किमी – 100 मीटर) = 900 मीटर की दूरी तय करता है और दोनों व्यक्तियों द्वारा लिया गया समय समान है।

Diagrammatic representation:

आरेखीय निरूपण:



	A	B
Distance	1000 m	900 m
Time	T	T
Speed →	10 :	9

- In a race of 1 km, A beats B by 10 sec.

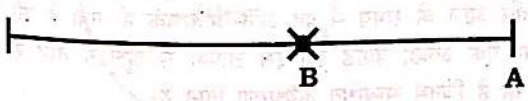
1 किमी की दौड़ में A, B को 10 सेकंड के अंतर से हराता है।

In this case, Suppose Person A covers the distance of 1 km in T seconds then another Person B will take (T + 10) seconds to cover the same distance.

इस मामले में, मान लीजिए कि व्यक्ति A 1 किमी की दूरी T सेकंड में तय करता है तो दूसरे व्यक्ति B को समान दूरी तय करने में (T + 10) सेकंड लगेंगे।

Diagrammatic representation:

आरेखीय निरूपण:



	A	B
Distance	1000 m	1000 m
Time	T	(T + 10) sec
Speed →	T :	(T+10)

- In a race of 1 km, A can give B a start of 100 metre.

1 किमी की दौड़ में A, B को 100 मीटर की शुरूआत देता है।

The meaning of giving start is that the one person will cover the entire distance and another person will not cover the length of the start or in another words the another person will start the race from the ahead of start length.

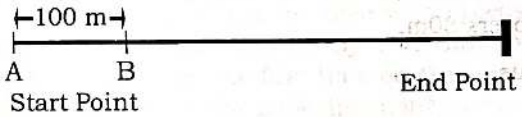
शुरूआत देने का अर्थ यह है कि एक व्यक्ति पूरी दूरी तय करेगा और दूसरा व्यक्ति शुरूआत की लंबाई तय नहीं करेगा या दूसरे शब्दों में कहें तो दूसरा व्यक्ति शुरूआत की लंबाई से आगे से दौड़ शुरू करेगा।

In the given statement , Person A covers the distance of 1 km and and person B covers 1km - 100m(length of start) = 900m.

दिए गए कथन में, व्यक्ति A 1 किमी की दूरी तय करता है और व्यक्ति B 1 किमी – 100 मीटर (प्रारंभ की लंबाई) = 900 मीटर की दूरी तय करता है।

Diagrammatic representation:

आरेखीय निरूपण:



	A	B
Distance	1000 m	900 m
Time	T	T
Speed →	10 :	9

- **A can give B a start of t minutes :** This statement implies that A will start t minutes after B starts from the starting point.

A, B को t मिनट की शुरूआत देता है : इस कथन का अर्थ है कि शुरूआती बिन्दु से B के t मिनट बाद A शुरू करता है।

- In a race of 1 km, A gives B a start of 150 metre and still wins by 10 sec.

1 किमी की दौड़ में A, B को 150 मीटर की शुरूआत देता है और फिर भी 10 सेकंड के अंतर से जीत जाता है।

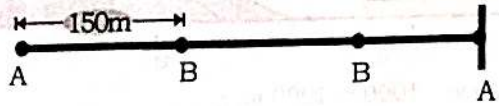
In the given statement , Person A covers the distance of 1 km and and person B covers 1km - 150m (length of start) = 850 m and suppose person A takes time T to reach at the end point then person B will take T + 10 sec.

@Baka_200

दिए गए कथन में, व्यक्ति A 1 किमी की दूरी तय करता है और व्यक्ति B 1 किमी - 150 मीटर (शुरूआत की लंबाई) = 850 मीटर की दूरी तय करता है और मान लीजिए कि व्यक्ति A को अंतिम बिंदु पर पहुंचने में T समय लगता है तो व्यक्ति B को T + 10 सेकंड लगेगा।

Diagrammatic representation:

आरेखीय निरूपण:



	A	B
Distance	1000 m	850 m
Time	T sec	(T+10)sec

Dead Heat : A dead heat situation is when all participants reach the finishing point at the same instant of time.

डेड हीट : एक ऐसी स्थिति है जिसमें सभी प्रतिभागी अंत बिन्दु पर एक ही समय पर पहुँचते हैं।

SOME EXAMPLES

Ex. In a 100-m race, A beats B by 20 m and B beats C by 20 m. By how much distance does A beat C.

100 m की दौड़ में A, B को 20 m से हराता है और B, C को 20 m से हराता है। A, C को कितनी दूरी से हराता है?

HINTS:

In this question there is two statements.

According to first statement, In 100m race, A covers 100m and B covers (100-20) = 80m & according to 2nd Statement in 100m race B covers 100m and C covers 80m.

Thus,

	A	B	C
	100	80	80
	100	100	80
	10000	8000	6400
$\times\frac{1}{100}$	100	80	64

In 100m, A will beat C by 100 – 64 = 36m

Ex. In a 1200 m race, bike A beats bike B by 100 m. Bike B beats bike C by 100 m in a 600 m race. If bike A beats bike C by 30 sec in a 720 m race, then what is the speed of bike C?

1200 m की दौड़ में बाइक A, बाइक B को 100 m से हराती है। 600 m की दौड़ में बाइक B, बाइक C को 100 m से हराती है। यदि बाइक A 720 m की दौड़ में बाइक C को 30 सेकण्ड से हरा देती है, तो बाइक C की बताएं।

HINTS:

A	B	C
1200	1100	1100
600	600	500
72 :	66 :	55

	A : C
Speed →	72 : 55
Time →	55 : 72

17 unit = 30 sec

$\therefore$ 1 unit = $\frac{30}{17}$ sec

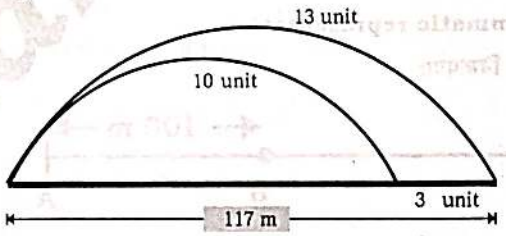
Speed of Bike C = $\frac{720}{72}\times\frac{17}{30}=\frac{17}{3}$ m/s

Ex. A's speed is 30% more than that of B. If A and B run a race on a 117 m length race, what part of the length of the race should A give B as a head start, so that the race ends in a dead heat?

A की चाल B की चाल से 30% अधिक है। यदि A और B, 17 मीटर लंबी दौड़ लगाते हैं, तो A को दौड़ की लंबाई का कितना भाग B को शुरूआती बढ़त के रूप में देना चाहिए, ताकि दौड़ बराबरी पर समाप्त हो सके?

HINTS:

	A : B
Speed	13 : 10



Head-start = $\frac{117}{13}\times 3 = 27$ m

Thus, A give B 27m as a head start to B to end the race in a dead heat.

CIRCULAR MOTION/वृत्तीय गति

Over the years many questions based on circular speed have been asked in various exams especially in the exams conducted by SSC and in today's time it has become very necessary for the students to have a good command over them. Total 5 types of questions are being asked from this topic, the concepts related to which are as follows-

बीते वर्षों में विभिन्न परीक्षाओं में खास तौर पर SSC के द्वारा आयोजित किये जाने वाली परीक्षाओं में वृत्तीय गति पर आधारित बहुधा प्रश्न पूछे गए हैं और आज के समय में यह अति आवश्यक हो गया है की छात्रों को इनपर एक अच्छी पकड़ हो। इस टॉपिक से कुल 5 तरह से प्रश्न पूछे जा रहे हैं जिनसे सम्बंधित अवधरणा निम्न हैं-

@BaKa_260

What kinds of questions are asked on Circular Track?

वृतीय पथ पर किस तरह के प्रश्न पूछे जाते हैं?

- After how many seconds they will meet for the first time?/ कितने सेकंड के बाद वे पहली बार मिलेंगे?
- After how many seconds they will meet for the first time at starting point?/ शुरुआती बिंदु पर वे कितने सेकंड के बाद मिलेंगे?
- At how many points on the track they will meet?/ वे ट्रैक पर कितने बिन्दुओं पर मिलेंगे?
- When will be their n^{th} meeting?/ वे n वीं बार कब मिलेंगे?
- At what distance the nth meeting will take place?/ वे n वीं बार कितनी दूरी पर मिलेंगे?

Ex. A → 5 m/s ; B → 3 m/s; Track length → 240 m. If they start simultaneously from the same point in the same direction.

यदि वे एक ही दिशा की ओर एक ही बिन्दु से एक साथ दौड़ना शुरू करते हैं।

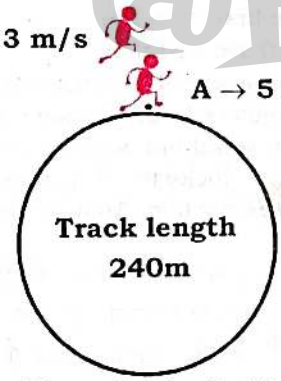
(i) After how many seconds they will meet for the first time?/ कितने सेकंड के बाद वे पहली बार मिलेंगे?

HINTS:

For the first meeting the faster one has to travel one round more than the slower one.

पहली बार मिलने के लिए तेज गति से दौड़ने वाले को धीमे गति से दौड़ने वाले से एक चक्कर अधिक लगाना पड़ता है।

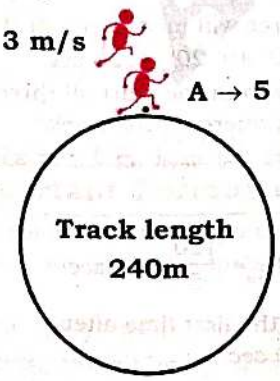
Slow	Fast
A	B
x round	$(x + 1)$ round



They will meet for the first time after

$$= \frac{\text{Track Length}}{S_A - S_B} = \frac{240}{5-3} = \frac{240}{2} = 120 \text{ second}$$

(ii) After how many seconds they will meet for the first time at starting point?/ शुरूआती बिन्दु पर वे कितने सेकंड के बाद मिलेंगे?



HINTS:

Time taken to complete the 1 round by first cyclist is =

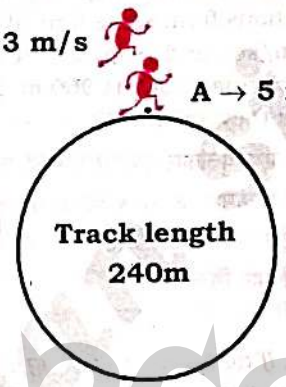
$$\frac{240}{5} = 48 \text{ sec}$$

Time taken to complete the 1 round by second cyclist is = $\frac{240}{3} = 80$ sec.

No. of times they will meet at starting points = LCM (48, 80) =240 sec.

(iii) At how many points on the track they will meet?

वे ट्रैक पर कितने बिन्दुओं पर मिलेंगे?



HINTS:

Keep in mind, *If two person running on a circular track in opposite direction we add the simplest ratio's of the speed to find the number of distinct point they will meet.*

Ratio of speed = 5 : 3

Thus, Required Number of meeting points = 5 + 3 = 8.

Ex. In a circular race of 1600 m, A and B start from the same point and at the same time with speeds of 27 km/h and 45 km/h, respectively. After how long will they meet again for the first time on the track when they are running in the same direction?

1600 m की वृत्ताकार दौड़ में A और B समान बिंदु से और समान समय पर क्रमशः 27 km/h और 45 km/h की चाल से शुरू करते हैं। जब वे समान दिशा में दौड़ रहे हैं, तो कितने समय बाद वे ट्रैक पर पहली बार फिर मिलेंगे?

HINTS:

They will meet for the first time after

$$= \frac{\text{Track Length}}{S_B - S_A} = \frac{1600}{45-27} \times \frac{18}{5} = 320 \text{ sec}$$

Ex. In a race around a circular cycling track of 75 km, two cyclists are riding at a speed of 30 km/h and 25 km/h. After what time (in hours) will they meet at the point from where they started their journey?

75 km के एक वृत्ताकार साइकिल ट्रैक के परितः एक दौड़ में दो साइकिल सवार 30 km/h और 25 km/h की चाल से साइकिल चला रहे हैं। कितने समय (घंटों में) के बाद वे उस बिंदु पर मिलेंगे, जहाँ से उन्होंने अपनी यात्रा शुरू की थी?

@Baka 260

HINTS:

Time taken to complete the 1 round by first cyclist is

$= \frac{75}{30} = \frac{5}{2}$ h

Time taken to complete the 1 round by second cyclist is

$= \frac{75}{25} = 3$ h

They will meet at starting points after

$= \text{LCM}\left(\frac{5}{2}, 3\right) = 15$ h

Ex. Anjali and Babita are running on a circular track in opposite directions from same time at same point with speeds of 8 m/sec and 6 m/sec, respectively. If the length of the circular track is 960 m, how many times distinct points they will meet?

अंजलि और बबीता एक वृत्ताकार ट्रैक पर एक ही समय और एक ही बिन्दु से विपरीत दिशाओं में क्रमश: 8 m/s और 6 m/s की चाल से दौड़ रही हैं। यदि वृत्ताकार ट्रैक की लम्बाई 960 m है, तो वे अलग-अलग मिलन बिन्दुओं पर कितनी बार मिलेंगी?

HINTS:

Keep in mind, *If two person running on a circular track in opposite direction we add the simplest ratio's of the speed to find the number of distinct point they will meet.*

Ratio of speed = 4 : 3

Thus, Required number of meeting points = 4 + 3 = 7.

Ex. Two friends P and Q simultaneously start running from same point around a circular track. They run in the same direction. P runs at 6 m/sec and Q runs at b m/sec. If they cross each other at exactly two points on the circular track and b is a natural number less than 6, then how many values can b take?

दो मित्र P और Q एक साथ एक वृत्ताकार ट्रैक पर एक ही बिंदु से दौड़ना शुरू करते हैं। वे एक ही दिशा में दौड़ते हैं। P, 6 m/sec की चाल से दौड़ता है और Q, b m/sec की चाल से दौड़ता है। यदि वे वृत्ताकार पथ पर ठीक दो बिंदुओं पर एक दूसरे को पार करते हैं और b एक प्राकृत संख्या है, जो 6 से कम है, तो b के कितने मान हो सकते हैं?

HINTS:

Keep in mind, *If two person running on a circular track in same direction we take the difference of simplest ratio's of the speed to find the number of distinct point they will meet.*

Ratio of speed P and Q = 6 : b

As per question they meet 2 times-

We can take ratios are –

~~6 : 1 Difference of simplest ratio = 5~~

6 : 2 Difference of simplest ratio = 2

~~6 : 3 Difference of simplest ratio = 1~~

~~6 : 4 Difference of simplest ratio = 1~~

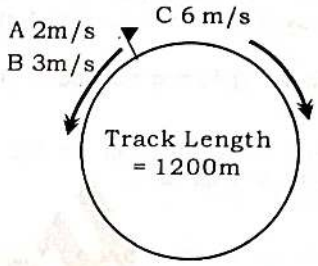
~~6 : 5 Difference of simplest ratio = 5~~

∴ Only one possible value.

Ex. A, B and C run simultaneously, starting from a point, around a circular track of length 1200m, at respective speeds of 2m/s, 4m/s and 6m/s. A and B run in the same direction, while C runs in the opposite direction to the other two. After how much time will they meet for the first time?

A, B और C एक साथ, एक समान बिंदु से दौड़ना शुरू करते हैं। वे 1200 m लंबाई के एक वृत्ताकार ट्रैक के परित: क्रमश: 2m/s, 4 m/s और 6 m/s की चाल से दौड़ते हैं। A और B एक ही दिशा में दौड़ते हैं, जबकि C अन्य दो के विपरीत दिशा में दौड़ता है। वे पहली बार कितने समय के बाद मिलेंगे?

HINTS:



$T_{A+B} = \frac{\text{Track Length}}{\text{Relative Speed}} = \frac{1200}{4-2} = 600\,\text{sec}$

$T_{A+C} = \frac{\text{Track Length}}{\text{Relative Speed}} = \frac{1200}{2+6} = 150\,\text{sec}$

They will meet for the first time after

= LCM(600,150) = 600 sec =10 min

Ex. A, B and C start running simultaneously on a circular track of length 120 meters from the same point with the speeds 2m/s, 3m/s and 6m/s respectively. A and C are running in anti-clockwise direction and B is running in a clockwise direction. Answer the following questions:

A, B और C एक ही बिंदु से 120 मीटर लंबे वृत्ताकार ट्रैक पर क्रमश: 2m/s, 3m/s और 6m/s की गति से दौड़ना शुरू करते हैं। A और C वामावर्त दिशा में दौड़ रहे हैं और B दक्षिणावर्त दिशा में दौड़ रहा है। निम्नलिखित सवालों का जवाब दें:

(i) After how much time from the start all three will meet again at the starting point?

प्रारंभ से कितने समय बाद तीनों पुन: प्रारंभिक बिंदु पर मिलेंगे?

HINTS:

$t_A = \frac{120}{2} = 60$ sec, $t_B = \frac{120}{3} = 40$ sec, $t_c = \frac{120}{6} = 20$ sec

From the start all three will meet again at the starting point after = LCM (60, 40, 20) = 120 sec.

(ii) After how much time from the start all three will meet for the firs t time anywhere on the track?

शुरुआत के कितने समय बाद तीनों पहली बार ट्रैक पर कहीं मिलेंगे?

HINTS:

$T_{A+C} = \frac{120}{4} = 30$ sec., $T_{A+B} = \frac{120}{5} = 24$ sec

= They will meet for the first time after

= LCM(30, 24) = 120 sec

BOAT & STREAM

नाव और धारा

27

Definition and Formula/परिभाषा और सूत्र

There are a variety of sub-concepts that are related to answering questions based on boat and streams concept. Given below are the four terms which are important for a candidate to know to understand the concept of boat and streams.

नाव और धाराओं की अवधारणा पर आधारित प्रश्नों के उत्तर देने से संबंधित विभिन्न उप-अवधारणाएं हैं। नीचे चार शब्द दिए गए हैं जो एक परीक्षार्थी के लिए नाव और धारा की अवधारणा को समझने के लिए महत्वपूर्ण हैं।

- Stream : The moving water in river is called stream.
  धारा: नदी में बहते जल को धारा कहते हैं।
- Upstream : If the boat is flowing in the opposite direction to the stream, it is called upstream. In this case, the net speed of boat is called upstream speed.
  ऊर्ध्वप्रवाह: यदि नाव धारा के विपरीत दिशा में चल रही है, तो इसे ऊर्ध्वप्रवाह कहा जाता है। इस स्थिति में नाव की कुल गति को ऊर्ध्वप्रवाह गति कहते हैं।
- Downstream: If the boat is flowing along the direction of the stream, it is called downstream. In this case, the net speed of boat is called downstream speed.
  अनुप्रवाह: यदि नाव धारा के दिशा में चल रही है, तो इसे अनुप्रवाह कहा जाता है। इस स्थिति में नाव की कुल गति को अनुप्रवाह गति कहते हैं।
- Still Water: Under this circumstance the water is considered to be stationary and the speed of the water is zero.
  शांत जल: ऐसी स्थिति में जल के बहाव को स्थिर माना जाता है और जल की गति शून्य होती है।

The questions from this topic may seem to be confusing until a candidate is aware of the above-mentioned terms and how they may be used for answering the questions.

इस विषय के प्रश्न तब तक भ्रमित करने वाले प्रतीत हो सकते हैं जब तक कि कोई उम्मीदवार उपर्युक्त शर्तों से अवगत न हो और प्रश्नों का उत्तर देने के लिए उनका उपयोग कैसे किया जा सकता है।

This topic basically deals with calculating the speed of anything in the water when it flows along with the flow of water or in the opposite direction.

यह विषय मूल रूप से पानी के प्रवाह के साथ या विपरीत दिशा में बहने पर पानी में किसी भी चीज की गति की गणना करने से संबंधित है।

Important Formulae/ महत्वपूर्ण सूत्र

Given below are a few important formulas with the help of which you can solve the questions based on boat and streams.

नीचे कुछ महत्वपूर्ण सूत्र दिए गए हैं जिनकी सहायता से आप नाव और जलधारा पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

Candidates must learn these formulas by heart to ensure they are able to answer the simple formula based questions correctly and do not end up losing marks for direct questions.

अभ्यार्थियों को इन सूत्रों को दिल से सीखना चाहिए ताकि यह सुनिश्चित हो सके कि वे सरल सूत्र आधारित प्रश्नों का सही उत्तर देने में सक्षम हैं और सरल प्रश्नों के लिए अंक नहीं गंवाते हैं।

Speed of boat in still water = B
शांत जल में नाव की चाल
Speed of the stream = S
धारा की चाल

- Downstream Speed of boat/नाव की अनुप्रवाह चाल =B + S
- Upstream Speed of boat/नाव की ऊर्ध्वप्रवाह चाल = B – S
- Speed of boat in still water/शांत जल में नाव की चाल

$$= \frac{1}{2}(\text{Downstream speed} + \text{Upstream speed})$$

- Speed of the stream/धारा की चाल

$$= \frac{1}{2}(\text{Downstream speed} - \text{Upstream speed})$$

Points to Remember/स्मरणीय तथ्य

- If the total time taken by the boat to row a distance of D and reach back to its initial position is T then,
  यदि नाव द्वारा D दूरी तय करने और अपनी प्रारंभिक स्थिति में वापस आने में लिया गया कुल समय T है, तो
  (a) Distance between the two places is/दो स्थानों के बीच की दूरी $D = \frac{T(B^2 - S^2)}{2B}$
  (b) Average speed of the boat/नाव की औसत चाल $= \frac{(B^2 - S^2)}{2B}$
- If it takes T hours more to go to a point upstream than downstream for the same distance. Then,
  यदि समान दूरी के लिए धारा के प्रतिकूल किसी बिंदु पर जाने में धारा के अनुकूल जाने की तुलना में T घंटे अधिक लगते हैं, तो
  Distance/दूरी $= \frac{T(B^2 - S^2)}{2S}$
- If a boat travels a distance downstream in T_1 hours and returns the same distance upstream in T_2 hours.
  यदि एक नाव धारा के अनुकूल एक दूरी T_1 घंटे में तय करती है और समान दूरी धारा के प्रतिकूल T_2 घंटे में वापस आती है, तो

@Raka_260

Speed of boat in Still water/स्थिर जल में नाव की गति

$$= \frac{S(T_2 + T_1)}{(T_2 - T_1)}$$

If the time taken by the boat to row same distance in downstream is T_1 and in upstream is T_2, then –
यदि नाव द्वारा अनुप्रवाह में समान दूरी को पार करने में लिया गया समय T_1 है और धारा के प्रतिकूल में T_2 है, तो -
The ratio of speed of the boat to the speed of stream
नाव की गति का धारा की गति से अनुपात

$$\frac{B}{S} = \frac{(T_2 + T_1)}{(T_2 - T_1)}$$

CONCEPT-01

Ex. If the speed of a swimmer is 9 km/h in still water and the speed of stream is 5 km/h then find the speed of swimmer against the stream and along the stream.
यदि शांत पानी में एक तैराक की गति 9 किमी/घंटा है और धारा की गति 5 किमी/घंटा है तो धारा के प्रतिकूल और धारा के अनुकूल तैराक की गति ज्ञात करें।

HINTS:

Upstream speed = B – S = 9 – 5 = 4 km/h

Downstream Speed = B + S = 9 + 5 = 14 km/h

CONCEPT-02

Ex. A swimmer walks 30 km along the flow of river in 3 hours 45 minutes and walks 15 km against the flow in 2 hours 30 minutes find the speed of boat in still water and the speed of flow (in km/h).
एक नाविक नदी में बहाव की ओर 3 घंटे 45 मिनट में 30 किमी नाव चलाता है तथा बहाव के विरूद्ध 2 घंटे 30 मिनट में 15 किमी. नाव चलाता है, स्थिर पानी में नाव की गति तथा प्रवाह की गति ज्ञात कीजिए।

HINTS:

$$B + S = \frac{30}{\frac{15}{4}} \qquad \left(\because 3 \text{ hrs } 45 \text{ min} = \frac{15}{4} \text{ hrs}\right)$$

B + S = 8 ----------[1]

$$B - S = \frac{15}{\frac{5}{2}} \qquad \left(\because 2 \text{ hrs } 30 \text{ min} = \frac{5}{2} \text{ hrs}\right)$$

B – S = 6 ----------[2]

On solving [1] + [2], We get–

2B = 14 ⇒ B = 7 km/h

From [1], S = 8 – 7 = 1 km/h

CONCEPT-03

Ex. A man takes 2.2 times as long to row a distance in upstream as to row the same distance in downstream. If he can row 55 km downstream in 2 hours 30 minutes, what is the speed of the boat in still water?
एक व्यक्ति धारा के विरुद्ध जाने में, धारा के साथ जाने से 2.2 गुना समय लेता है। यदि वह 55 किमी धारा के साथ 2 घंटे 30 मिनट में नाव चला सकता है, तो शांत जल में नाव की चाल क्या है?

HINTS:

	Down		Up
Time	5	:	11
Speed	11	:	5

$\because 2.2 = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$

Let the Downstream speed = 11x and

Upstream speed = 5x

ATQ, $11x = \frac{55}{2.5} \Rightarrow x = 2$

Speed of boat in still water,

$$B = \frac{1}{2}(11x + 5x) = 8x = 8 \times 2 = 16 \text{ km}$$

CONCEPT-04

Ex. A swimmer swim 3 km/h against the stream and goes 1 km in 10 minutes along the stream, then in how much time will take to cover 5 km in still water?
एक नाविक धारा के विपरीत 3 किलोमीटर एक घंटे में जाता है तथा धारा की दिशा में 1 किलोमीटर 10 मिनट में जाता है, तो स्थिर पानी में 5 किलोमीटर कितनी देर में जाएगा?

HINTS:

Upstream speed = 3 km/h

$$\text{Downstream speed} = \frac{1}{\frac{10}{60}} = 6 \text{ km/h}$$

$$B = \frac{1}{2}(6 + 3) = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ km/h}$$

$$\text{Time} = \frac{5}{4.5} = \frac{50}{45} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}\text{h}$$

CONCEPT-05

Ex. A man goes downstream with a boat to some destination and returns upstream to his original place in 5 hours. If the speed of the boat in still water and the stream are 10 km/h and 4 km/h respectively, the distance of the destination from the starting place is
एक आदमी नाव से किसी गंतव्य तक जाने और अपने मूल स्थान पर वापस आने में 5 घंटे का समय लेता है। यदि स्थिर पानी में नाव की गति और धारा की गति क्रमश: 10 किमी/घंटा और 4 किमी/घंटा है, तो प्रारंभिक स्थान से गंतव्य की दूरी ज्ञात करें।

HINTS:

$$D = \frac{T(B^2 - S^2)}{2B} = \frac{5(10^2 - 4^2)}{2 \times 10} = 21 \text{ km}$$

CONCEPT-06

Ex. A boat moves 25km upstream and 39km downstream in 8 hours. It travels 35km upstream and 52km downstream in 11 hours. If it travels at a uniform speed then find (i) Speed of the stream (ii) Speed of the Boat.

एक नौका 8 घंटे में धारा की विपरीत दिशा में 25 किमी और धारा की दिशा में 39 किमी चलती है। यह 11 घंटे में धारा की विपरीत दिशा में 35 किमी और धारा की दिशा में 52 किमी की दूरी तय करती है। यदि यह एक समान चाल से यात्रा करती है, तो (i) धारा की चाल (ii) नाव की चाल ज्ञात करें।

HINTS:

U_s	D_s	T_T	
25	39	8	——(i)$_{\times 4}$
35	52	11	——(ii)$_{\times 3}$
5	0	1	←(iii)–(ii)

$$U_s = \frac{5}{1} = 5 \text{ km/h}$$

$$\text{and } D_s = \frac{39}{(8-5)} = 13 \text{ km/h}$$

$$\text{Speed of Stream} = \frac{D_s - U_s}{2} = \frac{13-5}{2} = 4 \text{ km/h}$$

$$\text{Speed of Boat} = \frac{D_s + U_s}{2} = \frac{13+5}{2} = 9 \text{ km/h}$$

★★★★★

@Baka_260
Maths by Aditya Ranjan sir

PERMUTATION & COMBINATION

28

क्रमचय और संचय

What are Permutations/क्रमचय क्या हैं?

Permutations are different ways of arranging objects in a definite order. It can also be expressed as the rearrangement of items in a linear order of an already ordered set. The symbol ${}^nP_r$ is used to denote the number of permutations of n distinct objects, taken r at a time. It locks schedules of buses, trains or flights, allocation of zip codes and phone numbers. These are a few situations where permutations are used.

क्रमचय वस्तुओं को एक निश्चित क्रम में व्यवस्थित करने के विभिन्न तरीके हैं। इसे पहले से व्यवस्थित किए गए समुच्यों के रैखिक क्रम में वस्तुओं की पुनर्व्यवस्था के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। प्रतीक ${}^nP_r$ का उपयोग एक समय में r लिए गए n अलग-अलग वस्तुओं के क्रमचय की संख्या को दर्शाने के लिए किया जाता है। यह बसों, ट्रेनों या उड़ानों के शेड्यूल, जिप कोड और फोन नंबरों के आवंटन को लॉक करता है। ये कुछ स्थितियाँ हैं जहाँ क्रमचय का उपयोग किया जाता है।

Let us learn more about permutations along with a few solved examples.

आइए कुछ हल किए गए उदाहरणों के साथ क्रमचय के बारे में और जानें।

For example, there are 5 chairs and 3 persons are to be seated. We have 5 ways to seat the first person; 4 ways to seat the next person and 3 ways to seat the third person. Thus, to find the number of ways for arranging 3 persons in 5 chairs, we multiply the options available to us. We do it in $5 \times 4 \times 3$ ways. i.e., it can be done in 60 ways. Observe that $5 \times 4 \times 3$ can be written as (5!)/(2!) (or) (5!)/(5 – 3)!.

उदाहरण के लिए, 5 कुर्सियाँ हैं और 3 व्यक्तियों को बैठना है। हमारे पास पहले व्यक्ति को बैठाने के 5 तरीके हैं; अगले व्यक्ति को बैठाने के 4 तरीके और तीसरे व्यक्ति को बैठाने के 3 तरीके। इस प्रकार, 5 कुर्सियों पर 3 व्यक्तियों को व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या ज्ञात करने के लिए, हम अपने पास उपलब्ध विकल्पों को गुणा करते हैं। हम इसे $5 \times 4 \times 3$ तरीकों से करते हैं। यानी, इसे 60 तरीकों से किया जा सकता है। ध्यान दें कि $5 \times 4 \times 3$ को (5!)/(2!) (या) (5!)/(5 – 3)!. के रूप में लिखा जा सकता है।

Generalizing this, we get n options to fill the first chair, n-1 options to fill the second and n-2 options to fill the third chair. Thus, the total number of permutations (arrangements) of r people in n chairs can be expressed as:

$$ {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

इसे सामान्यीकृत करते हुए, हमें पहली कुर्सी भरने के लिए n विकल्प, दूसरी कुर्सी भरने के लिए n-1 विकल्प और तीसरी कुर्सी भरने के लिए n-2 विकल्प मिलते हैं। इस प्रकार, n कुर्सियों में r लोगों के क्रमचय (व्यवस्था) की कुल संख्या को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$ {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

This is called the permutations formula.

इसे क्रमचय सूत्र कहा जाता है।

Permutations Formulas/क्रमचय सूत्र

We have already seen the basic permutations formula in the previous section. Here are different permutations formulas that are used in different scenarios.

हम पिछले अनुभाग में मूल क्रमचय सूत्र पहले ही देख चुके हैं। यहां विभिन्न क्रमचय सूत्र दिए गए हैं जिनका उपयोग विभिन्न परिदृश्यों में किया जाता है।

- The number of permutations (arrangements) of 'n' different things out of which 'r' things are taken at a time and where the repetition is not allowed is: –

'n' विभिन्न वस्तुओं के क्रमचय (व्यवस्था) की संख्या, जिनमें से 'r' वस्तु एक समय में ली गई हैं और जहां पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है: –

$$ {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

- Using the above formula, the total number of ways of arranging n different things (taking all at a time) is n!.

उपरोक्त सूत्र का उपयोग करते हुए, n विभिन्न चीजों को व्यवस्थित करने के तरीकों की कुल संख्या (एक समय में सभी को मिलाकर) n! है ।

Because in this case/ क्योंकि इस स्थिति में, r = n

$$ \therefore {}^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! $$

- According to circular permutation formula, The number of ways of arranging 'n' things in the circular shape is (n–1)!.

वृत्ताकार क्रमचय सूत्र के अनुसार, 'n' वस्तुओं को वृत्ताकार आकार में व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या (n–1)! होती है।

- The number of permutations of 'n' things (where all are not different), among which there are 'r_1' objects are of the one type, 'r_2' objects are of the second type, ... and 'r_n' objects belong to the nth type, is : –

'n' वस्तुओं के क्रमचय की संख्या (जहां सभी अलग-अलग नहीं हैं), जिनमें से 'r_1' वस्तुएं एक प्रकार की हैं, 'r_2' वस्तुएं दूसरे प्रकार की हैं, ... और 'r_n' वस्तुएं nवाँ प्रकार है: –

$$ = \frac{n!}{(r_1! \times r_2! \times r_3! \times \ldots \times r_n!)} $$

- The number of permutations of 'n' things out of which 'r' things are taken and where the repetition is allowed is n^r.

'n' चीजों के क्रमचय की संख्या जिसमें से 'r' चीजें ली गई हैं और जहां पुनरावृत्ति की अनुमति हो n^r होती है।

How to Calculate Permutations/क्रमचय की गणना कैसे करें?

Permutations can be calculated with or without repetitions.

क्रमचय की गणना पुनरावृत्ति के साथ या उसके बिना की जा सकती है।

If there are 10 pairs of socks and you choose 2 pairs out of them, then you can do it in ${}^{10}P_2$ ways.

यदि 10 जोड़ी मोजे हैं और आप उनमें से 2 जोड़ी चुनते हैं, तो आप इसे ${}^{10}P_2$ तरीकों से चुन सकते हैं।

- Number of permutation, If repetition is not allowed

क्रमचय की संख्या, यदि पुनरावृत्ति की अनुमति न हो

$$\text{i.e. } {}^{10}P_2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10\times 9\times 8!}{8!} = 90 \text{ ways}$$

- Number of permutation, If repetition is allowed

क्रमचय की संख्या, यदि पुनरावृत्ति की अनुमति हो

If we have repetitions, we always have n arrangements every time. We have 10^2 ways = 100 ways.

यदि हमारे पास दोहराव है, तो हमारे पास हर बार n व्यवस्थाएँ होती हैं। हमारे पास 10^2 तरीके = 100 तरीके हैं।

Concept of Factorial /क्रमगुणित की अवधारणा

The product of first n consecutive natural numbers is called as n!

प्रथम n क्रमागत प्राकृति संख्याओं का गुणनफल n! कहलाता है

Ex. 3! is defined as product of first three natural numbers.

3! को पहले तीन प्राकृतिक संख्याओं के उत्पाद के रूप में परिभाषित किया गया है।

$3! = 1 \times 2 \times 3$

$3! = 6$

$1! = 1 \quad 2! = 2$

$3! = 6 \quad 4! = 24$

$5! = 120 \quad 6! = 720$

Note : $0! = 1$

Ex. $\frac{5!}{3!} \rightarrow \frac{5\times 4\times 3!}{3!} = 20$

$\frac{7!}{4!} \rightarrow \frac{7\times 6\times 5\times 4!}{4!} = 210$

Ex. $\frac{8!}{5!3!} \rightarrow \frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 3\times 2\times 1} = 56$

$\frac{10!}{6!4!} \rightarrow \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6!}{6!\times 4\times 3\times 2\times 1} = 210$

$\frac{7!}{4!3!} \rightarrow \frac{7\times 6\times 5\times 4!}{4!\times 3\times 2\times 1} = 35$

Examples on Permutations As Arrangements
व्यवस्था के रूप में क्रमचय पर उदाहरण

Here are some applications of permutations in real life scenarios.

यहां वास्तविक जीवन परिदृश्यों में क्रमचय के कुछ अनुप्रयोग दिए गए हैं।

Ex. (a) How many words can be formed using the letters of the word 'TRIANGLES'?

'TRIANGLES' शब्द के अक्षरों का उपयोग करके कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

(b) How many of these words start with T and end with S?

इनमें से कितने शब्द T से शुरू होते हैं और S पर खत्म होते हैं?

HINITS:

(a) There are 9 distinct letters in the given word. Thus, the number of different permutations (or arrangements) of the letters of this word is ${}^9P_9 = 9!$.

(b) If we fix T at the start and S at the end of the word, we have to permute 7 distinct letters in 7 places. This can be done in ${}^7P_7 = 7!$ ways. Thus, the number of such words is 7!

Ex. How many different 5-letter words can be formed using the letters from A to J (total ten letters) such that each word has at least one letter repeated?

A से J तक अक्षरों (कुल दस अक्षर) का उपयोग करके कितने अलग-अलग 5-अक्षर वाले शब्द बनाए जा सकते हैं, ताकि प्रत्येक शब्द में कम से कम एक अक्षर दोहराया जाए?

HINTS:

The number of letters from A to J is 10.

We need to count:

(i) The total number of 5-letter words (with or without repetition) which can be formed using 10 distinct letters. This number is 10^5, since each place in the 5-letter word can be filled in 10 different ways, and so, the required number is $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$.

(ii) The number of 5-letter words which can be formed using 10 distinct digits, such that no digit is repeated. This number is ${}^{10}P_5$.

The answer to the original question is the difference of these two numbers. Now, from the set of all the words, if we take out those words which have no repetition of letters, then you get the set of words which have at least one letter repeated. Thus, the final answer is $10^5 - {}^{10}P_5$.

Ex. There are 10 students in a class. Two of these students are Jack and Daniel, who don't get along very well. In how many ways can the teacher arrange the students in a row, so that Jack and Daniel are not together?

एक कक्षा में 10 छात्र हैं। इनमें से दो छात्र जैक और डेनियल हैं, जिनकी आपस में बिल्कुल नहीं बनती। शिक्षक कितने तरीकों से विद्यार्थियों को एक पंक्ति में व्यवस्थित कर सकता है, ताकि जैक और डैनियल एक साथ न हों?

@Baka2200

HINTS:
The total number of arrangements of the 10 students is ${}^{10}P_{10} = 10!$.
Now, let us count the number of arrangements in which Jack and Daniel are together. Treating Jack + Daniel as a single unit (call it JD), we have a total of 9 entities which we can permute: the 8 students, and JD. These 9 entities can be permuted in ${}^{9}P_{9} = 9!$ ways. But for each of 9! permutations, J and D can be permuted among themselves in 2! or 2 ways: JD or DJ. Thus, the total number of permutations in which Jack and Daniel are together, is $2 \times 9!$
We conclude that the number of permutations in which Jack and Daniel are not together is $10! - (2 \times 9!)$

Combinations/संचय (संयोजन)

Combinations are also called selections. Combinations correspond to the selection of things from a given set of things. Here we do not intend to arrange things. We intend to select them. We denote the number of unique r-selections or combinations out of a group of n objects by ${}^{n}C_{r}$.
संयोजनों को चयन भी कहा जाता है। संयोजन किसी दिए गए चीजों के समूह से चीजों के चयन के अनुरूप होते हैं। यहां हमारा इरादा चीजों को व्यवस्थित करने का नहीं है। हमारा इरादा उन्हें चुनने का है। हम n वस्तुओं के समूह में से अद्वितीय r-चयनों या संयोजनों की संख्या को ${}^{n}C_{r}$ द्वारा निरूपित करते हैं।
Combinations are different from arrangements or permutations. Let us learn more about how to calculate combinations, combinations formula, differences between permutation and combinations, with the help of examples, FAQs.
संयोजन व्यवस्था या क्रमचय से भिन्न होते हैं। आइए उदाहरणों, अक्सर पूछे जाने वाले प्रश्नों की सहायता से संयोजनों की गणना कैसे करें, संयोजन सूत्र, क्रमचय और संयोजन के बीच अंतर के बारे में और जानें।

What Are Combinations/संयोजन क्या हैं?

Combinations are selections made by taking some or all of a number of objects, irrespective of their arrangements. The number of combinations of n different things taken r at a time, denoted by ${}^{n}C_{r}$ and it is given by, ${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, where $0 \le r \le n$.

संयोजन कई वस्तुओं में से कुछ या सभी को लेकर किया गया चयन है, चाहे उनकी व्यवस्था कुछ भी हो। एक समय में त ली गई n विभिन्न चीजों के संयोजन की संख्या, ${}^{n}C_{r}$ द्वारा निरूपित की जाती है, और इसे ${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ द्वारा दिया जाता है, जहां $0 \le r \le n$ है।

Note: ${}^{n}C_{r}$ formulae से Direct value लिखने के लिए N^{r} में n को r- times छटटे क्रम में गुणा करकें लिखे तथा D^{r} में r को 1 तक छटटे क्रम में गुणा करके लिखे।

For Example ${}^{5}C_{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

Another example = ${}^{6}C_{4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$

Combinations as Selections/चयन के रूप में संयोजन

Suppose we have a set of 6 letters (A,B,C,D,E,F). In how many ways can we select a group of 3 letters from this set? Suppose we find the number of arrangements of 3 letters possible from those 6 letters that number would be ${}^{6}P_{3}$. Consider the permutations that contain the letters A, B and C. These are 3! = 6 ways, namely ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, and CBA.
मान लीजिए हमारे पास 6 अक्षरों (A,B,C,D,E,F) का एक सेट है। हम इस सेट से 3 अक्षरों के समूह को कितने तरीकों से चुन सकते हैं? मान लीजिए कि हम उन 6 अक्षरों से संभव 3 अक्षरों की व्यवस्था की संख्या ज्ञात करते हैं तो वह संख्या ${}^{6}P_{3}$ होगी। उन क्रमचयों पर विचार करें जिनमें अक्षर A, B और C शामिल हैं, ये 3! = 6 अर्थात् ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, और CBA हैं।
Now, what we want is the number of combinations and not the number of arrangements. In other words, the 6 permutations listed above would correspond to a single combination differently. Now the order of things is not important; only the group/combination matters in our selection. This means that the total number of combinations of 3 letters from the set of 6 letters available to us would be $\frac{{}^{6}P_{3}}{3!}$ Ways, since each combination is counted 3! Times in the list of permutations. Thus, we denote the number of combinations of 6 things taken 3 at a time by ${}^{6}C_{3}$.
अब, हम जो चाहते हैं वह संयोजनों की संख्या है न कि व्यवस्थाओं की संख्या। दूसरे शब्दों में, ऊपर सूचीबद्ध 6 क्रमचय एक ही संयोजन के अलग-अलग अनुरूप होंगे। अब चीजों का क्रम महत्वपूर्ण नहीं है; हमारे चयन में केवल समूह/संयोजन मायने रखता है। इसका मतलब यह है कि हमारे पास उपलब्ध 6 अक्षरों के सेट में से 3 अक्षरों के संयोजन की कुल संख्या $\frac{{}^{6}P_{3}}{3!}$ तरीके होगी क्योंकि प्रत्येक संयोजन को क्रमचय की सूची में 3! बार गिना जाता है। इस प्रकार, हम एक समय में 3 ली गई 6 चीजों के संयोजन की संख्या को ${}^{6}C_{3}$ द्वारा दर्शाते हैं।

i.e. ${}^{6}C_{3} = \frac{{}^{6}P_{3}}{3!}$. This is also said as 6 choose 3.

Some Important result on Combinations
संयोजन पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

- The number of ways of selecting n objects out of n objects is:
  n वस्तुओं में से n वस्तुओं को चुनने के तरीकों की संख्या है:
  ${}^{n}C_{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$
- The number of ways of selecting 0 objects out of n objects is:
  n वस्तुओं में से 0 वस्तुओं को चुनने के तरीकों की संख्या है:
  ${}^{n}C_{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$
- The number of ways of selecting 1 object out of n objects is:
  n वस्तुओं में से 1 वस्तुओं को चुनने के तरीकों की संख्या है:
  ${}^{n}C_{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$
- ${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}$
- ${}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{n-r} = {}^{n+1}C_{r}$

How To Apply Combinations Formula
संयोजन फॉर्मूला कैसे लागू करें

We calculate combinations using the combination formula and factorials and in terms of permutations. In general, suppose we have n things available to us, and we want to find the number of ways in which we can select r things out of these n things. We first find the number of all the permutations of these n things taken r at a time. That number would be ${}^nP_r$. Now, in this list of ${}^nP_r$, permutations, each combination will be counted r! times since r things can be permuted amongst themselves in r! ways. Thus, the total number of permutations and combinations of these n things, taken r at a time, denoted by ${}^nC_r$, will be:

हम संयोजन सूत्र और फैक्टोरियल का उपयोग करके और क्रमचय के संदर्भ में संयोजनों की गणना करते हैं। सामान्य तौर पर, मान लीजिए कि हमारे पास n चीजें उपलब्ध हैं, और हम उन तरीकों की संख्या ज्ञात करना चाहते हैं जिनसे हम इन n चीजों में से r चीजों का चयन कर सकते हैं। हम सबसे पहले एक समय में ली गई n चीजों में से r चीजों के सभी क्रमचयों की संख्या ज्ञात करते हैं जो कि ${}^nP_r$ होगी। अब, ${}^nP_r$, क्रमचय की इस सूची में, प्रत्येक संयोजन को n! बार गिना जाएगा क्योंकि n चीजों को r तरीकों से आपस में क्रमबद्ध किया जा सकता है। इस प्रकार, इन n चीजों के क्रमचय और संयोजन की कुल संख्या, एक समय में r ली गई, ${}^nC_r$ द्वारा निरूपित, होगी:

$${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Relationship Between Permutations and Combinations

क्रमचय और संयोजन के बीच संबंध

Permutation and combination formulas and concepts have a lot of similarities. Suppose that you have n different objects. You have to determine the number of unique r-selections (selections that contain r objects) which can be made from this group of n objects.

Think of a group of n people - you have to find the number of unique sub-groups of size r, which can be created from this group.

क्रमचय और संयोजन सूत्रों और अवधारणाओं में बहुत सारी समानताएँ हैंमान लीजिए कि आपके पास 'n' अलग-अलग वस्तुएं हैं। आपको अद्वितीय 'r'-चयनों (ऐसे चयन जिनमें 'r' वस्तुएं शामिल हैं) की संख्या निर्धारित करनी होगी जो 'n' वस्तुओं के इस समूह से बनाई जा सकती हैं।

'n' लोगों के एक समूह के बारे में सोचें - आपको 'r' आकार के अद्वितीय उप-समूहों की संख्या ज्ञात करनी होगी, जिन्हें इस समूह से बनाया जा सकता है।

The number of permutations of size r will be ${}^nP_r$. In the list of ${}^nP_r$ permutations, each unique selection will be counted r! times, because the objects in an r-selection can be permuted amongst themselves in r! ways. Thus, the number of unique combinations can be .

r आकार के क्रमचय की संख्या ${}^nP_r$ होगी। ${}^nP_r$ क्रमचय की सूची में, प्रत्येक अद्वितीय चयन को r! गुना गिना जाएगा! कई बार, क्योंकि r-चयन में वस्तुओं को r! तरीकों में आपस में क्रमबद्ध किया जा सकता है ।

इस प्रकार, अद्वितीय संयोजनों की संख्या $\frac{{}^nP_r}{r!}$ हो सकती है।

$${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)r!} = \frac{n!}{r!(n-r)}$$

Examples on Combinations/संयोजन पर उदाहरण

Ex. Consider the word 'EDUCATION'. This has 9 distinct letters. How many 3-letter permutations (words) can be formed using the letters of this word?

'EDUCATION' शब्द पर विचार करें। इसमें 9 अलग-अलग अक्षर हैं। इस शब्द के अक्षरों का उपयोग करके कितने तीन अक्षर वाले क्रमचय (शब्द) बनाए जा संकते हैं?

HINTS:

Now, We know how to answer questions like this;

The answer in this particular case will be ${}^9P_3$.

Consider the following 3-letter permutations formed using the letters A, E, T from EDUCATION:

AET, ATE, EAT, ETA, TAE, TEA

These 6 different arrangements correspond to the same selection of letters, which is (A, E, T). Thus, in the list of all 3-letter permutations, we will find that each unique Combination corresponds to 6 different arrangements. To find the number of unique 3-letter selections, we divide the number of 3-letter permutations by 6.

Hence, the number of 3-letter selections will be

$$= \frac{{}^9P_3}{6} = \frac{60480}{6} = 10{,}080$$

Ex. Out of a group of 5 people, a pair needs to be formed. The number of possible combinations can be calculated as follows.

5 व्यक्तियों के समूह में से एक जोड़ा बनाना है। संभावित संयोजनों की संख्या की गणना निम्नानुसार की जा सकती है।

$${}^5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{2\times 6} = 10$$

Ex. The number of 4-letter Combinations which can be made from the letters of the word DRIVEN is.

DRIVEN शब्द के अक्षरों से बनने वाले 4 अक्षर संयोजनों की संख्या है।

HINTS:

$${}^6C_4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{720}{24\times 2} = 15$$

☆☆☆☆☆

PROBABILITY

प्रायिकता

29

Terminologies Involved/शामिल शब्दावली

The list of the terms related to probability is as follows.

प्रायिकता से संबंधित शब्दों की सूची इस प्रकार है।

Experiment/प्रयोग: An activity whose outcomes are not known is an experiment. Every experiment has a few favorable outcomes and a few unfavorable outcomes. The historic experiments of Thomas Alva Edison had more than a thousand unsuccessful attempts before he could make a successful attempt to invent the light bulb.

एक गतिविधि जिसके परिणाम ज्ञात नहीं हैं प्रयोग कहलाता है। प्रत्येक प्रयोग के कुछ अनुकूल परिणाम और कुछ प्रतिकूल परिणाम होते हैं। थॉमस अल्वा एडिसन के ऐतिहासिक प्रयोगों में प्रकाश बल्ब का आविष्कार करने का सफल प्रयास करने से पहले एक हजार से अधिक असफल प्रयास हुए थे।

Random Experiment/यादृच्छिक प्रयोग: A random experiment is an experiment for which the set of possible outcomes is known, but which particular outcome will occur on a particular execution of the experiment cannot be said prior to performing the experiment. Tossing a coin, rolling a die, and drawing a card from a deck are all examples of random experiments.

एक यादृच्छिक प्रयोग एक ऐसा प्रयोग है जिसके लिए संभावित परिणामों का समूह ज्ञात होता है, लेकिन प्रयोग के किसी विशेष निष्पादन पर कौन सा विशेष परिणाम आएगा, यह प्रयोग करने से पहले नहीं कहा जा सकता है। सिक्का उछालना, पासा घुमाना और डेक से कार्ड निकालना सभी यादृच्छिक प्रयोगों के उदाहरण हैं।

Trial/परीक्षण: The numerous attempts in the process of an experiment are called trials. In other words, any particular performance of a random experiment is called a trial. For example, tossing a coin is a trial.

किसी प्रयोग की प्रक्रिया में किए गए अनेक प्रयासों को परीक्षण कहा जाता है। दूसरे शब्दों में, किसी यादृच्छिक प्रयोग के किसी विशेष प्रदर्शन को परीक्षण कहा जाता है। उदाहरण के लिए, सिक्का उछालना एक परीक्षण है।

Event/घटना: A trial with a clearly defined outcome is an event. For example, getting a tail when tossing a coin is termed as an event.

स्पष्टत: परिभाषित परिणाम वाला कोई परीक्षण घटना कहलाती है। उदाहरण के लिए, सिक्के को उछालने पर पट आना एक घटना कहलाती है।

Random Event/यादृच्छिक घटना : An event that cannot be easily predicted is a random event. For such events, the probability value is very less. The formation of a rainbow during the rain is a random event.

जिस घटना की आसानी से भविष्यवाणी नहीं की जा सकती वह यादृच्छिक घटना है। ऐसी घटनाओं के लिए प्रायिकता मान बहुत कम होता है। बारिश के दौरान इंद्रधनुष का बनना एक यादृच्छिक घटना है।

Outcome/परिणाम: This is the result of a trial. In the process of a sportsperson hitting a ball towards the goal post, there are two clear outcomes. He may either make the goal or miss the goal.

यह एक परीक्षण का परिणाम है। किसी खिलाड़ी द्वारा गेंद को गोल पोस्ट की ओर मारने की प्रक्रिया में दो स्पष्ट परिणाम होते हैं। वह या तो लक्ष्य बना सकता है या लक्ष्य से चूक सकता है।

Possible Outcome/संभावित परिणाम: The list of all the outcomes in an experiment can be referred to as possible outcomes. In tossing a coin, the possible outcomes are head or tail.

किसी प्रयोग के सभी परिणामों की सूची को संभावित परिणाम कहा जा सकता है। एक सिक्का उछालने पर संभावित परिणाम चित या पट होते हैं।

Equally likely Outcomes/समान रूप से संभावित परिणाम: An experiment in which each of the outcomes has an equal probability, such outcomes are referred to as equally likely outcomes. In the process of rolling a six-faced dice, the probability of getting any number is equal.

एक प्रयोग जिसमें प्रत्येक परिणाम की समान संभावना होती है, ऐसे परिणामों को समान रूप से संभावित परिणाम कहा जाता है। छह मुखी पासे को घुमाने की प्रक्रिया में कोई भी संख्या प्राप्त होने की संभावना बराबर होती है।

$$P(\text{any number}) = \frac{1}{6}$$

Sample Space/प्रतिदर्श समष्टि: It is the set of outcomes of all the trials in an experiment. On rolling a dice, the possible outcomes are 1, 2, 3, 4, 5 and 6. These outcomes make up the sample space. S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

यह एक प्रयोग में सभी परीक्षणों के परिणामों का समूह है। एक पासे को घुमाने पर, संभावित परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। ये परिणाम प्रतिदर्श समष्टि बनाते हैं। S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Probable Event/संभावित घटना: An event that can be predicted is called a probable event. We can calculate the probability of such events. The probability of a particular child being promoted to the next class can be calculated, hence, we can refer to this as a probable event.

जिस घटना की भविष्यवाणी की जा सकती है उसे संभावित घटना कहा जाता है। हम ऐसी घटनाओं की संभावना की गणना कर सकते हैं। किसी विशेष बच्चे के अगली कक्षा में पदोन्नत होने की संभावना की गणना की जा सकती है, इसलिए, हम इसे एक संभावित घटना के रूप में संदर्भित कर सकते हैं।

Impossible Event/असंभव घटना: An event that is not a part of the experiment, or which does not belong to the sample space of the outcomes of the experiment can be referred to as an impossible event. There is no snowfall in a temperate climatic region. Here, the snowfall can be referred to as an impossible event because the probability of occurrence of such an event is zero.

एक घटना जो प्रयोग का हिस्सा नहीं है, या जो प्रयोग के परिणामों के प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित नहीं है, उसे असंभव घटना कहा जा सकता है। समशीतोष्ण जलवायु वाले क्षेत्र में बर्फबारी नहीं होती है। यहां बर्फबारी को एक असंभव घटना कहा जा सकता है क्योंकि ऐसी घटना के घटित होने की संभावना शून्य है।

Complementary Events/पूरक घटनाएँ: Complementary events occur when there are just two outcomes, and one event is exactly opposite to another event. For an event with probability P(A), its compliment is $P(\overline{A})$.

पूरक घटनाएँ तब घटित होती हैं जब केवल दो परिणाम होते हैं, और एक घटना दूसरी घटना के बिल्कुल विपरीत होती है। प्रायिकता P(A) वाली किसी घटना के लिए, इसका पूरक $P(\overline{A})$ है।

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

In an examination, the event of success and the event of failure are complementary events.

किसी परीक्षा में सफलता की घटना और असफलता की घटना पूरक घटनाएँ हैं।

$P(\text{Success}) + P(\overline{\text{Failure}}) = 1$

Mutually Exclusive Events/परस्पर अपवर्जी घटनाएँ: Two events such that the happening of one event prevents the happening of another event are referred to as mutually exclusive events. In other words, two events are said to be mutually exclusive events, if they cannot occur at the same time. For example, tossing a coin can result in either heads or tails. Both cannot be seen at the same time.

दो घटनाएँ ऐसी होती हैं कि एक घटना का घटित होना दूसरी घटना के घटित होने को रोकता है, परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहलाती हैं। दूसरे शब्दों में, दो घटनाओं को परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहा जाता है, यदि वे एक ही समय में घटित नहीं हो सकती हैं। उदाहरण के लिए, सिक्का उछालने पर या तो चित या पट आ सकता है। दोनों को एक साथ नहीं देखा जा सकता।

Probability/प्रायिकता

Probability is the measure of the likelihood of occurrence of an event.

प्रायिकता किसी घटना के घटित होने की संभावना की माप है।

That is out of all the possibilities arising out of a certain random experiment, the chances of favourable outcome is measured in terms of probability.

अर्थात् एक निश्चित यादृच्छिक प्रयोग से उत्पन्न होने वाली सभी संभावनाओं में से, अनुकूल परिणाम की संभावना को प्रायिकता के रूप में मापा जाता है।

Hence, if in an experiment there are 'n' occurrences out of which 'm' occurrences are favourable to a particular event E, then the probability of the event E, denoted by P(E); is defined as $P(E) = \frac{m}{n}$.

इसलिए, यदि किसी प्रयोग में 'n' घटनाएँ हैं जिनमें से 'm' घटनाएँ किसी विशेष घटना E के अनुकूल हैं, तो घटना E की प्रायिकता, P(E) द्वारा निरूपित की जाती है; $P(E) = \frac{m}{n}$ के रूप में परिभाषित किया गया है।

Also, the non-occurrence of the event E, is denoted by $\overline{E}$, that is (n-m) in this case. So, (n-m) occurrences are not favourable to the event E, and favourable to the event $\overline{E}$.

साथ ही, इस मामले में घटना E के घटित न होने को $\overline{E}$, यानी (n-m) से दर्शाया जाता है। तो, (n-m) घटनाएँ घटना E के अनुकूल नहीं हैं, और घटना $\overline{E}$ के अनुकूल हैं।

$\therefore P(\overline{E}) = \frac{n-m}{n}$

We can observe that, $P(E) + P(\overline{E}) = 1$

Note: From the above discussion, we can infer that, $0 \le P(E) \le 1$ in all the cases.

If P(E) = 1, the event is called a certain event.

यदि P(E) = 1 है तो घटना निश्चित घटना कहलाती है।

P(E) = 0, the event is called an impossible event.

यदि P(E) = 0 है तो घटना असम्भव घटना कहलाती है।

Ex. What is the probability of a prime number, if we select a number from first 20 natural numbers?

यदि हम प्रथम 20 प्राकृतिक संख्याओं में से एक संख्या का चयन करते है, तो उस संख्या के अभाज्य होने की प्रायिकता क्या है?

HINTS:

Natural numbers = 1, 2, 3 20

Prime number = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

$\text{Probability} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Ex. If the probability of winning a game is 0.3, what is the probability of losing it?

यदि किसी खेल में जीतने की प्रायिकता 0.3 है, तो उसमें हारने की प्रायिकता क्या है?

HINTS:

$P(W) + P(\overline{W}) = 1$

$0.3 + P(\overline{W}) = 1$

$P(\overline{W}) = 0.7$

Ex. There are 3 white and 4 black balls in an urn. A ball is selected randomly. What is the probability to be white –

एक कलश में 3 सफेद और 4 काली गेंदे है। एक गेंद को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इसके सफेद होने की प्रायिकता क्या है-

@BaKa260

HINTS:

Total number of balls = 3 + 4 = 7

Probability = $\frac{3}{7}$

Ex. A jar contains 54 marbles each of which is blue, green or white. The probability of selecting a blue marble at random from the jar is $\frac{1}{3}$, and the probability of selecting a green marble at random is $\frac{4}{9}$. How many white marbles does the jar contain?

एक जार में 54 कंचे हैं जिनमें से प्रत्येक नीला, हरा या सफेद है। जार से यादृच्छिक रूप से नीले कंचे को चुनने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है, हरे कंचे को चुनने की प्रायिकता $\frac{4}{9}$ है। जार में कितने सफेद कंचे है?

HINTS:

$\frac{1}{3} = \frac{B}{54} \Rightarrow B = 18$

& $\frac{4}{9} = \frac{G}{54} \Rightarrow G = 24$

Total number of white balls = 54 – (18 + 24) = 54 – 42 = 12

Ex. A bag contains cards which are numbered from 2 to 90. A card is drawn at random from the bag. Find the probability that the card number is a perfect square.

एक थैले में कार्ड हैं जिन पर 2 से 90 तक संख्याएँ अंकित है। थैले में से एक कार्ड यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि कार्ड संख्या एक पूर्ण वर्ग है।

HINTS:

Perfect square numbers between 2 and 90
= 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

Probability = $\frac{8}{89}$

Ex. Find the probability that a number selected at random from first hundred natural numbers is a multiple of 3 or 5?

प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहली सौ प्राकृतिक संख्याओं में से यादृच्छिक रूप से चुनी गई संख्या 3 या 5 की गुणज है ?

HINTS:

Multiple of 3 = $\frac{99}{3}$ = 33

Multiple of 5 = $\frac{100}{5}$ = 20

Multiple of both 3 & 5 = $\frac{90}{15}$ = 6

∴ Total no. of probable conditions = 33 + 20 – 6 = 47

Probability = $\frac{47}{100}$

Coins/सिक्के

- When an unbiased coin is tossed once:

  जब किसी एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है तो:

  Possible outcomes are/कुल संभावित परिणाम

  $2^n = 2^1 = 1$

  Sample space → Hands and Tails

- When two unbiased coins are tossed simultaneously.

  जब दो सिक्के को एक एक साथ उछाला जाता है तो:

  Possible outcomes are/कुल संभावित परिणाम

  $2^2 = 4$

  Sample space = {(H,H) (H,T) (TH) (TT)}

- When three unbaised coins are tossed simultaneously.

  जब तीन सिक्के को एक एक साथ उछाला जाता है तो:

  Possible outcomes are/कुल संभावित परिणाम

  $2^3 = 8$

  Sample Space = {(HHH) (HHT) (HTH) (THH) (HTT) (THT) (TTH) (TTT)}

- When n coins are tossed or single coin tossed n times:-

  जब n सिक्के को एक एक साथ अथवा एक सिक्के को n बार उछाला जाता है तो:

  Possible outcomes/कुल संभावित परिणाम = 2^n

Ex. Two unbiased coins are tossed up simultaneously. Find the probability of getting

दो निष्पक्ष सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) Two tails/दो पट

(ii) One head/एक चित

(iii) At least one tail/कम से कम एक पट

(iv) At most one tail/अधिक से अधिक एक पट

(v) No tail/कोई पट नहीं

HINTS:

Sample space = {(H,H) (H,T) (TH) (TT)}

(i) P(two tails) = $\frac{1}{4}$

(ii) P(one head) = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(iii) P(at least one tail) = $\frac{3}{4}$

(iv) P(at most one tail) = $\frac{3}{4}$

(v) P(no tail) = $\frac{1}{4}$

Obkl_260

Ex. Three unbiased coins are tossed up together. Find the probability of getting.
तीन अनभिनत सिक्कों को एक साथ उछांला जाता है।
निम्न परिणाम करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
(i) all heads/सभी चित
(ii) at least one tail/कम से कम एक पट
(iii) exactly 2 heads/बिल्कुल दो चित
HINTS:
Sample Space
= {(HHH) (HHT) (HTH) (THH) (HTT)(THT) (TTH) (TTT)}
(i) P(all heads) = $\frac{1}{8}$
(ii) P(at least one tail) = $\frac{7}{8}$
(ii) P(exactly 2 heads) = $\frac{3}{8}$

Ex. A coin is tossed 5 times, what is a probability of getting exactly 2 heads?
एक सिक्के को 5 बार उछाला जाता है, ठीक 2 चित आने की प्रायिकता क्या है?
HINTS:
Total cases = $2^5 = 32$
No. of favourable cases = ${}^5C_2 = \frac{5!}{2!\times3!} = \frac{5.4.3!}{2!\times3!} = 10$
Probability = $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

Ex. A coin is tossed 8 times, what is a probability of getting exactly 6 tails?
एक सिक्के को 8 बार उछाला जाता है, ठीक 6 पट आने की प्रायिकता क्या है?
HINTS:
Total cases = $2^8 = 256$
No. of favorable cases = ${}^8C_6 = \frac{8!}{2!\times6!} = \frac{8.7.6!}{2!\times6!} = 28$
Probability = $\frac{28}{256} = \frac{7}{64}$

Ex. A coin is tossed 9 times. Find the probability of atmost 2 tails.
एक सिक्का 9 बार उछाला जाता है, अधिकतम 2 पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए-
HINTS:
Total cases = $2^9 = 512$
0 tail $\rightarrow {}^9C_0 = \frac{9!}{9!\times0!} = 1$
1 tail $\rightarrow {}^9C_1 = \frac{9!}{8!\times1!} = 9$
2 tail $\rightarrow {}^9C_2 = \frac{9!}{7!\times2!} = 36$
$\therefore$ Total no. of favourable cases = 1 + 9 + 36 = 46
Probability = $\frac{46}{512} = \frac{23}{256}$

Ex. A coin is tossed 7 times. Find the probability of atleast 2 tails.
एक सिक्का 7 बार उछाला जाता है। कम से कम 2 पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए-
HINTS:
Total cases = $2^7 = 128$
0T $\rightarrow {}^7C_0 = 1$
1T $\rightarrow {}^7C_1 = 7$
2T ✓
3T ✓
4T ✓
5T ✓
6T ✓
7T ✓
Favourable cases = 128 – (1 + 7) = 120
Probability = $\frac{120}{128} = \frac{15}{16}$

Dice/पासा

When a dice is thrown once/जब किसी पासे को एक बार फेंका जाता है:
Sample space = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = 6

Ex. A dice is thrown, find the probability of:
एक पासा को फेंका जाता है, निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:
(i) a prime number/एक अभाज्य संख्या
(ii) a multiple of 2 or 3 /2 या 3 का गुणक
(iii) a number greater than 4/4 से बड़ी संख्या
HINTS:
Sample space = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = 6
(i) Prime number = 2, 3, 5
Probability = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
(ii) Multiple of 2 or 3 = 2, 4, 6
Probability = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
(iii) Numbers greater than 4 = 5, 6
Probability = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Ex. A dice is thrown, find the probability of:
एक पासे को फेंका जाता है, निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:
(i) Getting an even number/सम संख्या
(ii) Getting an odd number/विषम संख्या
(iii) Getting a natural number less than 7/7 से छोटी प्राकृतिक संख्या
(iv) Getting a natural number greater than 6/ 6 से बड़ी प्राकृतिक संख्या
HINTS:
Sample space = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = 6
(i) Number of favourable outcomes = 3
$\therefore$ $P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

@Baka_266

(ii) $P(E_2) = P(\bar{E}_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ or else, we can say $P(E_2)$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(iii) Here, number of favourable outcomes = 6

$\therefore$ $P(E) = 1 \rightarrow$ This is called a certain event as there is no chance of failure.

(iv) Here number of favourable outcomes = 0

$\therefore$ $P(E) = 0 \rightarrow$ This is called impossible event, i.e., there is no chance of success.

When two dices are thrown simultaneously.

जब दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं।

Total number of possible cases $= 6^2 = 36$

Sample space:-

Second throw \ First throw	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Note: जब कभी भी दो Dice को उछालने के बाद प्राप्त संख्याओं के Sum की Probability पूछी जाये तो ध्यान रखें, योग में से 1 कम करें और Total No. of cases (36) से Divide करें तथा यदि sum की value 6 से अधिक हो तो sum को 13 में से घटा कर 36 से Divide करें।

Sum	Cases	No. of cases	Probability
2	(1,1)	1	$\frac{1}{36}$
3	(1,2), (2,1)	2	$\frac{2}{36}$
4	(1,3), (2,3), (3,1)	3	$\frac{3}{36}$
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	4	$\frac{4}{36}$
6	(1,5) (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	5	$\frac{5}{36}$
7	(1,6), (2,6), (3,4), (4,3), (5,2), (1,1)	6	$\frac{6}{36}$
8	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,3)	5	$\frac{5}{36}$
9	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	4	$\frac{4}{36}$
10	(4,6), (5,5), (6,4)	3	$\frac{3}{36}$
11	(5,6), (6,5)	2	$\frac{2}{36}$
12	(6,6)	1	$\frac{1}{36}$
	Total → 36		

Ex. Two Dice are thrown simultaneously. Find the probability of

दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए-

(i) Sum as 8/योग 8 हो

(ii) Atleast a sum of 9/प्राप्त योगफल कम से कम 9 हो

(iii) A doublet i.e, same number on both the dice/दोनों पासों पर एक ही नंबर

(iv) A multiple of 2 on one dice and a multiple of 3 on the other dice/एक पासे पर 2 का गुणज और दूसरे पासे पर 3 गुणज

HINTS:

Total number of possible cases $= 6^2 = 36$

(i) Sum = 8

Probability $= \frac{(13-8)}{36} = \frac{5}{36}$

(ii) Atleast a sum of 9 means sum can be 9, 10, 11 or 12.

Favourable cases for 9 as sum = 13 – 9 = 4

Favourable cases for 10 as sum = 13 – 10 = 3

Favourable cases for 11 as sum = 13 – 11 = 2

Favourable cases for 12 as sum = 13 – 12 = 1

Probability $= \frac{(4+3+2+1)}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

(iii) Favourable cases = (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6) = 6

Probability $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(iv) Favourable cases = (2, 3) (2, 6) (4, 3) (4, 6) (6, 3) (6, 6) (3, 2) (3, 4) (3, 6) (6, 2) (6, 4) ~~(6, 6)~~ = 11

Probability $= \frac{11}{36}$

Ex. Two Dice are thrown Simultaneously. Find the probability that the number on the first dice is more than the number on the 2nd dice?

दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। पहले पासे पर संख्या दूसरे पासे पर संख्या से अधिक होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

HINTS:

No. of favourable cases

(2, 1)

(3, 1) (3, 2)

(4, 1) (4, 2) (4, 3)

(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4)

(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) = 15

Probability $= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

Note: Total cases = 36

6 ऐसे case होगें जिसमें दोनों पासे पर समान संख्या (Doublet) प्राप्त होगी। शेष 30 case में से 15 ऐसे case होगें जिनमें पहली संख्या बड़ी हागी तथा 15 case ऐसे होगें जिसमें दूसरी संख्या बड़ी होगी। इस प्रकार बिना सारे cases लिखे हुए ही Number of favourable cases प्राप्त कर सकते है।

@Baka_260

When a dice is thrown "THRICE"

जब एक पासे को "तीन बार" फेंका जाता है

No of possible cases/संभावित परिणामों की संख्या = $6^3 = 216$

Ex. Three unbiased dice are thrown.

Find the probability of :

तीन निष्पक्ष पासे फेंके जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) Sum as 6/योग के रूप में 6

(ii) Sum as 9/योग के रूप में 9

(iii) Sum as 14/योग के रूप में 14

HINTS:

No of possible cases/संभावित परिणामों की संख्या = $6^3 = 216$

(i)

No. on first dice	Sum of remaining 2 Dice	No. of possible cases
1	5	4
2	4	3
3	3	2
4	2	1
		Total = 10

Probability = $\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$

(ii)

No. on first dice	Sum of remaining 2 Dice	No. of possible cases
1	8	5
2	7	6
3	6	5
4	5	4
5	4	3
6	3	2
		Total = 25

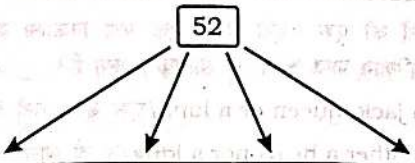
Probability = $\frac{25}{216}$

(iii)

No. on first dice	Sum of remaining 2 Dice	No. of possible cases
2	12	1
3	11	2
4	10	3
5	9	4
6	8	5
		Total = 15

Probability = $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$

Playing Cards/ताश के पत्ते



13 – Cards Diamonds (RED) ♦	13 – Cards Hearts (RED) ♥	13 – Cards Spades (BLACK) ♠	13 – Cards Clubs (RED) ♣
Ace - 1	Ace - 1	Ace - 1	Ace - 1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
Face Cards			
King	King	King	King
Queen	Queen	Queen	Queen
Jack	Jack	Jack	Jack

Ex. One card is drawn from a pack of 52 cards. What is the probability that the card drawn is.

52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता हैं। कार्ड पर निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है।

(i) An ace/एक इक्का

(ii) "10" of a Red suit/लाल रंग का 10

(iii) A face card/एक फेस कार्ड

(iv) Either red or king/या तो लाल या तो राजा

(v) Black and a queen/काला और एक रानी

HINTS:

No. of possible cases/संभावित परिणामों की संख्या = 52

(i) $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

(iii) $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

(iv) $\frac{(26+4-2)}{28} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$

(v) $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

@Baka_260

Ex One card is drawn from a pack of 52 cards. What is the probability that the card drawn is?

52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। कार्ड पर निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

(i) a jack, queen or a king/एक जेक, रानी या राजा

(ii) neither a heart nor a king/ना तो लाल पान है ना ही राजा

(iii) other than ace/इक्का के अलावा

HINTS:

No. of possible cases/संभावित परिणामों की संख्या = 52

(i) $\frac{(4+4+4)}{52} = \frac{3}{13}$

(ii) Heart = 13 & King = 4

Heart or King = 13 + 4 – 1 = 16

$$\text{Probability} = \frac{(52-16)}{52} = \frac{9}{13}$$

(iii) $\text{Probability} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

Ex. Jacks, Queens, Kings and Aces of red color are removed. From the remaining cards a card is drawn at random. Find the probability, that the card drawn is a black queen?

लाल रंग के गुलाम, बेगम, बादशाह और इक्का हटा दिए जाते हैं। शेष पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाला गया काली बेगम की प्रायिकता है?

HINTS:

Remaining Cards = 52 – 8 = 44 cards

$$\text{Probability} = \frac{2}{44} = \frac{1}{22}$$

Ex. Find the probability that when a hand of 3 cards are drawn from a well shuffled deck. What is the probability that it has:

इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि जब एक अच्छी तरह से फेटी गई ताश की गड्डी से 3 पत्तों को निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि:

(i) all faces cards/सभी फैस कार्ड

(ii) atleast one king/कम से कम एक राजा

HINTS:

(i) $\text{Probability} = \frac{{}^{12}C_3}{{}^{52}C_3} = \frac{\frac{12.11.10}{3.2.1}}{\frac{52.51.50}{3.2.1}} = \frac{11}{1105}$

(ii) P(atleast one king) = 1 – P(No king)

$$= 1 - \frac{{}^{48}C_3}{{}^{52}C_3} = 1 - \frac{48.47.46}{52.51.50}$$

$$= 1 - \frac{4324}{5525} = \frac{1201}{5525}$$

Ex. A person draws 3 cards from a pack of 52 cards. Find the probability of getting exactly two red cards?

एक व्यक्ति 52 पत्तों की एक गड्डी में से 3 पत्ते निकालता है। ठीक दो लाल पत्ते आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए?

HINTS:

$$\text{Probability} = \frac{{}^{26}C_2 \times {}^{26}C_1}{{}^{52}C_3} = \frac{\frac{26\times25}{2\times1}\times26}{\frac{52\times51\times50}{3\times2\times1}} = \frac{13}{34}$$

Ex. A person draws 3 cards from a pack of 52 cards (with replacement). Find the probability of getting :

एक व्यक्ति 52 पत्तों (प्रतिस्थापन के साथ) की एक ताश की गड्डी से 3 कार्ड खींचता है। निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) all three red cards/तीनों लाल कार्ड

(ii) that none of the cards is an ace/कोई भी पत्ता इक्का नहीं है

HINTS:

(i) $\text{Probability} = \frac{26}{52}\times\frac{26}{52}\times\frac{26}{52} = \frac{1}{8}$

(ii) $\text{Probability} = \frac{48}{52}\times\frac{48}{52}\times\frac{48}{52} = \frac{1728}{2197}$

Miscellaneous Questions/विविध प्रश्न

Ex. A glass jar contains 6 white, 8 black, 4 red and 3 blue marbles. If a single marble is chosen at random from the jar, what is the probability that it is black or blue?

एक कांच के पात्र में 6 सफेद, 8 काले , 4 लाल और 3 नीले कंचे हैं। यदि पात्र में से एक कंचा यादृच्छिक रूप से चुना जाता है, तो इसके काले या नीले रंग होने की क्या प्रायिकता है?

HINTS:

$$\text{Probability} = \frac{3+8}{21} = \frac{11}{21}$$

Ex. A bag contains 6 white and 4 black balls. 2 balls are drawn at random. Find the probability that they are of same color.

एक थैले में 6 सफेद और 4 काली गेंदे हैं। 2 गेंदों को यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वे एक रंग के हैं।

HINTS:

$$P(\text{Both white}) = \frac{6}{10}\times\frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{Both black}) = \frac{4}{10}\times\frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

$$P(\text{Same colour}) = \frac{1}{3}+\frac{2}{15} = \frac{7}{15}$$

Ex. There are 2 bags. First Bag contains 3 Red & 4 Blue balls and the second bag contains 5 Red & 2 Blue balls. One ball is picked from each of the bags. Find the probability that both balls are of :

2 बैग हैं। पहले बैग में 3 लाल और 4 नीली गेंदें हैं और दूसरे बैग में 5 लाल और 2 नीली गेंदें हैं। प्रत्येक बैग से एक गेंद निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों गेंदें हैं:

(i) Same color/समान रंग

(ii) different color/अलग रंग

HINTS:

(i) I 3R, 4B II 5R, 2B.

$P(\text{Both red}) = \frac{3}{7}\times\frac{5}{7} = \frac{15}{49}$

& $P(\text{Both black}) = \frac{4}{7}\times\frac{2}{7} = \frac{8}{49}$

$P(\text{Same colour}) = \frac{15}{49}+\frac{8}{49} = \frac{23}{49}$

(ii) $P(\text{different colour}) = 1 - P(\text{Same colour}) = 1 - \frac{23}{49} = \frac{26}{49}$

Ex. A bag contains 2 red, 3 green and 2 blue balls. Two balls are drawn at random. What is the probability that none of the balls drawn is blue?

एक थैले में 2 लाल, 3 हरी और 2 नीली गेंदें हैं। दो गेंदों को अनियमित रूप से निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गई कोई भी गेंद नीली नहीं है?

HINTS:

$\text{Probability} = \frac{{}^5C_2}{{}^7C_2} = \frac{5.4}{7.6} = \frac{10}{21}$

Ex. A box contains 5 green , 4 yellow and 3 white marbles. Three marbles are drawn at random. What is the probability that they are of the same color ?

एक बॉक्स में 5 हरें, 4 पीले और 3 सफेद कंचे हैं। तीन कंचे यादृच्छिक रूप से निकाले जाते हैं। क्या संभावना है कि वे एक ही रंग के हैं ?

HINTS:

$\text{Probability} = \frac{{}^5C_3 + {}^4C_3 + {}^3C_3}{{}^{12}C_3} = \frac{10+4+1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$

Ex. A basket contains 10 apples and 20 oranges out of which 3 apples and 5 oranges are defective. If we choose two fruits at random, what is the probability that either both are oranges or both are non defective?

एक टोकरी में 10 सेब और 20 संतरे हैं जिनमें से 3 सेब और 5 संतरे खराब हैं। यदि हम दो फलों को यादृच्छिक रूप से चुनते हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि या तो दोनों संतरे हैं या दोनों दोषपूर्ण नहीं है?

HINTS:

	A	O
D	3	5
N	7	5

$\frac{{}^{20}C_3 + {}^{22}C_2 - {}^{15}C_2}{{}^{30}C_2} = \frac{190+231-105}{435} = \frac{316}{435}$

Ex. The probability of A and B clearing an exam is $\frac{2}{3}$ and $\frac{3}{4}$ respectively .What is the probability that atleast one of them clears the exam ?

किसी परीक्षा में A और B के उत्तीर्ण होने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ है। उनमें से कम से कम एक के परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

HINTS:

Probability that atleast one of them clears the exam

= 1 – P(No body clears)

$= 1 - \frac{1}{3}.\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

Ex. A problem is given to three students whose chances of solving it are $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$ respectively. What is the probability that the problem will be solved?

तीन छात्रों को एक समस्या दी जाती है जिसके हल करने की संभावना क्रमशः $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ है। क्या संभावना है कि समस्या हल हो जाएगी?

HINTS:

P(Solved) = 1 – P(Not Solved)

$= 1 - \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Ex. The probability that three students A, B and C solve a problem are $\frac{3}{7}, \frac{5}{9}$ and $\frac{1}{5}$ respectively. What is the probability that the problem is solved?

तीन छात्रों A, B और C द्वारा एक समस्या को हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{9}$ और $\frac{1}{5}$ है। समस्या के हल होने की प्रायिकता क्या होगी?

HINTS:

P(solved) = 1 – P (Note solved)

$= 1 - \frac{4}{7}.\frac{4}{9}.\frac{4}{5} = 1 - \frac{64}{315} = \frac{251}{315}$

Ex. A man and his wife appear in an interview for two vacancies in the same post. The probability of husband's selection is $\left(\frac{1}{7}\right)$ and the probability of wife's selection is $\left(\frac{1}{5}\right)$. What is the probability that only one of them is selected ?

@Baka_260

एक आदमी और उसकी पत्नी एक ही पद पर दो रिक्तियों के लिए साक्षत्कार में शामिल होते है। पति के चयन की प्रायिकता $\left(\frac{1}{7}\right)$ तथा पत्नी के चयन की प्रायिकता $\left(\frac{1}{5}\right)$ है। उनमें से केवल एक के चुने जाने की प्रायिकता क्या है ?

HINTS:

Probability = $\frac{1}{7}\times\frac{4}{5}+\frac{6}{7}\times\frac{1}{5} = \frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

Ex. A brother and a sister appear for an interview against two vacant posts in an office. The probability of the brother's selection is $\frac{1}{5}$ and that of the sister's selection is $\frac{1}{3}$. What is the probability that only one of them is selected?

एक भाई और एक बहन एक कार्यालय में दो रिक्त पदों के विरुद्ध साक्षात्कार के लिए आते हैं। भाई के चयन की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ तथा बहन के चयन की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है। उनमें से केवल एक के चुने जाने की प्रायिकता क्या है?

HINTS:

Probability = $\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

Ex. A speaks truth in 75% of cases and B in 80% of cases. What is the probability that they likely to contradict each other, narrating the same incident.

A, 75% मामलों में सच बोलता है और B, 80% मामलों में सच बोलता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वे एक ही घटना का वर्णन करते हुए एक-दूसरे का खंडन करेंगे।

HINTS:

Probability = $\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{7}{20}$

Ex. A speaks the truth in 60% cases while B speaks the truth in 40% of the cases. What is the probability that they will contradict each other in a case ?

A 60% मामलों में सच बोलता है और B 40% मामलों में सच बोलता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वे एक मामले में एक दूसरे का खंडन करेंगे।

HINTS:

Probability = $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{13}{25}$

Ex. A speaks the truth 5 out of 7 times and B speaks truth 8 out of 9 times. What is the probability that they contradict each other in stating the same fact?

A, 7 में से 5 बार सच बोलता है और B, 9 में से 8 बार सच बोलता है। इसकी क्या प्रायिकता होगी कि वे एक ही तथ्य को कहने में एक दूसरे का खंडन करेंगे?

HINTS:

Probability = $\frac{5}{7}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{7}\times\frac{8}{9}=\frac{21}{63}=\frac{1}{3}$

Ex. Out of 17 applicants 8 boys and 9 girls. Two persons are to be selected for the job. Find the probability that at least one of the selected persons will be a girl.

17 आवेदकों में से 8 लड़के और 9 लड़कियाँ हैं। नौकरी के लिए दो व्यक्तियों का चयन किया जाना है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुने गए व्यक्तियों में से कम से कम एक लड़की होगी।

HINTS:

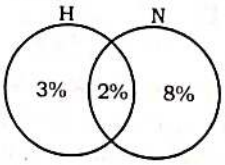
P(at least one girls) = 1 – P(No girls)

$= 1-\frac{{}^{8}C_2}{{}^{17}C_2} = 1-\frac{8.7}{17.16}=\frac{27}{34}$

Ex. Two friend Himanshu and Naman appeared in an exam. The probability that Himanshu will qualify the exam is $\frac{1}{20}$ and Naman will qualify the exam is $\frac{1}{10}$. The probability that both will qualify the exam is $\frac{1}{50}$. Find the probability that only one of them qualify the exam.

दो मित्र हिमांशु और नमन एक परीक्षा में सम्मिलित हुए। हिमांशु के परीक्षा उतीर्ण करने की प्रायिकता $\frac{1}{20}$ है और नमन के परीक्षा उतीर्ण करने की $\frac{1}{10}$ है। दोनों के परीक्षा में उतीर्ण होने की प्रायिकता $\frac{1}{50}$ है। उनमें से केवल एक के परीक्षा में उतीर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

HINTS:



P(H) = $\frac{1}{20}$ = 5% P(N) = $\frac{1}{10}$ = 10% & P(Both) = $\frac{1}{50}$ = 2%

Probability that only one of them qualify the exam

$= \frac{8+3}{100}=\frac{11}{100}$

Ex. In a cricket world cup the probability that India will win the cup is $\frac{1}{4}$. The probability of Pakistan winning the cup is $\frac{1}{5}$ and of Australia winning the cup is $\frac{1}{6}$. What is the probability that either of these 3 teams India, Pakistan and Australia would win the world cup?

@BaKa_260

एक क्रिकेट विश्व कप में भारत के कम के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। पाकिस्तान के कप जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है और ऑस्ट्रेलिया के कप जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन 3 टीमों में से कोई एक भारत, पाकिस्तान और ऑस्ट्रेलिया विश्व कप जीतेगी?

Note : Only one team can win the cup

नोट: केवल एक टीम की कप जीत सकती है

HINTS:

$$\text{Probability} = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{15+12+10}{60} = \frac{37}{60}$$

Ex. Two letters are chosen from English Alphabet. What is the probability that both are vowels.

अंग्रेजी वर्णमाला से दो अक्षर चुने गए हैं। क्या प्रायिकता है कि दोनों स्वर हैं।

HINTS:

$$\text{Probability} = \frac{{}^5C_2}{{}^{26}C_2} = \frac{5.4}{26.25} = \frac{2}{65}$$

Ex. A word consists of 9 letters; 5 consonants and 4 vowels. Three letters are chosen at random. What is the probability that more than one vowel will be selected ?

एक शब्द में 9 अक्षर होते हैं; 5 व्यंजन और 4 स्वर। यादृच्छिक रूप से तीन अक्षर चुने जाते हैं। एक से अधिक स्वर चुने जाने की प्रायिकता क्या है?

HINTS:

Probability that more than one vowel

= 1 – P (No Vowel)

$$= 1 - \frac{{}^5C_3}{{}^9C_3} = 1 - \frac{5.4.3}{9.8.7} = \frac{37}{42}$$

Ex. A letter is taken out at random from 'ASSISTANT' and another is taken out from 'STATISTICS'. The probability that they are the same letter is :

एक अक्षर 'ASSISTANT' से यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है और दूसरा 'STATISTICS' से निकाला जाता है। संभावना है कि वे एक ही अक्षर है:

HINTS:

AA	SSS
SSS	TTT
I	A
TT	IF
N	C

$$\text{Probability} = \frac{2}{9}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{9}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{10}+\frac{2}{9}\times\frac{3}{10} = \frac{19}{90}$$

Ex. Find the probability that a leap year will have:

एक लीप वर्ष में निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) atleast 52 Sundays/कम से कम 52 रविवार

(ii) exactly 52 Sundays/बिल्कुल 52 रविवार

(iii) exactly 53 Sundays/बिल्कुल 53 रविवार

HINTS:

(i) Leap year = 366 days = 52 weeks + 2 days

Since in a leap year 52 weeks are there, hence

P(atleast 52 Sundays) = 1

(ii) Remaining 2 days can be = MT, TW, WTh, TF, FS

$$\text{P(exactly 52 Sundays)} = \frac{5}{7}$$

(iii) $\text{P(exactly 53 Sundays)} = \frac{2}{7}$

Ex. A person can hit a target 5 times out of 8 shots. If he fires 10 shots, what is the probability that he will hit the target twice?

एक व्यक्ति 8 शॉट में से 5 बार निशाना लगा सकता है। यदि वह 10 शॉट फायर करता है, तो इसकी क्या प्रायिकता होगी कि वह दोबारा निशाना लगा लेगा?

HINTS:

Direct shortcut

${}^nC_r (P)^r (1 - P)^{n-r}$

$\text{P(Hit)} = \frac{5}{8}$, $\text{P(not hit)} = \frac{3}{8}$

$$\text{Probability} = {}^{10}C_2\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^8$$

$$= \frac{10\times9}{2\times1}\times\frac{5^2}{8^2}\times\frac{3^8}{8^8} = \frac{1125\times3^8}{8^{10}}$$

Ex. In a biased coin the probability of getting a head is 0.4, if we toss a coin 10 times, what is the probability of getting exactly three heads?

एक बायस्ड सिक्के में चित आने की प्रायिकता 0.4 है, यदि हम एक सिक्के को 10 बार उछालते हैं, तो ठीक तीन चित आने की प्रायिकता क्या है?

HINTS:

Direct shortcut

${}^nC_r (P)^r (1 - P)^{n-r}$

$\text{P(Head)} = \frac{2}{5}$ $\text{P(not head)} = \frac{3}{5}$

$$\text{Probability} = {}^{10}C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^7$$

$$= \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}\times\frac{2^3\times3^7}{5^{10}} = \frac{2^6\times3^8}{5^9}$$

@Baka_260

STATISTICS
सांख्यिकी
30

Mean/माध्य

The arithmetic mean of a given data is the sum of all observations divided by the number of observations.

किसी दिए गए डेटा का माध्य प्रेक्षणों के योगफल को प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित करने पर प्राप्त होता है।

$$\text{Mean/माध्य} = \frac{\text{Sum of all observations / सभी प्रेक्षणों का योगफल}}{\text{Number of observations / प्रेक्षणों की संख्या}}$$

Ex: Find mean 12, 34, 45, 50, 24

$$\text{Mean/माध्य} = \frac{(12 + 34 + 45 + 50 + 24)}{5}$$

$$\text{Mean/माध्य} = \frac{165}{5} = 33$$

Mean is denoted by $\bar{x}$ (pronounced as x bar).

माध्य को $\bar{x}$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

Types of data/डेटा के प्रकार

Data can be present in ungroup data or group data. Let's find the mean in both cases –

डेटा को अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत के रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं। आइए दोनों स्थितियों में माध्य ज्ञात करें –

Ungrouped Data/अवर्गीकृत डेटा

Let $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ be n observations.

माना $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ कोई n प्रेक्षण हैं।

We can find the arithmetic mean using the mean formula.

हम निम्नलिखित माध्य सूत्र का उपयोग करके समान्तर माध्य ज्ञात कर सकते हैं।

$$\text{Mean } (\bar{x}) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Ex. The arithmetic mean of the following data is ____.

निम्नलिखित संख्याओं का अंकगणितीय/समांतर माध्य ____ होगा।

23, 17,20,19,21

HINTS:

Arithmetic mean

$$= \frac{23+17+20+19+21}{5} = 20$$

Ex. If the mean of six observations 5, 7, 9, α, 11 and 12 is 9 then the value of α is :

यदि छह प्रेक्षणों 5, 7, 9, α, 11 और 12 का माध्य 9 है, तो α का मान है:

HINTS:

$$\text{Mean } (\bar{x}) = \frac{5+7+9+\alpha+11+12}{6}$$

$$\Rightarrow 9 = \frac{44+\alpha}{6}$$

$$\Rightarrow \alpha = 10$$

Grouped Data/वर्गीकृत डेटा

When the data is present in tabular form, we use the following formula:

जब डेटा सारणी के रूप में दिया गया होता है, तो हम निम्न सूत्र का उपयोग करते हैं:

$$\text{Mean } (\bar{x}) = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \ldots f_n}$$

Ex.

Shoe size	5	6	7	8	9
Frequency	1	3	4	3	1

Shoe size (x)	Frequency (f)	$f \times x = fx$
5	1	5
6	3	18
7	4	28
8	3	24
9	1	9
$\Sigma x = 35$	$\Sigma f = 12$	$\Sigma fxn = 84$

$$\text{Mean}(\bar{x}) = \frac{5+18+28+24+9}{12} = \frac{84}{12} = 7$$

Range/ परास या परिसर

The range in statistics for a given data set is the difference between the highest and lowest values.

किसी दिए गए डेटा सेट के आंकड़ों की सीमा उच्चतम और निम्नतम मूल्यों के बीच का अंतर है।

Range = Highest value – Lowest value

परास = उच्चतम मान – न्यूनतम मान

Ex. The following are the weights (in kg) of 25 students.

25 विद्यार्थियों के वजन (किलोग्राम में) निम्नलिखित हैं।

58, 55, 53, 50, 53, 51, 52, 54, 53, 52, 54, 53, 58, 53, 59, 55, 53, 52, 51, 54, 53, 59, 55, 53, 52

@Baka_pdf

What is the range of the given data?
दिए गए डेटा की परास या परिसर क्या है?

HINTS:

Range (परास, परिसर)

Range = Highest value – Lowest value

= 59 – 50 = 9

Mean Deviation/माध्य विचलन

The mean deviation is defined as a statistical measure that is used to calculate the average deviation from the mean value of the given data set.

माध्य विचलन को एक सांख्यिकीय माप के रूप में परिभाषित किया गया है जिसका उपयोग दिए गए डेटा सेट के माध्य मान से औसत विचलन की गणना करने के लिए किया जाता है।

Step-1: Find the mean value for the given data values

चरण-1: दिए गए डेटा मानों का माध्य मान ज्ञात करें

Step-2: Now, subtract the mean value from each of the data values given.

चरण-2: अब, दिए गए प्रत्येक डेटा मान से औसत मान घटाएं।

Step-3: Now, find the mean of those values obtained in step 2.

चरण-3: अब, चरण 2 में प्राप्त उन मानों का माध्य ज्ञात कीजिए।

$$\text{Mean Deviation/माध्य विचलन} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n}$$

Where/जहाँ,

x_i = represents each value in the data set.

x_i = डेटा सेट में प्रत्येक मान का प्रतिनिधित्व करता है।

$\bar{x}$ = represents the mean of the data set

$\bar{x}$ = डेटा सेट का माध्य दर्शाता है

n = represents the number of data values

n = डेटा मानों की संख्या का प्रतिनिधित्व करता है

Ex. What is the mean deviations of eight observations?
आठ प्रेक्षणों का माध्य विचलन क्या है?

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

HINTS:

x_i = 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = 9$$

$$\text{Mean Deviation/माध्य विचलन} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$(x_i - \bar{x}) = \frac{(9-6)+(9-7)+(9-10)+(9-12)+(9-13)+(9-4)+(9-8)+(9-12)}{8}$$

$$= \frac{22}{8} = 2.75$$

Median/माध्यिका

The number of the middle most observation, obtained after arranging the data in ascending or descending order, is called the median of the data.

डेटा को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद मध्यतम प्रेक्षण को माध्यिका कहते हैं।

Case1: Ungrouped Data/अवर्गीकृत डेटा

Step 1/चरण 1: Arrange the data in ascending or descending order.

डेटा को आरोही क्रम अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें।

Step 2/चरण 2: Let the total number of observations be n.

माना प्रेक्षणों की कुल संख्या n है।

To find the median, we need to consider if n is even or odd. If n is odd, then use the formula:

माध्यिका ज्ञात करने के लिए, हमें यह देखना होगा कि n सम है या विषम यदि n विषम है, तो सूत्र का प्रयोग करें:

$$\text{Median/माध्यिका} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th} \text{ observation/प्रेक्षण}$$

Ex: Find median of the following data.
निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यिका निकालें।

32, 25, 33, 27, 35, 29 and 30

HINTS:

32, 25, 33, 27, 35, 29 and 30

Arrange this data in ascending order

25, 27, 29, 30, 32, 33, 35

There are 7 observations i.e., odd number

$$\text{Median} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th} = \left(\frac{7+1}{2}\right)^{th} \text{ observations}$$

= 4th observations i.e., Median = 30

☞ If n is even then use the formula:

यदि n एक सम संख्या है तो सूत्र का प्रयोग करें:

$$\text{Median} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{th} \text{ term} + \left(\frac{n}{2}+1\right)^{th} \text{ term}}{2}$$

Ex. Find the median of 2, 4, 6, 8 ?

$$\text{Median} = \frac{\left(\frac{4}{2}\right)^{th} \text{ term} + \left(\frac{4}{2}+1\right)^{th} \text{ term}}{2}$$

Ex. Find the median of following data.
निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यिका निकालें।

2, 4, 6, 8

$$\text{Median} = \frac{(2)^{th} \text{ term} + (3)^{th} \text{ term}}{2} = \frac{4+6}{2}$$

Median = 5

@Baka_260

Ex. The following observations are arranged in ascending order. If the median of the data is 19, then find the value of x.

निम्नलिखित प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है। यदि डेटा की माध्यिका 19 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

6, 9, 15, $x+4$, $x+8$, $x+12$, 30, 32

HINTS:

$$\text{Median} = \frac{x+4+x+8}{2}$$

$= x + 6 = 19$

$x = 13$

Case 2: Grouped Data/वर्गीकृत डेटा

When the data is continuous and in the form of a frequency distribution, the median is found as shown below:

जब डेटा निरंतर और बारंबारता वितरण के रूप में होता है, तो माध्यिका निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात की जाती है।

Step 1: Find the total number of observations./प्रेक्षणों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

Step 2: Define the class size, and divide the data into different classes./वर्ग आकार को परिभाषित करें, और डेटा को विभिन्न वर्गों में विभाजित करें।

Step 3: Calculate the cumulative frequency of each class./प्रत्येक वर्ग की संचयी बारंबारता की गणना करें।

Step 4: Identify the class interval in which the median falls.

(Median Class is the class (where $\frac{n+1}{2}$ term lies.)/उस वर्ग अंतराल को पहचानें जिसमें माध्यिका आती है। (माध्यिका वर्ग वह वर्ग है जहाँ $\frac{n+1}{2}$ पद निहित है।)

Step 5: Find the lower limit of the median class (l), and the cumulative frequency of the median class (c)./माध्यिका वर्ग (l) की निचली सीमा और माध्यिका वर्ग (c) की संचयी आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

$$\text{Median} = L + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

Where,

L = Lower limit of median class/माध्यिका वर्ग की निचली सीमा

n = Total number of observations/प्रेक्षणों की कूल संख्या

cf = Cumulative frequency of the preceding median class/माध्यिका वर्ग से पहले वाली वर्ग की संचयी बारंबारता

f = Frequency of median class/माध्यिका वर्ग की बारंबारता

h = Class interval (upper limit - lower limit)/वर्ग अंतराल (उच्च सीमा - निम्न सीमा)

Ex :- Calculate the median for the following data:

Marks	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
Number of Students	6	20	37	10	7

HINTS:

We need to calculate the cumulative frequencies to find the median.

Marks	Number of Students	Cumulative frequency	
0–20	6	0 + 6	6
20–40	20	6 + 20	26
40–60	37	26 + 37	63
60–80	10	63 + 10	73
80–100	7	73 + 7	80

n = Last value of cf = 80, $\frac{n}{2} = \frac{80}{2} = 40$

Since n is even, we will find the average of the $\frac{n}{2}$th and the $(\frac{n}{2}+1)^{th}$ observation i.e.,

The cumulative frequency greater than 40 is 63 and the class is 40 – 60.

Hence, the median class is 40 – 60.

L = 40, f = 37, cf = 26, h = 20

Using Median formula:

$$\text{Median} = L + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 40 + \left[\frac{\frac{80}{2} - 26}{37}\right] \times 20$$

$= 40 + 7.57$

$= 47.57$

Therefore, the median is 47.57

Mode/बहुलक

The value which appears most often in the given data i.e. the observation with the highest frequency is called a mode of data.

वह मान जो दिए गए डेटा में सबसे अधिक बार दिखाई देते हैं यानी उच्चतम आवृत्ति वाले डेटा बहुलक कहलाता है।

Case 1: Ungrouped Data/अवर्गीकृत डेटा

Mode/बहुलक = Observation with maximum frequency अधिकतम आवृत्ति वाला प्रेक्षण

Ex: What will be the mode of the following data?

निम्नलिखित आंकड़ों का बहुलक क्या होगा?

13, 15, 31, 12, 27, 13, 27, 30, 27, 28 and 16

HINTS:

From given data

13, 15, 31, 12, (27), 13, (27), 30, (27), 28 and 16

27 appears maximum no. of times.

∴ Mode = 27

@BaKa_260

Case 2: Grouped Data/वर्गीकृत डेटा

When the data is continuous, the mode can be found using the following steps:

जब डेटा निरंतर होता है, तो निम्न चरणों का उपयोग करके बहुलक को ज्ञात किया जा सकता है।

Step 1: Find modal class i.e. the class with maximum frequency.

बहुलक वर्ग अर्थात् अधिकतम बारंबारता वाला वर्ग ज्ञात कीजिए।

Step 2: Find mode using the following formula:

निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके बहुलक ज्ञात कीजिए:

$$\text{Mode} = l + \left[\frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2}\right] \times h$$

Where/जहाँ,

l = lower limit of modal class,/बहुलक वर्ग की निचली सीमा

f_m = frequency of modal class,/बहुलक वर्ग की बारंबारता

f_1 = frequency of class preceding modal class
बहुलक वर्ग के पहले वाले वर्ग की बारंबारता

f_2 = frequency of class succeeding modal class
बहुलक वर्ग के बाद वाले वर्ग की बारंबारता

h = class interval/वर्ग अंतराल

Ex. Find the mode for the given distribution (rounded off to two decimal places).

दिए गए बटन का बहुलक ज्ञात कीजिए (दो दशमलव स्थान तक पूर्णांकित)।

Class Interval	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
Frequency	8	7	6	9	11	10

HINTS:

Modal class = maximum frequency of the table.

Here, modal class = 25 – 30

$$\text{Mode} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

l = Lower limit of modal class = 25

h = Class interval = 5

f_1 = Frequency of modal class = 11

f_0 = Frequency of class preceding modal class = 9

f_2 = Frequency of class succeeding modal class = 10

$$\Rightarrow \text{Mode} = 25 + \left(\frac{11-9}{22-9-10}\right) \times 5$$

$$= \frac{85}{3} = 28.33$$

Relation between Mean, Median and Mode

माध्य, माध्यिका और बहुलक के बीच संबंध

3 Median = 2 Mean + Mode

3 माध्यिका = 2 माध्य + बहुलक

Ex. The value of the mode and mean are 60 and 42 respectively, in a symmetrical distribution. The median of the distribution is.

सममित वितरण में बहुलक और माध्य का मान क्रमशः 60 और 42 है। वितरण का माध्यिका है।

HINTS:

3 Median = 2 × 43 + 60

⇒ Median = 48.66

Ex. Evaluate the following for given set of number:

3 × mean + 2 × mode – 6 × medain

Set = {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4}

दिए गए संख्या-समूह के लिए निम्नलिखित का मूल्यांकन करें:

3 × माध्य + 2 × बहुलक – 6 × माध्यिका

समूह = {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4}

HINTS:

$$\text{Mean} = \frac{1+2+2+3+3+3+4+4+4+4}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

$$\text{Medain} = \frac{3+3}{2} = 3$$

Mode = 4

3 × Mean + 2 × Mode – 6 × Medain

= 3 × 3 + 2 × 4 – 6 × 3 = – 1

Variance/विचरण

Variance is a measure of variability in statistics. It assesses the average squared difference between data values and the mean.

प्रसरण - भिन्नता सांख्यिकी में परिवर्तनशीलता का एक माप है। यह डेटा मानों और माध्य के बीच औसत वर्ग अंतर का आकलन करता है।

It is denoted by (σ)/इसे (σ) सूचित किया जाता है।

Sample variance/प्रतिदर्श विचरण

$$(\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$

How to compute variance and standard deviation?

प्रसरण और मानक विचलन की गणना कैसे करें?

Step 1 – Compute the simple mean $\bar{x}$.

चरण 1- साधारण माध्य $\bar{x}$ की गणना करें।

Step 2 – Calculate the difference of $x_i - \bar{x}$, for each value in the data set.

चरण 2- डेटा सेट में प्रत्येक मान के लिए $x_i - \bar{x}$ के अंतर की गणना करें।

Step 3 – Calculate the squared difference $(x_i - \bar{x})$, for each value in the data set.

चरण 3 - डेटा सेट में प्रत्येक मान के लिए वर्ग अंतर $(x_i - \bar{x})$, की गणना करें।

Step 4 – Sum of Differences of the the squares $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

चरण 4 - अंतरों के वर्ग का योग $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Step 5 – Divide the sum of squared differences with n,

$$\text{variance } (\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$$

चरण 5 - वर्ग अंतरों के योग को n, विचरण $(\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$ से विभाजित करें।

@Baka_260

Ex. Find the variance of the following data points.
निम्न डेटा बिंदुओं का विचरण ज्ञात कीजिए।
57, 64, 43, 67, 49, 59, 44, 47, 61, 59
HINTS:

$$\text{Mean}(\bar{x}) = \frac{57+64+43+67+49+59+61+59+44+47}{10}$$

$$= \frac{550}{10} = 55$$

$$(\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$$

$$= \frac{2^2+9^2+12^2+12^2+6^2+4^2+6^2+4^2+11^2+8^2}{10}$$

$$= \frac{662}{10} = 66.2$$

Standard Deviation/मानक विचलन

If σ^2 is the variance, then σ, is called the standard deviation./यदि σ^2 विचरण है, तो σ मानक विचलन कहलाता है

$$\text{Standard Deviation } (\sigma) = \sqrt{\text{variance}}$$

$$\text{मानक विचलन } (\sigma) = \sqrt{\text{प्रसरण}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Ex. If the variance of 5 value is 0.81, then what is its standard deviation?
यदि 5 मानों का प्रसरण 0.81 है, तो इसका मानक विचलन क्या है?
HINTS:
We know that,

$$\text{Standard deviation} = \sqrt{\text{variance}}$$

$$= \sqrt{0.81} = 0.9$$

Therefore, the standard deviation = 0.9

Ex. Calculate the standard deviation for the following data.
निम्नलिखित डेटा के लिए मानक विचलन की गणना करें।
4, 7, 9, 10, 15
HINTS:

$$\bar{x} = \frac{4+7+9+10+15}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{45}{5} = 9$$

$$(\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$$

$$= \frac{5^2+2^2+0^2+1^2+6^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{66}{5}$$

$$\text{SD}(\sigma) = \sqrt{\frac{66}{5}} = \sqrt{13.2}$$

Coefficient of variation/विचरण गुणांक

It is describe variability by expressing the standard deviation as a proportion of mean, usually a percentage. The formula for it as a percentage is,
यह मानक विचलन को माध्य के अनुपात, आमतौर पर प्रतिशत के रूप में व्यक्त करके परिवर्तनशीलता का वर्णन करता है।
प्रतिशत के रूप में इसका सूत्र है,

Coefficient of variation/विचरण गुणांक

$$= \frac{\text{Standard deviation}}{\text{Mean}} \times 100$$

Ex. If the mean is 25 and the standard deviation is 5 then the coefficient of variabtion is:
यदि माध्य 25 है और मानक विचलन 5 है, तो विचरण गुणांक है:
HINTS:
Coefficient of variation/विचरण गुणांक

$$= \frac{\text{Standard deviation}}{\text{Mean}} \times 100$$

$$= \frac{5}{25} \times 100 = 20\%$$

Ex. If coefficient of variation of a certain distribution is 55% and the mean is 14, then its standard deviation is
यदि एक निश्चित वितरण की विचरण का गुणांक 55% है और माध्य 14 है, तो इसका मानक विचलन है।
HINTS:

$$\text{Coefficient of variation} = \frac{\text{Standard deviation}}{\text{Mean}} \times 100$$

$$55 = \frac{\sigma}{14} \times 100$$

$$\sigma = \frac{14 \times 55}{100} = \frac{770}{100} = 7.7$$

Standard deviation (σ) = 7.7

★★★★★

@Baka_260

LOGARITHM

लघुगणक

31

Logarithm/लघुगणक

The exponent or power to which a base must be raised to yield a given number. Expressed mathematically, x is the logarithm of n to the base b.

वह घातांक या घात जिससे किसी आधार को किसी दिए गए संख्या को प्राप्त करने के लिए उठाया जाना चाहिए। गणितीय रूप से व्यक्त किया गया, x आधार b पर n का लघुगणक है।

If $b^x = n$ then $x = \log_b n$

यदि $b^x = n$ है तो $x = \log_b n$

Ex. $16 = 2^4$, $\log_2 16 = 4$

- **Common logarithm/सामान्य लघुगणक :**

Logarithms to the base 10 are called common logarithms. There are two notation to represent common logarithm i.e, log b (read as 'log b') and $\log_{10} b$.

आधार 10 के लघुगणक को सामान्य लघुगणक कहा जाता है। सामान्य लघुगणक को दर्शाने के लिए दो अंकन हैं अर्थात, log b ('log b' के रूप में पढ़ें) और $\log_{10} b$.

Mathematically, $\log x = \log_{10} b$

- **Natural logarithm/प्राकृतिक लघुगणक :**

Logarithms to the base e are called natural logarithms. There are also two notations to represent natural logarithms i.e, In b and $\log_e b$.

आधार e के लघुगणक को प्राकृतिक लघुगणक कहा जाता है। प्राकृतिक लघुगणक को दर्शाने के लिए दो अंकन भी हैं अर्थात, In b और $\log_e b$.

These both represent the logarithm of b to the base e.

ये दोनों आधार e के लिए b के लघुगणक का प्रतिनिधित्व करते हैं।

Mathematically, $\text{In } x = \log_e x$.

- Log of zero or negative numbers are not defined i.e, $\log_e 0$ is not defined.

शून्य या ऋणात्मक संख्याओं का लघुगणक परिभाषित नहीं है अर्थात् $\log_e 0$ परिभाषित नहीं है।

Properties of Logaritham/लघुगणक के गुण

Let m and n be positive number such that a, m, n, b, c > 0 and a, b, c $\neq$ 1

मान लीजिए m और n धनात्मक संख्या हैं जैसे कि a, m, n, b, c > 0 और a, b, c $\neq$ 1

(i) $\log_a a = 1$

(ii) $\log_a 1 = 0$

(iii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iv) $\log_a(m.n) = \log_a m + \log_a n$

(v) $\log_c a = \log_b a . \log_c b = \frac{\log_c a}{\log_c c}$

(vi) $\log_b a . \log_a b = 1$

(vii) $\log_a m^n = n\log_a m$

(viii) $\log_a q^m = \frac{1}{q}\log_a m$

(x) $\log(aq)m^p = \frac{p}{q}\log_a m$

(x) $a\log_a n = n$

(xi) $a\log_e x = x\log_e a$, $x > 0$, a > and a, $x \neq 1$

(xii) $\log a^b = -\log_{1/a} b$

Remember:

$\log 2 = 0.3010$

$\log 3 = 0.4771$

$\log 5 = 0.6990$

Ex. What is the value of $\log_{10}5 + \log_{10}(5x + 1) = \log_{10}(x + 5) + 1$, and then x is equal to?

$\log_{10}5 + \log_{10}(5x + 1) = \log_{10}(x + 5) + 1$, तो किसके बराबर है?

HINTS:

We have

$\Rightarrow \log_{10} 5 + \log_{10}(5x + 1) = \log_{10}(x + 5) + 1$

$\Rightarrow \log_{10}5 + \log_{10}(5x + 1) = \log_{10}(x + 5) + \log_{10}10$

We know that,

$\log_a(m.n) = \log_a m + \log_a n$

$\Rightarrow \log_a[5(5x + 1)] = \log_{10}[x + 5) \times 10]$

$\Rightarrow 5x + 1 = 2x + 10$

$\Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$

Ex. What is the value of $\frac{1}{10}\log_5 1024 - \log_5 10 + \frac{1}{5}\log_5 3125$

$\frac{1}{10}\log_5 1024 - \log_5 10 + \frac{1}{5}\log_5 3125$ का मान क्या है?

HINTS:

$\frac{1}{10}\log_5 1024 - \log_5 10 + \frac{1}{5}\log_5 3125$

We know that,

$\log_a m^n = n\log_a m$

$= \frac{1}{10}\log_5(2)^{10} - \log_5 10 + \frac{1}{5}\log_5(5)^5$

$= \frac{10}{10}\log_5 2 - \log_5 10 + \frac{5}{5}\log_5 5$

$= \log_5 2 - \log_5 10 + \log_5 5$

$= \log_5 2 - \log_5 2 - \log_5 5 + \log_5 5 = 0$

@Baka_2Go

Ex. If the roots of the quadratic equation $x^2 - 4x - \log_{10} N = 0$ are real, then what is the minimum value of N?
यदि एक द्विघात समीकरण $x^2 - 4x - \log_{10} N = 0$ के मूल वास्तविक हैं, तो N का न्यूनतम मान क्या है?

HINTS:

We have

$x^2 - 4x - \log_{10} N = 0$

$a = 1, b = -4$ and $c = -\log_{10} N$

Roots of quadratic equation are real

then $D \geq 0$ i.e $b^2 - 4ac \geq 0$

$\Rightarrow (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-\log_{10} N) \geq 0$

$\Rightarrow 4\log_{10} N \geq -16 \Rightarrow N \geq 10^{-4}$

$N \geq 0.0001$

Ex. What is the value of $\log_{\sqrt{b}} a.\log_{c^{\frac{1}{3}}} b.\log_{a^{\frac{1}{4}}} c$?

$\log_{\sqrt{b}} a.\log_{c^{\frac{1}{3}}} b.\log_{a^{\frac{1}{4}}} c$ का मान क्या है?

HINTS:

$= \log_{\sqrt{b}} a.\log_{c^{\frac{1}{3}}} b.\log_{a^{\frac{1}{4}}} c$

$= \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_b a\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\log_c b\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\log_a c\right)$

$= 2\frac{\log a}{\log b} \times 3\frac{\log b}{\log c} \times 4\frac{\log c}{\log a}$

$= 2 \times 3 \times 4 = 24$

☆☆☆☆☆

@Baka_260

CALCULATION

गणना

32

Despite having sufficient knowledge, in various competitive exams many students are not able to pass the examination due to lack of good basic calculation speed. If you practice for 20-30 minutes every day using the techniques given in this chapter, your calculation speed can increase up to 5-times within 2 months.

विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में पर्याप्त Knowledge होने के बावजूद Basic calculation speed अच्छी न होने की वजह से बहुत से छात्र परीक्षा उत्तीर्ण नहीं कर पाते है। यदि आप इस Chapter में दिए गए techniques का प्रयोग करते हुए प्रतिदिन 20- 30 मिनट अभ्यास करते है तो आपकी Calculation speed within 2 months 5-times तक बढ़ सकती है।

Addition/योग

Sum of two or more number is known as addition.

दो या दो से अधिक संख्याओं को जोड़ना योग कहलाता है।

CONCEPT-01

Ex. (96 + 8)

Step -1: Break the number (96) as (90 + 6)

96 को (90 + 6) के रूप में निरूपित करने पर

Step -2: Add unit digits → (8 + 6) = 14

इकाई के अंक (8 + 6) का योग = 14

Step -3: Total sum/कुल योग → (90 + 14) = 104

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	N_1+N_2	N_1	N_2	N_1+N_2
96	9		93	8	
98	9		95	7	
91	18		95	11	
93	17		97	12	
96	20		96	8	

CONCEPT-02

Ex. (69 + 37)

Step-1: Break the number (69) as (60 + 9) and (37) as (30 + 7)

69 और 37 को क्रमश: (60 + 9), (30 + 7) के रूप में निरूपित करने पर

Step -2: Add base number first → (60 + 30) = 90

सबसे पहले आधार संख्याओं को जोड़ने पर → (60 + 30) = 90

Step -3: Add unit digits of number → (9 + 7) = 16

इकाई अंकों को जोड़ने पर → (9 + 7) = 16

Step -4: Now add both the results → (90 + 16) = 106

अब दोनों परिणामों को जोड़ने पर → (90 + 16) = 106

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	N_1+N_2	N_1	N_2	N_1+N_2
69	49		67	48	
65	29		89	37	
87	48		74	51	
69	52		73	37	
76	42		79	28	

Ex. (187 + 287)

Step -1: Break the number (187) as (100 + 80 + 7) and (287) as (200 + 80 + 7)

(187) और (287) को क्रमश: (100 + 80 + 7), (200 + 80 + 7) के रूप में निरूपित करने पर

Step -2: Add base number first/आधार संख्याओं को जोड़ने पर

(100 + 200) = 300, (80 + 80) = 160

Step -3: Add unit digits/इकाई अंकों को जोड़ने पर → (7 + 7) = 14

Step -4: Now add the results/प्राप्त परिणामों को जोड़ने पर (300 + 160 + 14) = 474

Ex. 4639 + 1235

Step -1: Keep largest number in mind/सबसे बड़ी संख्या को ध्यान में रखें

4639

Step -2: Break the second number 1235 as /दूसरी संख्या 1235 को इस प्रकार तोड़ें

1000 + 200 + 30 + 5

Step -3: Add the numbers one after another /एक के बाद एक संख्याएँ जोड़ें

4639 + 1000 = 5639

5639 + 200 = 5839

5839 + 30 = 5869

5869 + 5 = 5874

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	N_1+N_2	N_1	N_2	N_1+N_2
169	249		637	448	
1265	629		269	137	
563	438		264	511	
639	252		2273	1237	
3479	1128		4576	1445	

@Baka_260

CONCEPT-03

In this approach, Interchange digit of a two digit number then the sum of resultant number and real number are always divided by 11

इस दृष्टिकोण में, दो अंकों की संख्या के अंकों को आपस में बदलें, फिर परिणामी संख्या और वास्तविक संख्या का योग हमेशा 11 से विभाजित किया जा सकता है।

Ex. (47 + 74)

Step -1: Sum of real number and resulted number

वास्तविक संख्या और परिणामी संख्या का योग

(47 + 74) = 121

Step -2: Resultant number 121 always divided by 11

परिणामी संख्या 121 हमेशा 11 से विभाजित होगी

CONCEPT-04

In this approach, numbers which are very close to each other are added.

इस दृष्टिकोण में, वे संख्याएँ जोड़ी जाती हैं जो एक-दूसरे के बहुत नजदीक होती हैं।

Ex. (45 + 52)

Step -1: Double the smaller number, i.e. → (45 × 2) = 90

छोटी संख्या को दोगुना करें, यानी → (45 × 2) = 90

Step -2: Find the gap between the numbers i.e. (52 – 45) = 7

संख्याओं के बीच का अंतर ज्ञात कीजिए अर्थात् → (52 – 45) = 7

Step -3: Now add both the results i.e. → (90 + 7) = 97

अब दोनों परिणामों को जोड़ें यानी → (90 + 7) = 97

Ex. (333 + 338)

Step-1: Double the smaller number, i.e. 333 × 2 = 666

छोटी संख्या को दोगुना करें, यानी 333 × 2 = 666

Step -2: Find the gap between the numbers i.e. 338 – 333 = 5

संख्याओं के बीच का अंतर ज्ञात करें अर्थात् 338 – 333 = 5

Step -3: Now add both the results i.e. 666 + 5 = 671

अब दोनों परिणामों को जोड़ें यानी 666 + 5 = 671

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	N_1+N_2	N_1	N_2	N_1+N_2
69	74		87	92	
137	146		269	277	
363	358		1264	1277	
1639	1645		2273	2282	
4576	4584		3489	3492	

CONCEPT-05

In this approach, number is added with the number which is closed to 100, 200, and 300 and so on.

इस दृष्टिकोण में, संख्या को उस संख्या के साथ जोड़ा जाता है, जो 100, 200, और 300 आदि के समीप हो।

Ex. (57 + 94)

Step -1: Assume 94 as 100 (6 is extra here)

94 को 100 मान लें (यहां 6 अतिरिक्त है)

Step -2: Add 57 with 100 i.e. 157

100 के साथ 57 जोड़ें यानी 157

Step -3: Then subtract the extra number i.e. 157 – 6 = 151

फिर अतिरिक्त संख्या को घटाएं यानी → 157 – 6 = 151

Ex. (314 + 399)

Step -1: Assume 399 as 400 → (1 is extra here)

399 को 400 मान लें (यहां 1 अतिरिक्त है)

Step -2: Add 314 with 400 i.e. 714

314 को 400 के साथ जोड़ें यानी 714

Step -3: Then subtract the extra number you added i.e. → 714 – 1 = 713

फिर आपके द्वारा जोड़ी गई अतिरिक्त संख्या को घटाए यानी

→ 714 – 1 = 713

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	N_1+N_2	N_1	N_2	N_1+N_2
189	84		181	92	
269	277		363	358	
1196	146		1264	1277	
1639	1645		2273	2282	
3489	3492		4576	4584	

CONCEPT-06

In this approach, during addition you should be very alert to find some pair of number which are getting added and forming base numbers like 100,200,300 etc.

इस दृष्टिकोण में, जोड़ के दौरान आपको संख्याओं के कुछ जोड़े ढूंढने के लिए बहुत सतर्क रहना चाहिए जो जुड़ रहे हैं और आधार संख्याएं बना रहे हैं जैसे 100, 200, 300 आदि।

Ex. (45 + 53 + 75)

Step -1: Add those numbers first which will give you base number like 100, 200, 300 etc. i.e. → 45 + 75 = 120

पहले उन संख्याओं को जोड़ें जो आपको आधार संख्या देंगी जैसे 100, 200, 300 आदि यानी → 45 + 75 = 120

Step -2: Now add Result with remaining number i.e. 120 + 53 = 173

अब परिणाम को शेष संख्या यानी 120 + 53 = 173 के साथ जोड़ें

Ex. (157 + 186 + 143)

Step -1: Add those numbers first which will give you base number like 100,200,300 etc. like 157 + 143 = 300

पहले उन संख्याओं को जोड़ें जिससे आपको आधार संख्या मिलेगी जैसे 100, 200, 300 आदि जैसे 157 + 143 = 300

@Beka_266

Step -2: Now add Result with remaining number i.e. 300 + 186 = 486

अब परिणाम को शेष संख्या यानी 300 + 186 = 486 के साथ जोड

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	N_3	SUM	N_1	N_2	N_3	SUM
34	43	66		79	52	22	
46	93	56		57	78	43	
67	88	47		167	196	148	
163	177	284		227	258	298	

CONCEPT-07

In this approach, Numbers are added with the numbers like 90, 190, 290, 390 etc.

इस दृष्टिकोण में, संख्याओं को 90, 190, 290, 390 आदि संख्याओं के साथ जोड़ा जाता है।

Ex. (67 + 90)

Step -1: Assume 90 as 100 (10 is extra here)

90 को 100 मान लें (यहां 10 अतिरिक्त है)

Step -2: Add 67 with 100 i.e. 167

67 को 100 के साथ जोड़ें यानी 167

Step -3: Then subtract extra number i.e. 10 from the result 167 – 10 = 157

फिर परिणाम में से अतिरिक्त संख्या यानी 10 घटाएं → 167 – 10 = 157

Ex. (468 + 790)

Step -1: Assume 790 as 800 (10 is extra here)

790 को 800 मान लें (यहां 10 अतिरिक्त है)

Step -2: Add 468 with 800 i.e. 1268

468 को 800 के साथ जोड़ें यानी 1268

Step -3: Then subtract extra number i.e. 10 from the result 1268 - 10 = 1258

फिर परिणाम में से अतिरिक्त संख्या यानी 10 घटाएं → 1268 – 10 = 1258

DO IT YOURSELF

N1	N2	N1+N2	N1	N2	N1+N2
69	95		87	92	
47	91		169	97	
136	98		148	91	
163	95		467	890	
1576	4594		3489	3992	

CONCEPT-08

In this approach, so many numbers are added. Try to add all these numbers in a single flow and practice on daily basis you will be pro in addition after few days.

इस दृष्टिकोण में, बहुत सारी संख्याएँ जोड़ी जाती हैं। इन सभी संख्याओं को एक ही प्रवाह में जोड़ने का प्रयास करें और दैनिक आधार पर अभ्यास करें, कुछ दिनों के बाद आप अतिरिक्त रूप से कुशल हो जाएंगे।

Ex. (67 + 68 + 35 + 43 + 65 + 55) = ?

Step -1: Add all tens place digits → 6 + 6 + 3 + 4 + 6 + 5 = 30

सभी दहाई के अंको को जोड़ें → 6 + 6 + 3 + 4 + 6 + 5 = 30

Step -2: Use 0 with the result i.e. 300

परिणाम अर्थात 300 के साथ 0 का प्रयोग करें

Step -3: Now add all the unit digits → 7 + 8 + 5 + 3 + 5 + 5 = 33

अब सभी इकाई अंकों को जोड़ें → 7 + 8 + 5 + 3 + 5 + 5 = 33

Step -4: Add (Step 2) and (Step 3) result, → 300 + 33 = 333

(चरण 2) और (चरण 3) के परिणामों को जोड़ें, → 300 + 33 = 333

Ex. (56 + 48 + 78 + 567 + 983)

Step -1: Add all hundredth place digits → 5 + 9 = 14

सौवें स्थान के सभी अंको को जोड़ें → 5 + 9 = 14

Step -2: Use double 0 with the result i.e. → 1400

परिणाम अर्थात 14 के साथ डबल 0 का प्रयोग करें →1400

Step -3: Now add all the tens digits → 5 + 4 + 7 + 6 + 8 = 30

अब दहाई के सभी अंक → 5 + 4 + 7 + 6 + 8 = 30 जोड़ें

Step -4: Use single 0 with the result i.e. 30

परिणाम अर्थात 30 के साथ एकल 0 का प्रयोग करें → 300

Step -5: Add all unit digits (6 + 8 + 8 + 7 + 3) = 32

सभी इकाई के अंको को जोड़ें 6 + 8 + 8 + 7 + 3 = 32 जोड़ें

Step -6: Add results of (Step 2), (Step 4) and (Step 5) → 1400 + 300 + 32 = 1732

(चरण 2), (चरण 4) और (चरण 5) के परिणामों को जोड़ें → 1400 + 300 + 32 = 1732

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	SUM
69	74	48	176	680	
49	64	58	276	580	
39	54	46	177	340	
269	177	250	124	43	
125	363	358	1264	1277	

SUBTRACTION/घटाव

Subtraction is also used to find the difference between two or more numbers.

घटाव का उपयोग दो या दो से अधिक संख्याओं के बीच अंतर ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

CONCEPT-01

Ex. (73 - 7)

Break 7 as (3 + 4) using unit digit of first number

पहली संख्या के इकाई अंक का उपयोग करके 7 को (3 + 4) के रूप में तोड़ें

Step -1: 73 – 3 = 70

Step -2: 70 – 4 = 66

Ex. (77 – 8)

Break 8 as (6 + 2) using unit digit of first number

पहली संख्या के इकाई अंक का उपयोग करके 8 को (6 + 2) के रूप में तोड़ें

Step -1: 77 – 6 = 71

Step -2: 71 – 2 = 69

@Baka_260

CONCEPT-02

(a) In this type of approach, double digit number is getting subtracted from its reversed number and we need to multiply the difference of digits with 9 always.

इस प्रकार के दृष्टिकोण में, दोहरे अंक वाली संख्या को उसकी उलटी संख्या से घटाया जा रहा है और हमें अंकों के अंतर को हमेशा 9 से गुणा करना होगा।

Ex. (73 – 37)

Step -1: Difference between digits (7 – 3 = 4)

अंकों के बीच अंतर → (7 – 3 = 4)

Step -2: Multiply the result always by 9 i.e. → 4 × 9 = 36

परिणाम को हमेशा 9 से गुणा करें अर्थात → 4 × 9 = 36

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 - N_2$	N_1	N_2	$N_1 - N_2$
61	16		87	78	
54	45		27	72	
63	36		93	39	
75	57		74	47	
84	48		91	19	

CONCEPT-03

In this approach, a number which is closer to a base number like 100, 200, 300... is subtracted from : number.

इस दृष्टिकोण में, एक संख्या जो आधार संख्या के करीब है जैसे 100, 200, 300... को : संख्या से घटा दिया जाता है।

Ex. (267 – 94)

(Consider 94 as 100, 6 is extra here)

(94 को 100 मानें, यहां 6 अतिरिक्त है)

Step -1: First Subtract 100 from 267 i.e. →167

सबसे पहले 267 में से 100 घटाएं यानि → 167

Step -2: Then add extra number (6) i.e. →167 + 6 = 173

फिर अतिरिक्त संख्या (6) जोड़ें यानी → 167 + 6 = 173

Ex. (567 - 393)

(Take 393 as 400,7 is extra here)

393 को 400 मानने पर, अतिरिक्त सख्या → 7

Step -1: First Subtract 400 from 567 i.e. → 167

सबसे पहले 567 में से 400 घटाएं यानि → 167

Step -2: Then add extra number (7) i.e. →167 + 7 = 174

फिर अतिरिक्त संख्या (7) जोड़ें यानी → 167 + 7 = 174

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 - N_2$	N_1	N_2	$N_1 - N_2$
169	94		137	92	
146	89		178	98	
278	86		264	197	
247	192		227	192	
576	184		348	192	

CONCEPT-04

In this approach, two numbers are getting subtracted which are closer to a base number (100,200,300). So add the margins of both the numbers from the base number.

इस दृष्टिकोण में, दो संख्याएँ घटाई जा रही हैं जो आधार संख्या (100, 200, 300) के करीब हैं। इसलिए दोनों संख्याओं के मार्जिन को आधार संख्या से जोड़ें।

Ex. (815-777)

Find Base Which Is closer to 777 i.e. → 800

777 के समीप आधार संख्या → 800

Step -1: 815 is 15 above than 800

815, 800 से 15 अधिक है

Step -2: 777 is 23 less than 800

777, 800 से 23 कम है

Add the margins, 15 + 23 = 38

अंतर को जोड़ें, 15 + 23 = 38

Ex. (1305-878)

Find Base Which is closer to 878 like 900

878 के समीप आधार संख्या → 900

Step-1: 1305 is 405 above than 900

1305, 900 से ऊपर 405 है

Step-2: 878 is 22 less than 900

878, 900 से 22 कम है

Add the margins 405 + 22 = 427

अंतर जोड़ें → 405 + 22 = 427

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 - N_2$	N_1	N_2	$N_1 - N_2$
169	124		387	292	
237	196		269	277	
363	158		1264	277	
1639	1345		2273	2182	
4576	4184		3492	2892	

CONCEPT-05

It is not necessary to always add first. Sometimes we can subtract also if it is easier. 35 + 73 - 55

हमेशा पहले जोड़ना जरूरी नहीं है। कभी-कभी यदि आसान हो तो हम घटा भी सकते हैं।

Ex. (35 + 73 - 55)

Step -1: Since 73 and 55 are closer to each other, so First 73 – 55 = 18

चूँकि 73 और 55 एक दूसरे के करीब हैं, इसलिए पहले 73 – 55 = 18

Step -2: Add result with 35, 35 + 18 = 53

परिणाम को 35 के साथ जोड़ें, 35 + 18 = 53

Ex. (– 267 + 196 + 253)

Step -1: Since 253 and 267 are closer to each other, so First 253 - 267 = – 14

@Baka_260

चूँकि 253 और 267 एक दूसरे के करीब हैं, इसलिए पहले 253 - 267 = - 14

Step -2: Add result with 196, 196 - 14 = 182

परिणाम को 196 के साथ जोड़ें, 196 - 14 = 182

DO IT YOURSELF

Expression	SUM	Expression	SUM
28 – 65 – 66		47 – 54 + 57	
76 + 62 – 72		57 + 78 – 43	
63 – 58 + 34		64 + 77 – 103	
–267 + 164 + 245		573 + 382 – 234	
576 + 684 – 272		489 – 249 + 125	

CONCEPT -06

In this approach number is subtracted from 100 or multiple of 100 like 200, 300, etc. So check how much you should add to smaller number to reach the bigger number.

इस दृष्टिकोण में संख्या को 100 या 100 के गुणज जैसे 200, 300 आदि से घटाया जाता है। इसलिए जांचें कि बड़ी संख्या तक पहुंचने के लिए आपको छोटी संख्या में कितना जोड़ना चाहिए।

Ex. (100 - 46)

Try to make 46 reach 100

46 से 100 तक पहुंचाने का प्रयास करें

Step -1: Add (4) to 46, it becomes 50

46 में (4) जोड़ने पर 50 हो जाता है

Step -2: Add (50) to 50, it becomes 100.

50 में (50) जोड़ने पर 100 हो जाता है।

We have added 4 and 50 so answer is 54

हमने 4 और 50 को जोड़ा है इसलिए उत्तर 54 है

OR

46 is (40 + 6)

Step -1: Subtract 40 from 100, 100 – 40 = 60

100 में से 40 घटाएँ, 100 - 40 = 60

Step -2: Subtract 6 from 60 now, → 60 – 6 = 54

अब 60 में से 6 घटाएं, → 60 - 6 = 54

Ex. (1000 - 357)

357 is 300 + 50 + 7

Step-1: Subtract 300 from 1000, → (1000 – 300) = 700

1000 में से 300 घटाएँ, (1000 - 300) = 700

Step-2: Now subtract 57 from 700, → (700 – 57) = 643

अब 700 में से 57 घटाएं, (700 - 57) = 643

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 - N_2$	N_1	N_2	$N_1 - N_2$
50	26		60	32	
67	46		69	27	
263	135		661	277	
1639	645		1273	682	
2376	1184		2489	1492	

MULTIPLICATION/गुणा

CONCEPT-01

In this approach, any two digit numbers are getting multiplied.

इस पद्धति में, किन्हीं दो अंकों की संख्या को गुणा किया जा रहा है।

Ex. (29 × 15)

Step -1: (20 + 9) × 15

Step -2: 15 × 20 + 9 × 15

Step -3: 300 + 135 = 435

Ex. (351×14)

Step -1: (300 + 50 + 1) × 14

Step -2: 4200 + 700 + 14

Step -3: 4914

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
39	25		69	15	
67	14		169	15	
264	13		661	17	
1639	18		4273	12	
2376	11		2789	14	

CONCEPT-02

In this approach, Even number is getting multiplied with number ending with 5.

इस दृष्टिकोण में, सम संख्या को 5 से समाप्त होने वाली संख्या से गुणा किया जा रहा है।

Ex. (45 × 26)

Step -1: Double the number which is ending with 5 like 45,45 × 2 = 90

उस संख्या को दोगुना करें जो 5 पर समाप्त हो रही है जैसे 45,

45 × 2 = 90

Step -2: Half of 26, $\frac{26}{2} = 13$

26 का आधा, 26, $\frac{26}{2} = 13$

Step -3: Multiply both the results 90 × 13 = 1170

दोनों परिणामों का गुणा करने पर 90 × 13 = 1170

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
25	14		45	18	
35	14		165	16	
265	13		665	22	
1635	18		4275	12	
2375	36		2785	14	

@Baka_200

CONCEPT-03

In these types of products, Consecutive numbers are getting multiplied. To calculate in mind, you should know the square from 1 to 100.

इस प्रकार की अवधारणा में, लगातार संख्याओं का गुणा करते है। मन में गणना करने के लिए आपको 1 से 100 तक का वर्ग पता होना चाहिए।

Ex. (26 × 25)

Square of Smaller number and add the same number to it.

छोटी संख्या का वर्ग करे और उसमें वही संख्या जोड़ें।

$(25)^2 + 25 = 625 + 25 = 650$

'OR'

Square of Bigger number and subtract the same number from it

बड़ी संख्या का वर्ग निकालें और उसमें से वही संख्या घटाएँ

$(26)^2 - 26 = 676 - 26 = 650$

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
12	13		25	24	
35	36		65	66	
265	266		665	666	
1635	1636		4275	4276	
2375	2376		2785	2786	

CONCEPT-04

In these types of product, Consecutive even numbers or consecutive odd numbers are getting multiplied.

इस प्रकार के गुना में, लगातार सम संख्याएँ या लगातार विषम संख्याएँ गुणा हो रही हैं।

Here, 11 is 1 less than 12 and 13 is 1 more than 12.

यहाँ, 11, 12 से 1 कम है और 13, 12 से 1 अधिक है।

Square of 12 – square of 1

12 का वर्ग - 1 का वर्ग

144 – 1 = 143

Ex. 37 × 43 = (40 – 3) (40 + 3)

Here 37 is 3 less than 40 and 43 is 3 more than 40.

यहां 37, 40 से 3 कम है और 43, 40 से 3 अधिक है।

Square of 40 – Square of 3

40 का वर्ग - 3 का वर्ग

1600 – 9 = 1591

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
16	18		22	24	
26	28		29	31	
89	91		661	663	
635	637		427	429	
375	377		785	787	

CONCEPT-05

Multiplication of Even Number With 5.

सम संख्या का 5 से गुणा।

In this approach, Even number is getting multiplied with 5

इस अवधारणा में किसी सम संख्या का 5 से गुणा करने पर

Ex. (66 × 5)

Step -1: Half of the even number 66 = 33

सम संख्या 66 का आधा = 33

Step -2: Use 0 at the end of result i.e. 330

परिणाम के अंत में 0 का प्रयोग करें यानी → 330

Ex. (624 × 5)

Step -1: Half of the even number 624 = 312

सम संख्या 624 का आधा = 312

Step -2: Use 0 at the end of result i.e. → 3120

परिणाम के अंत में 0 का प्रयोग करें अर्थात → 3120

CONCEPT-06

Multiplication of Odd Number with 5.

विषम संख्या का 5 से गुणा

In this approach, Even number is getting multiplied with 5

इस अवधारणा में किसी विषम संख्या का 5 से गुणा करने पर

Ex. (61 × 5)

Step -1: Subtract 1 from 61, it becomes even (60).

61 में से 1 घटाने पर सम (60) प्राप्त होता है।

Step -2: Half of the even number 60 is 30

सम संख्या 60 का आधा भाग 30 है

Step -3: Use 5 at the end of 30 i.e → 305

30 के अंत में 5 का प्रयोग करें यानि → 305

Ex. (451 × 5)

Step -1: Subtract 1 from 451, it becomes even (450)

451 में से 1 घटाने पर सम (450) हो जाता है

Step -2: Half of the even number 450 is 225

सम संख्या 450 का आधा भाग 225 है

Step -3: Use 5 at the end of result i.e → 2255

परिणाम के अंत में 5 का प्रयोग करें अर्थात → 2255

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
24	5		32	5	
47	5		48	5	
89	5		66	5	
635	5		427	5	
375	5		785	5	

@Baka_260

CONCEPT-07

Multiplication of Number with 25.

किसी भी संख्या को 25 से गुणा।

In this approach, a number is getting multiplied with 25.

इस अवधारणा के तहत किसी भी संख्या का 25 से गुणा करने पर

Ex. (548 × 25)

As we know → $25 = \frac{100}{4}$

जैसा कि हम जानते हैं → $25 = \frac{100}{4}$

Step -1: Divide the number by 4.

संख्या को 4 से विभाजित करें.

Step -2: Use (00) with the result.

परिणाम के साथ (00) का प्रयोग करें.

$\frac{548}{4} = 137 = 13700$

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
24	25		32	25	
48	25		144	25	
188	25		360	25	
636	25		428	25	
1376	25		1704	25	

CONCEPT-08

In this approach, a number is getting multiplied 0.5

इस दृष्टिकोण में, एक संख्या का 0.5 से गुणा करने पर

Ex. (346 × 0.5)

As we know → $0.5 = \frac{1}{2}$

जैसा कि हम जानते हैं → $0.5 = \frac{1}{2}$

So just half the number → $346 \times \frac{1}{2} = 173$

तो आधी संख्या → $346 \times \frac{1}{2} = 173$

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
124	0.5		432	0.5	
438	0.5		547	0.5	
889	0.5		566	0.5	
1635	0.5		1427	0.5	
3375	0.5		7785	0.5	

CONCEPT-09

In this approach, a number is getting multiplied with 125,

As we know → $125 = \frac{1000}{8}$

इस दृष्टिकोण के तहत, एक संख्या को 125 से गुणा करने पर,

जैसा कि हम जानते हैं → $125 = \frac{1000}{8}$

Ex. (256 × 125)

Step -1: Divide the number by 8

संख्या को 8 से विभाजित करें

Step -2: Use (000) with the result → $\frac{256}{8} = 32$, = 32000

परिणाम के साथ (000) का प्रयोग करें → $\frac{256}{8} = 32$, = 32000

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
24	125		64	125	
48	125		56	125	
168	125		248	125	
832	125		944	125	
672	125		984	125	

CONCEPT-10

In this approach, a number is getting multiplied 1.25

इस दृष्टिकोण में, एक संख्या का गुणा 1.25 से करने पर

As we know → $1.25 = \frac{10}{8}$

जैसा कि हम जानते हैं → $1.25 = \frac{10}{8}$

Ex. (56 × 1.25)

Step -1: Divide the number by 8, i.e. → $\frac{56}{8} = 7$

संख्या को 8 से विभाजित करें, अर्थात → $\frac{56}{8} = 7$

Step -2: Use (0) with the result, = 70

परिणाम के साथ (0) का प्रयोग करें, = 70

Ex. (256 × 1.25)

Step-1: Divide the number by 8, i.e. → $\frac{256}{8} = 32$

संख्या को 8 से विभाजित करें, अर्थात → $\frac{256}{8} = 32$

Step 2: Use (0) with the result, = 320

परिणाम के साथ (0) का प्रयोग करें, = 320

@BaKa_260

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
124	1.25		432	1.25	
648	1.25		448	1.25	
848	1.25		1064	1.25	
1632	1.25		1424	1.25	
1376	1.25		1784	1.25	

CONCEPT-11

Multiplication with 12.5

12.5 से गुणा

In this approach, a number is getting multiplied 12.5

इस दृष्टिकोण में, एक संख्या को 12.5 से गुणा करने पर

As we know $\rightarrow 12.5 = \frac{100}{8}$

जैसा कि हम जानते हैं $\rightarrow 12.5 = \frac{100}{8}$

Ex. (328 × 12.5)

Step-1: Divide the number by 8 $\rightarrow \frac{328}{8} = 41$

संख्या को 8 $\rightarrow \frac{328}{8} = 41$ से विभाजित करें

Step -2: Use (00) with the result, = 4100

परिणाम के साथ (00) का प्रयोग करें, = 4100

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
120	12.5		456	12.5	
344	12.5		784	12.5	
936	12.5		1168	12.5	
1232	12.5		1328	12.5	
1672	12.5		2984	12.5	

CONCEPT-12

In this approach, a two-digit number is getting multiplication with 101.

इस दृष्टिकोण में, दो अंकों की संख्या को 101 से गुणा करने पर

Step -1: Just repeat the number two times

बस संख्या को दो बार दोहराएं

Ex. 31 × 101 = 3131

45 × 101 = 4545

CONCEPT-13

In this approach, a two or three-digit number is get multiplied with 1001.

Repeat the number two times

इस दृष्टिकोण में, दो या तीन अंकों की संख्या को 1001 से गुणा किया जाता है।

संख्या को दो बार दोहराएँ

Ex. 452 × 1001 = 452452

646 × 1001 = 646646

Repeat the number two times with 0 in middle.

बीच में 0 रखते हुए संख्या को दो बार दोहराएं।

Ex. (55 × 1001 = 55055)

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
34	101		53	101	
64	101		56	101	
76	101		45	1001	
457	1001		729	1001	
575	1001		857	1001	

CONCEPT-14

In this approach, a number is getting multiplied with 1.5.

इस दृष्टिकोण में, एक संख्या को 1.5 से गुणा किया जाता है।

Ex. (52 × 1.5)

Number is added with half of itself.

संख्या को स्वयं के आधे भाग के साथ जोड़ा जाता है।

Half of the number (52) is (26)

52 + 26 = 78

संख्या (52) का आधा भाग (26) है

52 + 26 = 78

Ex. 66 × 1.5

Number is added with half of itself.

संख्या को स्वयं के आधे भाग के साथ जोड़ा जाता है।

Half of the number 66 is 33.

66 + 33 = 99

संख्या 66 का आधा भाग 33 है।

66 + 33 = 99

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
24	1.5		32	1.5	
48	1.5		46	1.5	
88	1.5		106	1.5	
2634	1.5		1728	1.5	
3376	1.5		3784	1.5	

CONCEPT-15

Multiplication of number with 15.

15 से संख्या का गुणन

In this approach, a number is getting multiplied with 15.

इस दृष्टिकोण में, एक संख्या को 15 से गुणा किया जाता है।

Ex. (58 × 15)

Step -1: Number is added with half of itself.

संख्या को स्वयं के आधे भाग के साथ जोड़ा जाता है।

@Baka_200

Step -2: Use 0 with the result/परिणाम के साथ 0 का प्रयोग करें।
58 + 29 = 870

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
324	15		532	15	
848	15		946	15	
886	15		986	15	
2035	15		1427	15	
1475	15		1585	15	

CONCEPT-16

Multiplication of number ending with 75
75 से समाप्त होने वाली संख्या का गुणन

In this approach, a number is getting multiplied with number ending with 75.
इस दृष्टिकोण में, एक संख्या को 75 पर समाप्त होने वाली संख्या से गुणा किया जाता है।

Remember This/ध्यान रखें

75 × 4 = 300
175 × 4 = 700
275 × 4 = 1100
375 × 4 = 1500
475 × 4 = (400 + 75) × 4 = 400 × 4 + 75 × 4
= 1600 + 300 = 1900

Ex. (48 × 175)

Step -1: Divide 48 by 4 i.e. → 24
48 को 4 से विभाजित करें यानी → 24

Step -2: Multiply 175 by 4 i.e. 700 multiply the results
24 × 700 = 16800
175 को 4 से गुणा करें अर्थात 700 से गुणा करके परिणाम प्राप्त करें
24 × 700 = 16800

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
9	175		12	175	
48	175		146	175	
286	175		346	175	
435	175		845	175	
1675	175		1585	175	

CONCEPT-17

In this approach, Numbers from 1 to 99 is getting multiplied with single digit number.
इस दृष्टिकोण में, 1 से 99 तक की संख्याओं को एकल अंक वाली संख्या से गुणा किया जा रहा है।

Ex. (58 × 7)

Step -1: Break 58 as (50 + 8)
58 को (50 + 8) के रूप में तोड़ें

Step -2: Multiply 50 with 7 = 350
50 को 7 से गुणा करें = 350

Step -3: Multiply 8 with 7 = 56
8 को 7 से गुणा करें = 56

Step -4: Add both the results → 350 + 56 = 406
दोनों परिणाम जोड़ें → 350 + 56 = 406

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
58	3		45	4	
44	8		54	11	
86	5		98	9	
75	7		78	9	
87	7		67	6	

CONCEPT-18

In this approach, number is getting multiplied with double.
इस दृष्टिकोण में, संख्या दोगुनी से गुणा हो रही है।

(Here, you should know the square of smaller number. do this calculation mentally)
(यहां, आपको छोटी संख्या का वर्ग पता होना चाहिए। यह गणना मानसिक रूप से करें)

Ex. (13 × 26)

Step -1: Square of smaller number (13) = 169
छोटी संख्या (13) का वर्ग = 169

Step -2: Double the result → (2 × 169) = 338
परिणाम को दोगुना करें → (2 × 169) = 338

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
22	44		28	56	
27	54		46	92	
37	74		32	64	
35	70		31	62	
21	42		19	38	

CONCEPT-19

Partition of number in two parts in such a way that you know the table of both the parts.
संख्या का दो भागों में विभाजन इस प्रकार करें कि आपको दोनों भागों की सारणी ज्ञात हो।

Ex. (1428 × 4)

Step -1: Break the number in two parts like 14 (Part-1) and 28 (Part-2)
संख्या को दो भागों में तोड़ें जैसे 14 (भाग-1) और 28 (भाग-2)

Step -2: 14 × 4 = 56

Step -3: 28 × 4 = 112

Step -4: Combine both the results (Step-2) and (Step-3) → 5712.
दोनों परिणामों (चरण-2) और (चरण-3) को मिलाएं → 5712

@Baka_260

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
1222	4		2328	3	
5427	6		3233	7	
3453	8		3542	9	
3254	2		2231	5	
4432	7		6439	8	

CONCEPT-20

Partition of number in two parts in such a way that you know the table of both the parts.

संख्या का दो भागों में विभाजन इस प्रकार करें कि आपको दोनों भागों की सारणी ज्ञात हो।

Ex. (2578 × 2)

Step -1: Break the number in two parts like 256 (Part-1) and 8 (Part-2)

संख्या को दो भागों में तोड़ें जैसे 256 (भाग-1) और 8 (भाग-2)

Step -2: 257 × 2 = 514

Step -3: 8 × 2 = 16

Step -4: Second part has only one digit, so use 6 only, and carry forward 1 to the first part.

दूसरे भाग में केवल एक अंक है, इसलिए केवल 6 का उपयोग करें, और 1 को पहले भाग तक आगे बढ़ाएँ।

Step -5: Combine both the results (Step-2) and (Step-3) → 514_16,5156

दोनों परिणामों को मिलाएं (चरण-2) और (चरण-3) → 514_16,5156

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
1622	9		2328	7	
7427	5		1233	6	
2453	9		1542	8	
3254	2		5231	5	
5432	9		3439	8	

CONCEPT-21

In this type, two triple-digit numbers are multiplied which contain zero in the middle.

इस प्रकार की अवधारणा में, उन दो त्रि-अंकीय संख्याओं को गुणा किया जाता है जिनके बीच में शून्य होता है।

Ex. 503 × 408

Step -1: 5 × 4 = 20

Step -2: 5 × 8 + 4 × 3 = 52

Step -3: 3 × 8 = 24

Step- 4: Combine all the results → 205224

सभी परिणामों को मिलाएं → 205224

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
202	404		208	505	
102	206		304	509	
703	905		509	605	
404	306		504	608	
308	606		409	608	

CONCEPT-22

In this approach, two or more-digit number is multiplied with 99, 999, 9999....

इस दृष्टिकोण में, दो या अधिक अंकों की संख्या को 99, 999, 9999 से गुणा किया जाता है...

Ex. 999 × 648

Step -1: Subtract 1 from 648, (648 – 1) = 647

648 में से 1 घटाएँ, (648 - 1) = 647

Step -2: Now 999 – 647 = 352

Step -3: Combine both the results → 647352

दोनों परिणामों को मिलाएं → 647352

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
99	212		99	549	
99	458		999	756	
999	434		999	656	
9999	915		9999	474	
9999	366		9999	698	

DIVISION/विभाजन

CONCEPT-01

Division of number with 5

संख्या का 5 से विभाजन

In this approach, a number is getting divided by 5

इस दृष्टिकोण में एक संख्या 5 से विभाजित हो रही है

As we know/जैसा कि हम जानते हैं → $5 = \frac{10}{2}$

Ex. (46 ÷ 5)

Double the number and place the decimal after one place from right hand side.

46 × 2 = 92 = 9.2

संख्या को दोगुना करें और दाहिनी ओर से एक स्थान के बाद दशमलव रखें।

46 × 2 = 92 = 9.2

Ex. 423 ÷ 5

Double the number and place the decimal after one place from right hand side.

423 × 2 = 846 = 84.6

संख्या को दोगुना करें और दाहिनी ओर से एक स्थान के बाद दशमलव रखें।

423 × 2 = 846 = 84.6

CONCEPT-02

In this approach a number is getting divided by 0.5

इस दृष्टिकोण में किसी संख्या को 0.5 से विभाजित किया जाता है।

As we know/जैसा कि हम जानते हैं → $0.5 = \frac{1}{2}$

Ex. (46 ÷ 0.5)

Just double the number/संख्या को दोगुना करें → 46 × 2 = 92

Ex. (462 ÷ 0.5)

Just Double the number/संख्या को दोगुना करें → 462 × 2 = 924

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \div N_2$	N_1	N_2	$N_1 \div N_2$
956	5		426	5	
896	5		1324	5	
233	5		1567	0.5	
696	0.5		3764	0.5	
3786	0.5		4246	0.5	

CONCEPT-03

Division of number with 0.25 in this approach,

A number is getting divided by 0.25.

इस विधि से संख्या का 0.25 से विभाजन, एक संख्या 0.25 से विभाजित हो रही है।

As we know/जैसा कि हम जानते हैं → $0.25 = \frac{1}{4}$

Ex. (6 ÷ 0.25)

Just 4 times the number/संख्या का 4 गुना → 6 × 4 = 24

Ex. (234 ÷ 0.25)

Just 4 times the number/संख्या का 4 गुना → 234 × 4 = 936

CONCEPT-04

Division of number with 0.125

In this approach, a number is getting divided by 0.125

0.125 से संख्या का विभाजन इस दृष्टिकोण में, एक संख्या 0.125 से विभाजित हो रही है।

As we know/जैसा कि हम जानते हैं → $0.125 = \frac{1}{8}$

Ex. (28 ÷ 0.125)

Just 8 times the number 28/संख्या (28) का मात्र (8) गुना 28 × 8 = 224

Ex. (232 ÷ 0.125)

Just 8 times the number/संख्या का मात्र 8 गुना

→ 232 × 8 = 1856

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \div N_2$	N_1	N_2	$N_1 \div N_2$
15	0.25		6	0.25	
9	0.25		24	0.25	
32	0.25		43	0.125	
96	0.125		64	0.125	
86	0.125		46	0.125	

CONCEPT-05

Division of number with 125

125 से संख्या का विभाजन

In this approach, a number is getting divided by 125.

इस दृष्टिकोण में, एक संख्या 125 से विभाजित हो रही है।

As we know/जैसा कि हम जानते हैं → $125 = \frac{1000}{8}$

Ex. (28 ÷ 125)

Just 8 times the number and place decimal after 3 place from Right hand side → 28 × 8 = 0.224

संख्या का केवल 8 गुना और दशमलव को दाहिनी ओर से 3 स्थान के बाद रखें → 28 × 8 = 0.224

Ex. (232 ÷ 125)

Just 8 times the number and place decimal after 3 place from Right hand side → 232 × 8 = 1.856

संख्या का केवल 8 गुना और दशमलव को दाहिनी ओर से 3 स्थान के बाद रखें → 232 × 8 = 1.856

CONCEPT-06

Division of number with 25

संख्या का 25 से विभाजन

In this approach, a number is getting divided by 25.

इस दृष्टिकोण में, एक संख्या 25 से विभाजित हो रही है।

As we know/जैसा कि हम जानते हैं → $25 = \frac{100}{4}$

Ex. (28 ÷ 25)

Just 4 times the number and place decimal after 2 place from right hand side → 28 × 4 = 112 = 1.12

संख्या का 25 से विभाजन इस दृष्टिकोण में, एक संख्या 25 से विभाजित हो रही है। → 28 × 4 = 112 = 1.12

Ex. (234 ÷ 25)

Just 4 times the number and place decimal after 2 place from right hand side → 234 × 4 = 936 = 9.36

संख्या का केवल 4 गुना और दाहिनी ओर से 2 स्थान के बाद दशमलव रखें 234 × 4 = 936 = 9.36

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \div N_2$	N_1	N_2	$N_1 \div N_2$
15	125		16	125	
18	125		124	125	
36	25		143	25	
96	25		64	125	
86	25		36	25	

CONCEPT-07

Division with 11, 22, 33.../11, 22, 33 के साथ भाग...

In this type, the numbers are like when we add first and last digits of number, we get the middle number like 495 (4 + 5 = 9 middle number)

इस अवधारणा में, संख्याएँ इस प्रकार होती हैं जैसे जब हम किसी संख्या के पहले और अंतिम अंक जोड़ते हैं, तो हमें मध्य संख्या प्राप्त होती है जैसे 495 (4 + 5 = 9 मध्य संख्या)

Ex. (132 ÷ 22)

Pick the first and last digits of 132 and divide by 2 only/132 का पहला और अंतिम अंक चुनें और केवल 2 से भाग दें।

$\frac{12}{2} = 6$

@Raka_260

Ex. 682 ÷ 55

Pick the first and last digits of 682 and divide by 5 only/682 का पहला और अंतिम अंक चुनें और केवल 5 से भाग दें।

$\frac{62}{5} = 12.4$

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \div N_2$	N_1	N_2	$N_1 \div N_2$
154	22		242	11	
198	33		352	77	
572	44		231	33	
176	55		264	22	
396	66		495	55	

CONCEPT-08

Division of number with/से संख्या का विभाजन 9, 99, 999

Ex. (4 ÷ 9)

There is one 9 and there is one digit in given number.
So/दी गई संख्या में एक 9 और एक अंक है। तो → 0.444.....

Ex. (23 ÷ 99)

There is two 9 and there is two digits in given number.
So/दी गई संख्या में दो 9 और दो अंक हैं। तो → 0.232323.....

Ex. (56 ÷ 999)

There is three 9 and there is two digits in the given number. So make it 3-digit number by using zero before it and then repeat it 0.056056056.....
दी गई संख्या में तीन 9 और दो अंक हैं। इसलिए इसके पहले शून्य का उपयोग करके इसे 3 अंकों की संख्या बनाएं और फिर इसे 0. 056056056 दोहराएं...

DO IT YOURSELF

N_1	N_2	$N_1 \div N_2$	N_1	N_2	$N_1 \div N_2$
5	9		6	9	
8	99		12	99	
30	99		42	99	
96	999		64	999	
86	999		56	999	

SQUARE/वर्ग

Method of finding square of any number.
किसी भी संख्या का वर्ग ज्ञात करने की विधि

CONCEPT-01

Square of number near Base 50
आधार 50 के निकट संख्या का वर्ग

Ex. $(42)^2$

Step -1: 42 is 8 less than 50/42, 50 से 8 कम है

Step -2: Subtract 8 always from 25, i.e. 17
25 में से सदैव 8 घटाएँ अर्थात् 17

Step -3: Square of 8/8 का वर्ग = 64

Step -4: 1764

Ex. $(54)^2$

Step -1: 54 is 4 more than 50/54, 50 से 4 अधिक है

Step -2: Add 4 always to 25, i.e. 29/हमेशा 25 में 4 जोड़ें, यानी 29

Step -3: Square of 4 = 16/4 का वर्ग = 16

Step -4: 2916

DO IT YOURSELF

Number	Square	Number	Square
$(43)^2$		$(47)^2$	
$(48)^2$		$(53)^2$	
$(57)^2$		$(51)^2$	
$(52)^2$		$(58)^2$	
$(59)^2$		$(44)^2$	

CONCEPT-02

Square of Number Ending with 5
5 से समाप्त होने वाली संख्या का वर्ग

Ex. $(75)^2$

Step -1: Square of 5 is 25/5 का वर्ग 25 है

Step -2: Multiply 7 to its successor (8), → 7 × 8 = 56
7 को उसके निकट (8) से गुणा करें, → 7 × 8 = 56

Step-3: Combine result os Step 1 & 2 ⇒ (5625)

DO IT YOURSELF

Number	Square	Number	Square
$(55)^2$		$(65)^2$	
$(85)^2$		$(15)^2$	
$(25)^2$		$(75)^2$	
$(45)^2$		$(35)^2$	

CONCEPT-03

Square of Number Close to Base/आधार के करीब संख्या का वर्ग
150/200/250/300...

Ex. $(208)^2$

Step -1: 208 is 8 more than Base 200, so 8 is extra here,
208, आधार 200 से 8 अधिक है, इसलिए यहां 8 अतिरिक्त है,

Step -2: Add 8 to the original number (208), i.e. 208 + 8 = 216
मूल संख्या (208) में 8 जोड़ें, यानी 208 + 8 = 216

Step -3: Since base is 200, we need to double the result
चूँकि आधार 200 है, हमें परिणाम दोगुना करने की आवश्यकता है

$\left(\frac{200}{100} = 2\right)$, i.e. 216 × 2 = 432

Step -4: Square of extra number (8) = 64
अतिरिक्त संख्या (8) का वर्ग = 64

Step -5: Combine the Results (Step 3) and (step 4), 43264

Ex. $(346)^2$

Step -1: 346 is 4 less than Base 350, so 4 is negative here

346 बेस 350 से 4 कम है, इसलिए यहां 4 नकारात्मक है

Step -2: Subtract 4 from the original number (346), i.e. 346 – 4 = 342

मूल संख्या (346) से 4 घटाएँ, अर्थात् 346 – 4 = 342

Step -3: Since base is 350, we need to multiply the result with 3.5 $\left(\frac{350}{100} = 3.5\right)$, i.e. 342 × 3.5 = 1197

चूँकि आधार 350 है, हमें परिणाम को 3.5 $\left(\frac{350}{100} = 3.5\right)$ से गुणा करना होगा, अर्थात् 342 × 3.5 = 1197

Step -4: Square of negative number (4) = 16

ऋणात्मक संख्या (4) का वर्ग = 16

Step -5: Combine the Results (Step 3) and (step 4) → 119716

(चरण 3) और (चरण 4) के परिणाम को मिलाएं → 119716

DO IT YOURSELF

Number	Square	Number	Square
$(203)^2$		$(606)^2$	
$(309)^2$		$(197)^2$	
$(152)^2$		$(796)^2$	
$(952)^2$		$(307)^2$	
$(516)^2$		$(446)^2$	

CONCEPT-04

Square of Number Ending with 25

25 से समाप्त होने वाली संख्या का वर्ग

Ex. $(625)^2$

Step -1: Square of 6, i.e. 36/6 का वर्ग, यानी 36

Step -2: Add half of 6 (3) to 36, i.e. → 36 + 3 = 39

6 का आधा भाग (3), 36 में जोड़ें, अर्थात् → 36 + 3 = 39

Step -3: Multiply 39 always with 10 → 39 × 10 = 390

39 को हमेशा 10 से गुणा करें → 39 × 10 = 390

Step -4: Square of 25 now, i.e. 625/अब 25 का वर्ग यानी 625

Step -5: Combine the results (Step-3) and (Step-4) → 390625

(चरण-3) और (चरण-4) के परिणामों को मिलाएं → 390625

DO IT YOURSELF

Number	Square	Number	Square
$(125)^2$		$(225)^2$	
$(325)^2$		$(425)^2$	
$(525)^2$		$(625)^2$	
$(725)^2$		$(825)^2$	

@Baka_260

TABLE – 1 SQAURE

Number	Square	Number	Square	Number	Square	Number	Square
$(11)^2$	121	$(21)^2$	441	$(31)^2$	961	$(41)^2$	1681
$(12)^2$	144	$(22)^2$	484	$(32)^2$	1024	$(42)^2$	1764
$(13)^2$	169	$(23)^2$	529	$(33)^2$	1089	$(43)^2$	1849
$(14)^2$	196	$(24)^2$	576	$(34)^2$	1156	$(44)^2$	1936
$(15)^2$	225	$(25)^2$	625	$(35)^2$	1225	$(45)^2$	2025
$(16)^2$	256	$(26)^2$	676	$(36)^2$	1296	$(46)^2$	2116
$(17)^2$	289	$(27)^2$	729	$(37)^2$	1369	$(47)^2$	2209
$(18)^2$	324	$(28)^2$	784	$(38)^2$	1444	$(48)^2$	2304
$(19)^2$	361	$(29)^2$	861	$(39)^2$	1521	$(49)^2$	2401
$(20)^2$	400	$(30)^2$	900	$(40)^2$	1600	$(50)^2$	2500

TABLE – 2 CUBE

Number	Cube	Number	Cube	Number	Cube
$(1)^3$	1	$(11)^3$	1331	$(21)^3$	9261
$(2)^3$	8	$(12)^3$	1728	$(22)^3$	10648
$(3)^3$	27	$(13)^3$	2197	$(23)^3$	12167
$(4)^3$	64	$(14)^3$	2744	$(24)^3$	13824
$(5)^3$	125	$(15)^3$	3375	$(25)^3$	15625
$(6)^3$	216	$(16)^3$	4096	$(26)^3$	17576
$(7)^3$	343	$(17)^3$	4913	$(27)^3$	19683
$(8)^3$	512	$(18)^3$	5832	$(28)^3$	21952
$(9)^3$	729	$(19)^3$	6859	$(29)^3$	24389
$(10)^3$	1000	$(20)^3$	8000	$(30)^3$	27000

@Raka_260

TABLE – 3 SQUARE ROOT

Number	Square Root
1	1
2	1.414
3	1.732
4	2
5	2.236
6	2.449
7	2.646
8	2.828
9	3
10	3.162

TABLE – 4

Expression	Result	Expression	Result	Expression	Result
2^1	2	3^1	3	4^1	4
2^2	4	3^2	9	4^2	16
2^3	8	3^3	27	4^3	64
2^4	16	3^4	81	4^4	256
2^5	32	3^5	243	4^5	1024
2^6	64	3^6	729	5^1	5
2^7	128	6^1	6	5^2	25
2^8	256	6^2	36	5^3	125
2^9	512	6^3	216	5^4	625
2^{10}	1024	6^4	1296	5^5	3125

TABLE -05

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
× 1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
× 2	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
× 3	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
× 4	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
× 5	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
× 6	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
× 7	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
× 8	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
× 9	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
× 10	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
× 11	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
× 12	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
× 13	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
× 14	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
× 15	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
× 16	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
× 17	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
× 18	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
× 19	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
× 20	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

@BaKa_260

ABOUT ADITYA RANJAN SIR



Aditya Ranjan Sir is a renowned Maths Faculty, who has taught lakhs of students through Rankers Gurukul You Tube Channel and its offline centre. His free maths & guidance videos have millions of views on you tube. He has a unique approach of solving new TCS questions. He always focusses on relevant and updated content. His innovative idea of completing entire maths syllabus for any govt. exam on you tube through "60 Days 60 Marathon" is a landmark in online education. He has got selection at his very early age and his words "SELECTED है SELECTION दिलायेंगे" are very popular among students.

Books Published



AVAILABLE ON amazon Flipkart

FOLLOW US:-

Channel Name:- *Rankers Gurukul*

Channel Name:- *Maths by Aditya Ranjan Sir*

Instagram ID:- *aditya_ _ _ ranjan*

₹ 280/-

DOWNLOAD NOW RG VIKRAMJEET APP FOR MATHS SPECIAL BATCH 8506003399